LEÇONS

SUR

LA GÉOMÉTRIE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

LEÇONS

SUR

LA GÉOMÉTRIE,

PAR

ALFRED CLEBSCH;

RECUEILLIES ET COMPLÉTÉES

PAR FERDINAND LINDEMANN,

Professeur

a l'Université de Fribourg en Brisgau.

TRADUITES

PAR ADOLPHE BENOIST,

Docteur en droit,

Membre de la Société Mathématique de France.

TOME TROISIÈME.

INTÉGRALES ABÉLIENNES ET CONNEXES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1883

AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR.

Le présent Volume termine la traduction française du bel Ouvrage que M. Lindemann a consacré à l'ensemble de la Géométrie analytique, d'après les Leçons de Clebsch. Peut-être ne sera-t-il pas sans intérêt pour le lecteur de connaître dans quelles conditions cette traduction a été entreprise et s'est poursuivie.

Je préparais, depuis assez longtemps, un Ouvrage personnel sur le même sujet, Ouvrage d'ailleurs moins complet et conçu sur un autre plan, lorsque le Livre de M. Lindemann me tomba sous les yeux. Je me trouvais ainsi mieux placé que bien d'autres pour apprécier non seulement l'élégance du texte et des formules, mais surtout la puissance de vues qui avait permis à l'Auteur, soit de parcourir, avec toutes les ressources de l'Algèbre moderne, les sujets plus anciennement connus, soit de faire rentrer dans son cadre sans solution de continuité une foule de recherches récentes ou entièrement neuves.

Je renonçai alors, pour longtemps, à la publication que j'avais projetée, et je crus rendre au public français un véritable service en lui facilitant la connaissance de l'Ouvrage actuel.

M. Lindemann, tout en acceptant avec empressement l'idée d'une traduction française, voulut bien m'avertir que certains passages de l'édition allemande avaient besoin de modifications, et m'adressa successivement un certain nombre de corrections et de changements. Il ne serait pas possible d'indiquer ici tous les passages modifiés; c'est par la comparaison attentive des deux textes

que le lecteur pourra se rendre compte de leurs différences. Nous citerons seulement, comme plus importants parmi les changements opérés, ceux qui se trouvent aux endroits suivants :

Tome I, page 380.

Tome II, pages 46-52, 123-129, 145, 174, 187, 213, 215-219, 328-331, 342.

Tome III, pages 17, 86-96, 252-253, 331.

Pour le troisième Volume, M. Lindemann a bien voulu revoir la traduction elle-même. C'est une garantie de plus que la pensée de l'Auteur dans ces matières difficiles a été fidèlement rendue. J'ai pu ainsi terminer la tâche que je m'étais imposée, sans avoir, je l'espère, dépassé mes forces.

A. B.

Chalon-sur-Saône, décembre 1882.

Nous croyons devoir reproduire ici quelques indications données dans la Préface de l'édition allemande, sur la composition des Tomes II et III. Ces indications font suite à celles qui figurent au commencement du premier Volume.

Tome II. — Les quatre premières Sections du Chapitre Ier (p. 1-91) sont une rédaction de la première moitié du Cours n° 2 (*voir* t. I, p. VII), modifiée en quelques passages à raison de la théorie des formes algébriques exposée auparavant, mais intelligible pour la plus grande partie sans le secours de cette dernière. On a ajouté les théorèmes de Nöther sur l'équation $f = A\varphi + B\psi$ (p. 45 et suiv.), les démonstrations effectuées au moyen du calcul symbolique du mode d'existence de la hessienne aux points singuliers de la courbe primitive (p. 70), la détermination directe des tangentes d'inflexion de la steinérienne (p. 82) et une extension du théorème sur les points de rebroussement de cette dernière. Les Sections sur les systèmes de courbes, sur le principe de correspondance étendu et sur la correspondance unidéterminative de deux plans superposés sont été, dans toute leur étendue, composées d'après les Mémoire

originaux; l'étude algébrique des systèmes élémentaires de coniques (117-120) est seule empruntée à une Leçon de Clebsch pendant l'hiver de 1870-1871. Quant aux transformations de Cremona, Clebsch en a donné un court aperçu dans ses Leçons sur les fonctions abéliennes (hiver 1870-1871) et dans celles sur la Géométrie de l'espace (hiver 1868-1869). Dans les Sections précitées on trouvera peut-être quelque chose de nouveau, sinon dans les résultats, du moins dans les démonstrations; nous croyons devoir mentionner ici : la détermination du mode d'existence de la jacobienne aux points communs des trois courbes primitives (p. 97), le calcul de la courbe de coïncidence pour les cas les plus simples de la correspondance sur une courbe de genre quelconque (p. 152 et suiv.), les recherches sur les systèmes de courbes qui touchent une même courbe fixe (p. 63 et suiv.) et l'établissement de la loi de réciprocité de Bull relativement à ces systèmes, au moyen du principe de correspondance.

Le Chapitre II renferme dans ses trois premières Sections la continuation du Cours n° 2. M. Lindemann y a ajouté les recherches sur les réseaux ponctuels et tangentiels de coniques (p. 248 et suiv.) d'après Rosanes, et les remarques sur la connexion du mode de description de Grassmann avec celui de Chasles. La théorie des formes ternaires cubiques est une exposition de la partie correspondante du Cours n° 3, prolongée toutefois au delà des limites de ce dernier et élargie par l'intercalation de recherches géométriques. La sixième Section formait, quant à son contenu géométrique, la fin du Cours n° 2. Les Sections sur l'application des fonctions elliptiques et sur la représentation paramétrique ont été composées personnellement par M. Lindemann. Clebsch n'a fait qu'aborder brièvement ce dernier sujet à la fin de son Cours sur les fonctions elliptiques (été de 1872); l'introduction des fonctions H de M. Hermite a été empruntée directement à cette source (p. 387). Mentionnons la tentative de résoudre certains problèmes algébriques d'élimination par l'usage des équations de division des fonctions elliptiques (p. 422 et suiv.).

Tome III. — Le Chapitre I est une rédaction, complètement personnelle à M. Lindemann, des matières qui y sont contenues; l'auteur s'est cru d'autant plus autorisé à l'entreprendre que la connexion de la théorie des fonctions abéliennes avec la Géométrie

est une des plus belles découvertes que nous devions à Clebsch et que ces applications n'ont été traitées qu'incidemment dans l'Ouvrage de Clebsch et Gordan sur les fonctions abéliennes. Les recherches purement algébriques qui s'y trouvent doivent être pour partie considérées comme complémentaires des Sections correspondantes du Chapitre I du Tome II. On trouvera peut-être ici encore des points de vue et des démonstrations nouvelles; nous citerons l'exposition de la démonstration directe de la conservation du genre dans les transformations unidéterminatives (p. 3 et suiv.), l'établissement des formules de Brill pour les correspondances simultanées sur une courbe (p. 176 et suiv.), la décomposition des expressions différentielles algébriques en sommes de différentielles normales (p. 152 et suiv.), la déduction du théorème de Jacobi et celle du théorème d'Abel comme conséquence de ce dernier (p. 204 et suiv.), la résolution du problème d'inversion étendu, pour le cas de $p = 2$, basée sur les principes de Riemann (p. 267 et suiv.) et l'étude des courbes du genre zéro (p. 287 et suiv.).

Dans le Chapitre II la théorie des connexes a été exposée en prenant pour base le Cours n° 3 et un manuscrit laissé par Clebsch. M. Lindemann a ajouté quelques résultats numériques (p. 355, 377), l'établissement des propriétés des courbes désignées par $F = 0$ et $\Phi = 0$ (p. 392), les exemples relatifs à la détermination des courbes de coïncidence (p. 399 et suiv.), une étude détaillée du connexe (1-1) basée sur les Mémoires cités dans le texte, les théorèmes généraux sur le connexe $(1, n)$ et les recherches de Godt sur le connexe (1, 2). Sont empruntés en particulier au manuscrit de Clebsch : le calcul du connexe conjugué d'un connexe (2, 2), les remarques sur les différentielles d'intégrales algébriques multiples et les développements de la page 403. Les notions sur l'intégration d'une équation différentielle ainsi que l'étude des transformations de contact de Lie ont pour base une esquisse manuscrite de M. Klein qui a bien voulu permettre à M. Lindemann d'en faire usage.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

La Géométrie sur une courbe algébrique et sa liaison avec la théorie des intégrales abéliennes.

CHAPITRE SECOND.

Les Connexes.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME ET DERNIER.

LEÇONS

SUR

LA GÉOMÉTRIE.

TOME TROISIÈME.

INTÉGRALES ABÉLIENNES ET CONNEXES.

CHAPITRE PREMIER.

LA GÉOMÉTRIE SUR UNE COURBE ALGÉBRIQUE ET SA LIAISON AVEC LA THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

I. — Les transformations unidéterminatives d'une courbe algébrique.

Dans les transformations appelées *transformations Cremona* (t. II, p. 192), nous avons appris à connaître un moyen d'établir par une transformation non linéaire une relation entre deux plans telle que, sauf en certains points exceptionnels, à tout point de l'un de ces plans correspondît un point unique de l'autre, et réciproquement. D'autre part, nous avons reconnu, sur l'exemple de la relation entre la hessienne et la steinérienne d'une courbe quelconque, la possibilité de rapporter unidéterminativement deux courbes particulières l'une à l'autre sans que cette relation soit unidéterminative pour tout le plan. L'étude de ce genre de transformations d'une courbe algébrique particulière va d'abord nous occuper maintenant. Nous serons naturellement conduits à

faire des applications variées du résultat de nos recherches à des points déjà abordés précédemment, ainsi qu'à compléter souvent nos recherches antérieures relatives à la Géométrie sur une courbe. Nous insisterons spécialement sur les diverses démonstrations de la conservation du genre dans ces transformations unidéterminatives.

Supposons qu'une transformation

$$(1) \qquad \rho x_1 = \varphi_1(y), \quad \rho x_2 = \varphi_2(y), \quad \rho x_3 = \varphi_3(y),$$

où les fonctions φ_i sont des fonctions homogènes du même ordre de y_1, y_2, y_3, change une courbe $f(x) = 0$ en une autre $F(y) = 0$. Si le fait doit se produire par une transformation unidéterminative réversible, on doit pouvoir, en combinant les équations (1) avec $F(y) = 0$, revenir à l'équation $f = 0$, et, dans le cours du procédé éliminatoire nécessaire à cet objet, trouver que les y sont proportionnels à des fonctions entières et homogènes des x, en sorte que

$$(2) \qquad \mu y_1 = \Phi_1(x), \quad \mu y_2 = \Phi_2(x), \quad \mu y_3 = \Phi_3(x).$$

L'équation $F = 0$ est alors le résultat de l'élimination des grandeurs μ, x_1, x_2, x_3 entre ces équations (2) et entre l'équation $f(x) = 0$, et, si inversement on effectue la substitution (2) dans F, $F(y)$ devra, à un facteur près, se changer en $f(x)$, c'est-à-dire que l'on aura

$$(3) \qquad \mu^\nu F(y_1, y_2, y_3) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = Mf,$$

ν *désignant l'ordre de* F. Ce dernier nombre peut se déterminer très simplement. Aux points d'intersection d'une courbe du réseau

$$(4) \qquad u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 = 0$$

avec $f = 0$ qui ne sont pas communs à toutes les courbes du réseau correspondent, en effet, les points de rencontre de la droite

$$u_y \equiv u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

avec $F(y) = 0$. Or, si le nombre des premiers (lequel dépend uniquement des éléments donnés) est égal à ν, le nombre des derniers sera précisément le même, en vertu du caractère unidéterminatif de notre transformation : *Le nombre des points d'inter-*

section mobiles *des courbes du réseau* (4) *avec* $f(x) = 0$ *détermine donc l'ordre de la courbe* $F(y) = 0$.

On peut imaginer que la transformation ainsi établie, et à détermination unique pour les points de f, est réalisée géométriquement d'une manière semblable à ce qui se passe pour les transformations Cremona. Nous nous figurerons d'abord le plan entier E_x des points x comme transformé par le moyen des équations (2) en un plan E_y des points y. Alors, à chaque point de E_x correspond évidemment *un* point de E_y, et, réciproquement, à tout point de E_y que nous supposerons déterminé comme point de rencontre de deux lignes $v_y = 0$, $w_y = 0$ correspondent sur E_x les s^2 points d'intersection des deux courbes

$$v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3 = 0 \quad \text{et} \quad w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 0,$$

s désignant l'ordre des courbes $\Phi_i = 0$. Il peut arriver en particulier que toutes les courbes du réseau (4) aient quelques points communs; ces derniers absorberont une certaine quantité des s^2 points d'intersection ci-dessus, et l'on doit (comme dans les transformations Cremona) ne faire correspondre que les autres intersections, c'est-à-dire les intersections mobiles des deux courbes $\Sigma v_i\Phi_i = 0$, $\Sigma w_i\Phi_i = 0$, au point de rencontre des droites $v_y = 0$ et $w_y = 0$. Si le nombre de ces intersections mobiles est égal à l'unité, on a une transformation Cremona. Actuellement les points communs des courbes Φ interviennent de nouveau, ce qui a à peine besoin de nouvelles explications, comme *points fondamentaux* pour la transformation (*voir* t. II, p. 190), et à chaque point de cette espèce correspond sur E_y une *courbe fondamentale* du genre zéro; cette dernière est du $r^{\text{ième}}$ ordre si le point fondamental de E_x auquel elle se rapporte est un point multiple d'ordre r pour chacune des courbes Φ.

A une courbe quelconque $f = 0$ du $n^{\text{ième}}$ ordre sur E_x correspond sur E_y une courbe dont l'équation s'obtient par l'élimination des x_i et de la quantité μ entre les équations (2) et entre $f = 0$; mais de cette courbe se séparera i fois une courbe fondamentale d'ordre h si $f = 0$ passe i fois par un point fondamental d'ordre h sur E_x. Si à l'inverse un point parcourt sur E_y une courbe $F(y) = 0$, à chaque point de cette courbe F correspondent β points sur E_x, β étant le nombre des points d'intersection mobiles de

deux courbes du réseau (4), et cette réunion de β points parcourt la courbe $\chi = 0$, qui sur E_x répond à la courbe F. Mais, si $F(y) = 0$ est précisément la courbe qui provient, suivant la manière indiquée, d'une courbe $f(x) = 0$, la courbe $\chi(x) = 0$ qui répond à $F(y)$ devra aussi réciproquement ramener à $f(x) = 0$, c'est-à-dire que χ devra renfermer un facteur f; *or ce fait a pour nous une importance particulière.*

Le point y, homologue de x, a été déterminé comme sommet du faisceau de rayons qui correspond sur E_y au faisceau de courbes Φ passant par x. On reconnaît donc immédiatement, d'après ce qui précède, que *la transformation d'une courbe* $f(x) = 0$ *ne peut être une transformation à détermination unique que si toutes les courbes du réseau* (4) *qui passent par un point* quelconque *de f ne se coupent* plus *ailleurs sur f* [1], excepté aux points que *toutes* les courbes du réseau ont en commun avec *f. Il est d'ailleurs évident que le déterminant fonctionnel des Φ_i ne doit pas s'évanouir identiquement,* car autrement les courbes ne formeraient pas, en général, un réseau [2]. Donc, tandis qu'un point de base d'un faisceau provenant du réseau parcourt la courbe f, les autres points de base mobiles de ce faisceau décrivent une autre courbe, laquelle, comme on le voit immédiatement, est représentée par l'annulation de l'expression désignée dans (3) par M.

Il peut arriver en particulier que toutes les courbes du faisceau en question se touchent en x (cas où une de ces courbes a en x un point double); alors, en vertu de propositions précédentes, x est situé sur la jacobienne du réseau (t. II, p. 102). En même temps aussi, un des autres points de base du faisceau qui sont placés sur $M = 0$ se rapproche infiniment de x, c'est-à-dire que *la courbe* $M = 0$ *passe par toutes les intersections de* $f = 0$ *avec la jacobienne du réseau* (4), théorème qui sera important pour nous plus tard. Nous établirons encore immédiatement ici quelques propositions utiles également pour ce qui suivra. Il résulte de (3)

---

[1] Cela arrive, par exemple, toujours si les trois courbes $\Phi_i = 0$ sont des courbes adjointes d'ordre $n - 3$ pour une courbe *hyperelliptique* du $n^{\text{ième}}$ ordre; on ne peut donc, pour cette dernière, faire usage de courbes de l'espèce en question pour une transformation unidéterminative. *Voir* les deux Sections suivantes.

[2] *Voir* la première note de la page 97, t. II.

que $M = 0$ *est de l'ordre* $\nu s - n$, ν désignant encore l'ordre de F, s celui des fonctions Φ_i. De plus, le premier membre de (3) s'annule au degré νr de multiplicité pour un point commun r^{iple} des Φ_i et la même chose a nécessairement lieu pour le second membre. Si donc ce point est multiple d'ordre i de f, on reconnaît que $M = 0$ *a, en tout point multiple d'ordre i pour f et multiple d'ordre r pour chacune des courbes* Φ_i, *un point multiple d'ordre* $\nu r - i$.

La courbe $M = 0$ présente également de l'importance pour la détermination des points multiples de $F(y) = 0$. En premier lieu, on aperçoit immédiatement, par ce qui a été dit à propos des transformations Cremona, que tout point multiple de f non situé en un point fondamental du plan E_x donne lieu à un point multiple de même sorte de F, et de plus que tout point i^{iple} de f situé en un point fondamental de E_x et à branches ayant un cours séparé se trouve résolu en i points simples de F. Si le point fondamental en question sur E_x est du $r^{\text{ième}}$ ordre, ces i points simples de F sont les points de rencontre avec F de la courbe fondamentale correspondante du $r^{\text{ième}}$ ordre. Cette courbe fondamentale rencontre encore ailleurs F en $\nu r - i$ points répondant au point multiple d'ordre $\nu r - i$ que $M = 0$ possède au susdit point fondamental du $r^{\text{ième}}$ ordre, car sur E_x l'image de la courbe F n'est pas donnée par f seulement, mais par f réuni à M. Nous trouverons au surplus incessamment toutes ces considérations établies par voie purement algébrique. Maintenant il peut aussi se produire sur F de nouveaux points doubles à chacun desquels répondent deux points séparés sur f, et, pour préciser, le fait arrivera si les courbes Φ qui passent par un point x de f (caractérisé par cette circonstance) se rencontrent elles-mêmes en un second point de f, c'est-à-dire si un second point de base du faisceau dont l'un des points de base a été supposé mobile sur f est également situé sur f, ce qui se produit précisément aux points d'intersection de f avec le lieu des autres points de base, c'est-à-dire avec M. Parmi ces intersections figurent également, ainsi que nous venons de le montrer, les intersections de la jacobienne du réseau des Φ dans lesquelles deux points de base du réseau sont voisins l'un de l'autre, sans que tous deux soient exactement situés sur f; ces points ne donnent pas, par suite, lieu

à des points doubles de F [1]. Nous avons, en conséquence, ce théorème :

Les points d'intersection de $M = 0$ *avec* $f = 0$ *qui ne sont pas situés en des points communs des courbes du réseau* (4) *et qui ne tombent pas aux points d'intersection de la jacobienne de ce réseau avec f sont associés par couples de telle manière que les points de chaque couple se réunissent, lors de la transformation* (2), *en un point double de la nouvelle courbe* $F = 0$.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer les nombres relatifs aux divers systèmes de points d'intersection désignés ici pour avoir immédiatement tous les moyens auxiliaires nécessaires à une démonstration directe du théorème du genre, telle que nous la donnerons plus tard. Nous reprendrons encore alors algébriquement le théorème énoncé en dernier lieu.

On rencontre de même sur le plan E_y des points fondamentaux et sur E_x des courbes fondamentales si l'on part des équations (1); mais celles-ci ne sont pas en relation par elles-mêmes avec les figures fondamentales qui se présentent dans l'équation (2) et dont nous avons parlé récemment, mais seulement eu égard à la courbe $f = 0$, car c'est seulement en vertu de $f = 0$ que l'on peut obtenir au moyen des équations (2) les y en fonction rationnelle des x, à moins que l'on n'ait affaire à une transformation Cremona. La *déduction effective des équations* (1) *de* (2), *ainsi que celle de l'équation* $F = 0$ *de* $f = 0$, peut être réalisée de la manière suivante. On éliminera d'abord x_3 de chacune des équations (2) au moyen de $f = 0$; on obtient ainsi trois équations de la forme $(i = 1, 2, 3)$

$$\psi_i(x_1, x_2, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0. \tag{5}$$

Ensuite on éliminera x_2 successivement entre $\psi_1 = 0$, $\psi_3 = 0$ et $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$; cela donne deux équations de la forme

$$\chi_1(x_1, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0, \quad \chi_2(x_1, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0, \tag{6}$$

---

[1] Cela n'arriverait que si la ligne joignant les deux points de base voisins, c'est-à-dire la tangente commune des courbes Φ qui s'y touchent, devait coïncider avec la tangente de f; on reconnaît aisément, par la suite des développements du texte, qu'il se produirait alors sur F un point de rebroussement.

et l'élimination de x_1 entre ces dernières donne l'équation cherchée $F(y) = 0$, multipliée toutefois d'abord par un facteur superflu, car par une supputation directe on trouverait (t. II, p. 12 et suiv.) l'ordre ν de F plus grand qu'il ne peut être d'après les indications suivantes. Actuellement, nous pouvons considérer les équations (6) comme des équations en x_1 pour variable unique et dont le résultant F est nul, ayant conséquemment une racine commune. Or on peut calculer rationnellement cette dernière de la manière connue ([1]) sous la forme

$$\mu_1 x_1 = \mathfrak{X}_1(y_1, y_2, y_3),$$

où μ_1 est une fonction des y_i et de μ. On peut trouver semblablement x_2 et x_3 :

$$\mu_2 x_2 = \mathfrak{X}_2(y_1, y_2, y_3), \quad \mu_3 x_3 = \mathfrak{X}_3(y_1, y_2, y_3).$$

Il ne reste plus qu'à disposer ces équations, en ajoutant des facteurs convenables ou en chassant les facteurs étrangers, de telle manière que dans les premiers membres figure toujours, au lieu des quantités μ_i, *le même* facteur de proportionnalité; les équations (1) se trouvent par là établies d'une manière complète.

Dans la théorie des transformations unidéterminatives, une importance toute particulière s'attache au théorème établi par Riemann et dont nous avons plusieurs fois parlé et fait usage, théorème relatif *à la conservation du genre d'une courbe dans toutes les transformations unidéterminatives de cette dernière* (t. II, p. 86). Nous en avons déjà donné précédemment une démonstration en établissant, d'une manière générale, d'après la marche indiquée par Zeuthen, une relation entre les genres de deux courbes présentant entre elles une liaison à détermination multiple (t. II, p. 168). Mais nous avons alors supposé que les deux courbes avaient au plus des points doubles ou cuspidaux ordinaires, tandis que notre proposition est aussi applicable aux courbes à singularités quelconques. L'importance du théorème doit au surplus faire désirer une démonstration directe. D'autres démonstrations, en grand nombre, ont été données successivement;

([1]) *Voir*, par exemple, les *Leçons d'Algèbre supérieure* de SALMON, page 64 de la traduction française par BAZIN, ou page 84 de la 2e édition originale.

toutefois, nous n'en rapporterons que deux, et nous nous bornerons à renvoyer brièvement aux autres à la fin de cette Section.

Pour plus de simplicité, nous supposerons encore, pour commencer, que la courbe $f = 0$ ait d points doubles et r points de rebroussement, mais pas d'autres singularités. Les courbes $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ seront supposées de l'ordre s, et nous admettrons, pour raison de généralité, que toutes trois ont une série de points fixes en commun avec la courbe $f = 0$. Désignons par $\sigma + \tau$ le nombre de ces points communs, σ étant le nombre de ceux qui sont des points simples de $f = 0$, τ le nombre de ceux qui sont des points doubles ou cuspidaux de $f = 0$. Le nombre des points d'intersection mobiles d'une courbe du réseau (4) avec f, et par conséquent, d'après ce qui précède (p. 3), *l'ordre de* F, *est alors*

$$\nu = ns - \sigma - 2\tau,$$

n désignant l'ordre de $f = 0$. Or, parmi les courbes du réseau (4) qui passent par un point quelconque x sont comprises $2(\nu + p - 1)$ courbes rencontrant $f = 0$ en deux points voisins, savoir les $2(\nu + p - 1) - r$ courbes tangentes [1] et les r courbes du faisceau déterminé par le point x qui passent par les points de rebroussement. Mais à deux points voisins sur f correspondent évidemment deux points voisins sur F. Aux $2(\nu + p - 1)$ courbes précitées du faisceau correspondent donc sur le plan E_y autant de droites du faisceau de rayons passant par y, droites rencontrant F en deux points voisins si y répond au point x. D'autre part, le nombre de ces droites est donné par le nombre des tangentes menées de y à F et par le nombre des lignes joignant y aux points de rebroussement de F, c'est-à-dire qu'il est égal à $2(\nu + \pi - 1)$, π désignant le genre de F. Mais de l'égalité des deux nombres résulte en fait

$$p = \pi,$$

ce qu'il fallait démontrer [2].

---

[1] *Voir* t. II, p. 94, 171 et 187. On peut aisément, d'après la note de la page 171, former une courbe qui traverse ces points de contact sur f.

[2] Dans cette démonstration on regarde comme connue la proposition d'après laquelle, pour le nombre des courbes tangentes du réseau, on ne doit prendre en considération que les intersections *mobiles* des Φ_i avec f Nous ne démontrerons ce théo-

Nous donnerons ensuite une *démonstration algébrique directe* [1] du théorème de Riemann, en déterminant d'une façon précise le nombre des points multiples de la courbe F et en calculant ainsi le genre de cette dernière. Les moyens nécessaires pour réaliser cette démonstration ont été, au fond, déjà fournis par les considérations géométriques ci-dessus (p. 21 et suiv.), mais nous en reprendrons encore une fois partiellement le développement.

En même temps, nous généraliserons les hypothèses faites sur la nature de la courbe f, laquelle pourra posséder α_i points multiples d'ordre i, tous, du reste, à tangentes séparées; il pourra y avoir aussi r points de rebroussement. Le genre de f sera, par définition (t. II, p. 135 et suiv.), le nombre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_i \alpha_i i(i-1) - r. \tag{7}$$

Voyons d'abord comment les points singuliers de $f = 0$ se comportent dans la transformation. En posant $f = a_x^n$, on a, indépendamment des z, pour un point de f multiple d'ordre ρ,

$$a_x^{n-\rho+1} a_z^{\rho-1} \equiv 0, \tag{8}$$

et les ρ directions d'avancement partant de x sont déterminées par les équations

$$a_x^{n-\rho} a_{dx}^{\rho} = 0, \quad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0, \tag{9}$$

si $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1$ désigne, suivant ce que nous connais-

---

rème que plus tard, à l'aide de celui sur la conservation du genre, en prouvant que pour le nombre des coïncidences d'une correspondance il faut, d'une manière générale, avoir égard uniquement aux intersections mobiles. On s'assure facilement aussi de l'exactitude de cette affirmation dans le cas présent, car (t. II, p. 165) les points de contact des courbes Φ qui passent par x sont traversés par la courbe

$$(f\Phi_2\Phi_3)\Phi_1(x) + (f\Phi_3\Phi_1)\Phi_2(x) + (f\Phi_1\Phi_2)\Phi_3(x) = 0,$$

les déterminants fonctionnels étant supposés écrits par rapport aux variables y, ou bien, par exemple, si x est situé sur $\Phi_3 = 0$ et $\Phi_2 = 0$, par $(f\Phi_i\Phi_3) = 0$ (*voir* t. II, p. 171, note). Cette courbe coupe en effet f en $2(\nu + p - 1)$ points à employer, ainsi qu'on le reconnaît d'après les propositions de la page 101, t. II.

[1] Cette démonstration se rattache à celle donnée par CLEBSCH et GORDAN, *Theorie der Abelschen Functionen*, Leipzig, 1866, p. 54 et suiv.; c'est là que les transformations à détermination unique étudiées par Riemann ont été pour la première fois traitées géométriquement.

sons, l'identité qui existe entre les valeurs absolues des x_i (t. II, p. 154).

Actuellement, si l'on admet que les courbes $\Phi_i = 0$ ne passent pas toutes par x, et que, par suite, μ n'est pas nul pour le point x, au point x correspond sur F, en vertu de (2), un point complètement déterminé y, point qui est précisément multiple d'ordre ρ. Cette dernière conséquence résulte de ce que, en vertu des équations découlant de (2), savoir

$$(10) \qquad \mu . dy_i + y_i . d\mu = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3} dx_3,$$

à tout système de valeurs des dx_i répond un système de valeurs complètement déterminé des dy_i, tant que μ n'est pas nul, et le fait a lieu indépendamment de la question de savoir si les valeurs des dx_i qui se tirent de (9) sont différentes ou non les unes des autres, et dans le cas même où deux branches de f tangentes en x se confondraient encore dans les dérivées d'ordre supérieur. Nous avons, en conséquence, ce théorème (*voir* t. II, p. 207 et suiv.) :

A un point singulier de f par lequel ne passent pas à la fois toutes les courbes employées pour la transformation correspond sur F *un point singulier de même nature.*

Admettons maintenant que x soit un point fondamental de la transformation, c'est-à-dire que toutes les courbes du réseau (4) passent par x ; nous aurons simultanément

$$\Phi_1(x) = 0, \quad \Phi_2(x) = 0, \quad \Phi_3(x) = 0, \quad \mu = 0.$$

Alors, dans les premiers membres des équations (10), il ne reste plus que les expressions $y_i \, d\mu$, $d\mu$ étant différent de zéro, et, par conséquent, à chaque direction d'avancement dx sur f répond un point y sur F. Donc, à un point multiple d'ordre ρ, à tangentes séparées sur f, correspondent ρ points différents sur F ; *si en particulier x est un point de rebroussement de f, deux points voisins lui correspondront sur* F [1]. Les choses se passent tout à fait de

---

[1] *Voir* aussi la note de la page 6.

même si les courbes Φ_i ont toutes à la fois, en un point multiple d'ordre ρ pour f, un point multiple d'ordre $\varkappa$, par exemple. Si l'on suppose d'abord $\varkappa = 2$, les seconds membres des équations (10) s'annulent et il vient $d\mu = 0$. Par la différentiation de ces équations, nous trouvons ensuite, en posant $\Phi_i = \alpha_x^{(i)s}$,

$$(11) \qquad y_i d^2\mu = s(s-1)\,\alpha_x^{(i)s-2}\alpha_{dx}^{(i)2},$$

c'est-à-dire qu'à chaque direction d'avancement dx sur f correspond sur F un point y. Dans le cas de $\varkappa = 3$, il vient aussi, d'après (11), $d^2\mu = 0$, et nous obtenons, en différentiant encore une fois,

$$(11)^* \qquad y_i d^3\mu = s(s-1)(s-2)\,\alpha_x^{(i)s-3}\alpha_{dx}^{(i)3}, \quad \ldots.$$

On reconnaît ainsi, en concluant immédiatement de $\varkappa = \lambda$ à $\varkappa = \lambda + 1$, que notre affirmation est exacte. Donc :

Si les courbes $\Phi_i = 0$ *ont toutes ensemble en un point de* f, *multiple d'ordre* ρ *et à tangentes séparées, un point simple ou multiple, à ce dernier correspondent, sur* $F = 0$, ρ *points séparés* (*qui sont les points de rencontre avec* F *de la courbe fondamentale qui répond sur* E_y *au point multiple de* f *sur* E_x) (p. 5).

Nous appliquerons, ainsi qu'il suit, ce résultat au calcul du genre de F. Supposons que parmi les α_i points i^{iples} de f il y en ait α'_i par lesquels les courbes Φ ne passent pas et α''_i par lesquels ces courbes passent une ou plusieurs fois, en sorte que

$$(12) \qquad \alpha_i = \alpha'_i + \alpha''_i.$$

Dans le même sens, les r points de rebroussement seront supposés se partager en deux groupes respectivement de r' et r'' points, ces derniers étant des points multiples des Φ (*voir* p. 13).

Supposons maintenant que la courbe F ait β_i points multiples d'ordre i. Parmi eux figurent, d'après ce qui précède, α'_i points provenant des points multiples de f; les autres $\beta_i - \alpha'_i$ restants proviennent du rapprochement de points qui étaient séparés sur f. *Mais, en général, il ne se produira à nouveau sur* F *que des points doubles* (*ou cuspidaux*) *simples*, en sorte que, si γ désigne leur

nombre, on aura les relations suivantes :

$$(13)\qquad \gamma = \beta_2 - \alpha'_2,\quad \beta_3 = \alpha'_3,\quad \beta_4 = \alpha'_4,\quad \ldots .$$

Si, en effet, ρ points séparés sur f doivent se réunir pour former un point multiple d'ordre ρ sur F, et que $u_y = 0$, $v_y = 0$ soient deux rayons menés par ce dernier, chaque rayon $u_y + \lambda v_y = 0$ ne peut plus rencontrer la courbe qu'en $\nu - \rho$ points mobiles; par conséquent, les courbes du faisceau

$$u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 + \lambda(v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3) = 0$$

ne peuvent plus, elles aussi, rencontrer la courbe $f = 0$ qu'en $\nu - \rho$ points mobiles. Donc, tandis qu'en général une courbe du réseau (4) est déterminée par deux points, il faudrait alors que sur $f = 0$ on pût choisir ρ points tels que par eux passât un nombre infini de courbes du réseau. Il faudrait donc qu'il existât entre les courbes du réseau et la courbe $f = 0$ des relations particulières, car, dans un système doublement infini de courbes, ce qu'on peut demander au maximum, c'est, sur une série simplement infinie de points, d'en choisir deux tels que par eux passent un nombre infini de courbes du système (*voir* aussi t. II, p. 145). Nous supposerons donc d'abord que les équations (13) existent pour notre transformation. *Le genre de* $F = 0$ *est alors*

$$(14)\qquad \pi = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \frac{1}{2}\sum_i \alpha'_i i(i-1) - r' - \gamma.$$

Il nous reste à déterminer dans cette formule les nombres ν *et* γ. Pour simplifier les développements qui y conduisent, remarquons que nous pouvons toujours supposer les courbes Φ_i telles *que la multiplicité de leurs points communs situés en un point multiple d'ordre i pour* $f = 0$ *soit la même pour toutes les courbes du réseau en tous* [1] *les points* i^{iples} *de* $f = 0$. L'exactitude de nos considérations ne serait pas, en effet, détruite par une transformation linéaire des y; il ne s'agit donc pour notre objet que des points des courbes Φ_i qui sont également communs à *toutes* les

---

[1] Cette dernière convention ne fera qu'éviter dans ce qui suit l'écriture d'une double somme, tandis que la première est d'une importance capitale.

courbes du réseau (4). Si donc, par exemple, $\Phi_3 = 0$ devait avoir, en un point r^{iple} de $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ un point multiple d'ordre ρ, ρ étant plus grand que r, il suffirait de compter ce point simplement comme point multiple d'ordre r. Si d'ailleurs les courbes $\Phi_i = 0$ passent ρ fois par un point i^{iple} de $f = 0$, ρ' fois par un autre, ..., $\rho^{(k)}$ fois par le dernier (avec la condition $\rho < \rho' < \dots < \rho^{(k)}$), nous pouvons déterminer une courbe $\Psi = 0$ telle que les courbes $\Phi_1 \Psi = 0$, $\Phi_2 \Psi = 0$, $\Phi_3 \Psi = 0$ aient en tout point de f, multiple d'ordre i, un point multiple d'ordre $\rho^{(k)}$. Or, si nous ajoutons le facteur en question dans les seconds membres des équations (2), le résultat de la transformation ne sera pas modifié, l'opération n'ayant d'influence que sur le facteur M. Mais nous pouvons toujours imaginer que le facteur Ψ est déjà compris dans les Φ_i; notre proposition est ainsi démontrée exacte. Nous pouvons toujours admettre que *les courbes* Φ_i *aient en chacun des* α''_i *points multiples d'ordre* i *de* f *un point multiple d'ordre* r_i *et en chacun des* r'' *points cuspidaux de* f *un point multiple d'ordre* t *et qu'elles aient en outre* σ *intersections simples en* σ *points simples de* f. Alors le nombre des points d'intersection mobiles des Φ_i avec f, c'est-à-dire *l'ordre de* F, est

$$\nu = ns - \sigma - \sum_i \alpha''_i r_i i - 2tr'' \quad (15)$$ [1].

Pour déterminer enfin le nombre γ qui figure dans (14), nous avons à chercher une courbe qui découpe sur f tous les couples de points donnant lieu à des points doubles de F. Or une courbe de cette espèce nous est fournie, d'après ce qui précède, par $M = 0$

---

[1] Pour $f = a_x^m$, $y_i = u_i$, $\Phi_i = a_x^{m-1} a_i$, d'où $n = m$, $s = m - 1$, $\alpha_i = \alpha''_i$, $\alpha'_i = 0$, $r' = 0$, $r = r''$, $r_i = i - 1$, $\sigma = r$, $t = 1$ (cette dernière égalité parce que les courbes Φ touchent la courbe $f = 0$ au point de rebroussement), on déduit à nouveau de là la classe de la courbe primitive

$$\nu = m(m-1) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - 3r.$$

D'un autre côté, si l'on prend $f = (abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2}$ et encore $\Phi = a_x^{m-1} a_i$, $F = 0$ donne (t. II, p. 83) l'équation de la steinérienne en coordonnées-lignes, et par la formule (15) on trouve pour la classe de cette dernière, en observant que dans le cas actuel $\sigma = 2$ (parce que la hessienne a, comme on sait, un point triple en chaque point de rebroussement de $a_x^m = 0$),

$$\nu = 3(m-1)(m-2) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - 4r.$$

(p. 6 et suiv.); on peut aussi le reconnaître ainsi qu'il suit. Nous demandons combien de fois il peut arriver, en général, que les dérivées $\frac{\partial F(y)}{\partial y_i}$ s'évanouissent simultanément. Or on a, d'après (3) et (2),

$$\mu^\nu \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} = \sum_k \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \mu \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i},$$

car de (2) résulte, par exemple, pour $i = 1$,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} = \mu, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} = 0.$$

Si donc nous posons $\frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i} = F_i(\Phi)$, il vient

$$\mu^{\nu-1} F_i(y) = F_i(\Phi). \tag{16}$$

D'après cela, les dérivées $F_i(y)$ s'évanouissent toujours en même temps que les expressions $F_i(\Phi)$, à moins que toutes les quantités Φ_i (et par suite μ également) ne soient nulles ensemble. Dans ce dernier cas, les expressions $F_i(\Phi)$ s'évanouissent dans (16) à l'ordre $r_k(\nu - 1)$ pour un point multiple d'ordre r_k, et il en est de même de $\mu^{\nu-1}$; si donc nous connaissons les points x de f pour lesquels les $F_i(\Phi)$ s'annulent, nous n'avons à en séparer que les points communs aux Φ_i; les autres points restants déterminent des points x tels qu'ils se réunissent deux à deux en un point double de F.

En différentiant l'équation (3) suivant les quantités x_i, on en tire les trois équations

$$F_1(\Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + F_2(\Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + F_3(\Phi) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i} = M \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{17}$$

Premièrement donc les $F_i(\Phi)$ sont toujours nuls si les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ s'annulent, à moins que le déterminant fonctionnel des Φ_i, lequel sera désigné par (Φ_1, Φ_2, Φ_3), ne s'évanouisse; mais alors x est un point multiple de f, et nous avons déjà considéré les cas de ce genre.

Secondement, les $F_i(\Phi)$ sont toujours nuls si M s'annule, en exceptant de nouveau les points x de f pour lesquels le détermi-

nant fonctionnel (Φ_1, Φ_2, Φ_3) s'évanouit encore, et, en fait, la courbe $M = 0$ passe bien par les points d'intersection de $f = 0$ et de $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0$ (p. 4). Mais M est de l'ordre $\nu s - n$, (Φ_1, Φ_2, Φ_3) de l'ordre $3s - 3$; le nombre des points d'intersection utilisables pour nous de M avec f serait donc à première vue égal à

$$n(\nu s - n - 3s + 3). \tag{18}$$

De ce nombre nous avons, d'après (16), à retrancher les points situés aux points communs des courbes Φ_i. Or, M a en tout point σ un point multiple d'ordre $\nu - 1$ (p. 5) et en chacun des α''_i points i^{iples} de f un point multiple d'ordre $\nu r_i - i$. Par conséquent, aux points communs des Φ et de f sont situées

$$P = (\nu - 1)\sigma + \Sigma \alpha''_i i(\nu r_i - i) + 2r''(\nu t - 2)$$

intersections de M et de f. Mais aux mêmes points se trouvent aussi

$$Q = 2\sigma + \Sigma \alpha''_i i(3r_i - 1) + 2r''(3t - 1)$$

intersections de f et de (Φ_1, Φ_2, Φ_3), car en un point commun r^{iple} des Φ la jacobienne a un point multiple d'ordre $3r_i - 1$ (t. II, p. 104). Ces dernières sont déjà comprises parmi les $n(3s - 3)$ points qui ont été considérés dans le nombre (18). Nous avons donc à retrancher en tout de (18) le nombre

$$P - Q = (\nu - 3)\sigma + \Sigma \alpha''_i i[(\nu - 3)r_i - i + 1] + 2r''(t\nu - 3t - 1).$$

Le nombre des points d'intersection de M et de f utilisables pour nous est donc finalement égal à [1]

$$n(\nu s - n - 3s + 3) - (\nu - 3)(\sigma + 2r''t) - \Sigma \alpha''_i i[(\nu - 3)r_i - i + 1] + 2r''$$

---

[1] Observons que des relations tout à fait analogues à celles qui existent entre M, (Φ_1, Φ_2, Φ_3), f ont également lieu entre $F_1(\Phi)$, (Φ_2, Φ_3, f), f ou $F_2(\Phi)$, (Φ_3, Φ_1, f) ou $F_3(\Phi)$, (Φ_1, Φ_2, f), f, car des équations (17) résultent pour $f = 0$ les relations

$$F_1(\Phi) : F_2(\Phi) : F_3(\Phi) : -M = (\Phi_2, \Phi_3, f) : (\Phi_3, f, \Phi_1) : (\Phi_1, \Phi_2, f) : (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Nous pourrions donc, au lieu de M, prendre aussi pour base de nos considérations une des courbes $F_i(\Phi)$, comme l'ont fait effectivement Clebsch et Gordan (*loc. cit.*). On doit utiliser alors, au lieu des propositions sur le mode d'existence de (Φ_1, Φ_2, Φ_3) en un point commun des Φ, celles relatives au mode d'existence d'un déterminant (Φ_i, Φ_k, f) (t. II, p. 98 et suiv.). Nous apprendrons plus tard à déterminer ces points autrement. (*Voir* la Section sur les généralisations des formules de correspondance.)

ou, en vertu de (15), à

$$(\nu-1)(\nu-2)-(n-1)(n-2)+\Sigma\alpha''_i i(i-1)+2r''.$$

Pour chacun de ces points x, il y a évanouissement non seulement des fonctions $F_i(\Phi)$, mais encore des fonctions $F_i(y)$; deux d'entre eux donnent donc naissance à un point double ou à un point de rebroussement de F, c'est-à-dire que nous avons

$$(19)\quad \gamma=\tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha''_i i(i-1)+r''.$$

Si l'on porte ce résultat dans (14), il vient, en vertu de (12),

$$\begin{aligned}\pi&=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha'_i i(i-1)-\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha''_i i(i-1)-r'-r''\\&=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1)-r,\end{aligned}$$

ou enfin $\pi=p$. C. Q. F. D.

Le théorème sur la conservation du genre se trouve ainsi démontré pour les suppositions que nous avons faites. Nous avons admis qu'il n'y avait pas plus de deux points séparés de f se réunissant pour former un point multiple de F, mais qu'il y avait des points séparés de F auxquels correspondait un point multiple de f.

Or on peut aisément faire disparaître cette restriction. Si nous admettons d'abord que sur F de nouveaux points multiples prennent naissance par suite de la transformation (2), nous commencerons par remplacer cette dernière par cette autre,

$$\rho y_i=\Phi_i(x)+\varepsilon\Psi_i(x),$$

les fonctions Ψ_i étant du même ordre que les fonctions Φ_i, mais, du reste, complètement arbitraires. On peut donc ici choisir les Ψ_i de telle sorte que la transformation soit de nature entièrement générale, et que, par suite, la courbe F′ transformée de f n'acquière à nouveau que des points doubles simples. Actuellement, si l'on prend ε infiniment petit, F′ sera voisine de F, et il y a une partie des nouveaux points doubles de f ayant, les uns par rapport aux autres, une situation telle que pour $\varepsilon=0$ ils se réunissent par groupes, de manière à former de nouveaux points doubles de F. Mais, comme notre théorème a lieu pour F′ et que le genre de F concorde avec le genre de F′, la proposition a lieu également pour

la transformation de F en f, et nous avons par là démontré le théorème suivant :

Si deux courbes qui possèdent des points multiples à tangentes non confondues et des points de rebroussement séparés ont entre elles une relation à détermination unique, ces courbes appartiennent au même genre (¹).

Une étude directe des cas où il n'est fait sur les points multiples de $f = 0$ et $F = 0$ aucune hypothèse de nature à simplifier présente quelques difficultés; mais on peut se tirer de ces cas en définissant le genre comme nous l'avons fait plus haut, à l'occasion d'une application des transformations Cremona (²). Nous commencerons par changer comme alors, au moyen de transformations Cremona, les courbes f et F en des courbes C et C' qui ne possèdent que des points multiples ordinaires et dont les genres p et π concordent par définition avec les genres de f et F. Si maintenant les courbes f et F sont liées unidéterminativement l'une à l'autre, il en est de même de C et C'; *par conséquent, d'après ce qui précède,* $p = \pi$.

Nous passons à quelques *applications des méthodes mentionnées ici.*

Dans l'étude des systèmes de points sur une courbe algébrique (t. II, p. 136 et suiv.), nous avons vu qu'il est particulièrement important de considérer les groupes de points qui sont découpés par des *courbes adjointes,* c'est-à-dire par des courbes qui passent $i - 1$ fois par tout point i^{iple} de f, et parmi ces courbes adjointes nous avons dû signaler celles d'ordre $n - 3$. Au moyen des développements actuels, cette importance remarquable des courbes adjointes peut encore se reconnaître d'une autre manière.

Soit $\Theta(y) = 0$ une courbe C_μ adjointe à $F(y)$, et supposons

---

(¹) Mais, à l'inverse, deux courbes de même genre ne sont pas toujours transformables unidéterminativement l'une en l'autre, et, pour qu'il en soit ainsi, il faut l'égalité de certains nombres (appelés *modules*) qui correspondent aux invariants absolus des transformations linéaires. (*Voir* sur ce sujet les deux Sections suivantes.)

(²) T. II, p. 217. Il est à remarquer que les recherches de M. Halphen, citées p. 216, ont été publiées avec plus de détails dans les *Mémoires des Savants étrangers*, t. XXVI. (*Voir* aussi du même auteur : *Sur le genre des courbes algébriques*. Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Nantes, 1875).

que $\mathfrak{S}(x)=0$ soit une courbe qui découpe sur $f(x)=0$ les groupes de points répondant aux points d'intersection de Θ et de F en vertu de la transformation (2), et qui ne rencontre plus la courbe f qu'aux points singuliers (les circonstances de ces rencontres restant à déterminer). Alors doit exister en tous les cas une équation de la forme

$$A\Theta(\Phi)\equiv B\mathfrak{S}(x)+Cf(x).$$

Or, par hypothèse, $\Theta(y)=0$ passe par tous les points doubles de F; par conséquent, $\Theta(\Phi)=0$ passe par tous les couples de points de f dont dérivent les points doubles en question de F. Donc $B=0$ doit passer le même nombre de fois par ces points, car, par hypothèse, $\mathfrak{S}=0$ ne les renferme point. Nous pouvons, par suite, substituer à B la fonction précédemment désignée par M, à la condition de déterminer en même temps, d'une manière convenable, le mode d'existence de A, $\mathfrak{S}$ et C aux points singuliers de F. Mais la courbe $M=0$ passe non seulement par les couples précités et par les points singuliers de f, mais encore par les points d'intersection de f avec la jacobienne des courbes Φ; conséquemment, A passera également par les mêmes points. Pour cette raison, nous poserons directement $A=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$. Alors la multiplicité du produit $A\Theta(\Phi)$ en tout point i^{iple} de f (par lequel les courbes Φ passent r_i fois) est, d'après des propositions précédentes, égale à μr_i+3r_i-1; d'autre part, la multiplicité de $B(=M)$ est égale à νr_i-i; l'équation précédente sera donc toujours possible, en supposant que l'on puisse attribuer à la courbe $\mathfrak{S}=0$ en tout point i^{iple} de f un point multiple d'ordre $(\mu-\nu+3)r_i+i-1$. Il s'agit donc de montrer que cette possibilité existe toujours, c'est-à-dire que l'on peut toujours déterminer une courbe $\mathfrak{S}$ d'ordre convenable, suivant la manière indiquée.

Les ordres de A, B, Θ et Φ_i étant connus, l'ordre x de $\mathfrak{S}$ est facile à déterminer; on trouve

$$(20)\qquad x=3s-3+\mu s-\nu s+n=s(\mu-\nu+3)+n-3.$$

Nous supposerons, pour plus de simplicité, $r=r'=r''=0$, et nous désignerons la multiplicité de $\mathfrak{S}$ en un point i^{iple} de f par y_i, en sorte que

$$(21)\qquad y_i=(\mu-\nu+3)r_i+i-1.$$

Le nombre des coefficients à déterminer dans $\mathfrak{S}$ sera égal à $\frac{1}{2}x(x+3)$. La courbe $\mathfrak{S}$ doit passer par les $\mu\nu - 2\gamma - \Sigma\alpha'_i i(i-1)$ points qui correspondent sur f aux intersections de Θ et de F non situées aux points singuliers de F. Le nombre total des conditions données pour les coefficients de $\mathfrak{S}$ est donc, en tenant compte de ce que (pour $\mu > \nu - 3$) p de ces derniers points se déterminent au moyen des autres, égal, en vertu de (19) et (15), à

$$\begin{aligned}
&\mu\nu - 2\gamma - \Sigma\alpha'_i i(i-1) - p + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1)\\
&\quad = \mu\nu - (\nu-1)(\nu-2) + p + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1)\\
&\quad = \mu(ns - \sigma - \Sigma\alpha''_i r_i i) - (\nu-1)(\nu-2) + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1) + p.
\end{aligned}$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que ce nombre, lorsque μ augmente, *croît toujours plus lentement que le nombre* $\frac{1}{2}x(x+3)$. Si nous posons en effet $\mu+1$ à la place de μ, ce dernier, d'après (20), augmente de

$$z = \tfrac{1}{2}s(s+2x+3),$$

et le premier, d'autre part, de

$$t = \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha''_i r_i(r_i + 2y_i + 1) + ns - \sigma - \Sigma\alpha''_i r_i i.$$

Nous pouvons, en général, supposer les courbes Φ non décomposables, car, si Φ_1, Φ_2, Φ_3 se décomposaient individuellement en facteurs, il n'en serait néanmoins pas ainsi pour une courbe quelconque du réseau des Φ (¹); nous avons par suite, puisqu'il existe un nombre doublement infini de courbes Φ dans le réseau, les nouvelles relations

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2) \geqq \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha''_i r_i(r_i - 1), \quad \tfrac{1}{2}s(s+3) \geqq \Sigma\alpha''_i r_i(r_i+1) + \sigma + 2,$$

et l'on déduit de là, par combinaison, en observant que la différence positive des deux membres de la première inégalité est plus petite que celle des deux membres de la seconde,

$$(22) \qquad s^2 \geqq \Sigma\alpha''_i r_i^2 + \sigma + 1, \quad 3s \geqq \Sigma\alpha''_i r_i + \sigma + 3.$$

Par conséquent, le premier et le troisième terme de z sont sépa-

---

(¹) Si précédemment (p. 13) nous avons attribué occasionnellement un facteur commun à toutes les fonctions Φ, ce n'était que pour simplifier et à cause du but que nous nous proposions alors.

rément plus grands que le premier et le troisième terme de t, c'est-à-dire que les sommes $\frac{1}{2}\Sigma\alpha''_i r_i^2$ et $\frac{1}{2}\Sigma\alpha''_i r_i$. Mais le second terme de z est également plus grand que la somme des autres termes de t (ou égal à cette somme), c'est-à-dire qu'on a, en vertu de (20) et (21),

$$s^2(\mu-\nu+3)+s(n-3)\geqq(\mu-\nu+3)\Sigma\alpha''_i r_i^2+ns-\sigma-\Sigma\alpha''_i r_i.$$

Ici, en effet, le coefficient de $\mu-\nu+3$ dans le premier membre est, en vertu de (22), plus grand que dans le second membre; le terme ns se présente de la même façon dans les deux, et pour les autres termes on a à faire de nouveau usage de l'équation (22). Notre affirmation précédente est donc démontrée.

Nous montrerons encore incessamment que les conditions établies pour ϑ sont toujours réalisables si $\mu=\nu-3$, et qu'elles le sont conséquemment, en vertu de la proposition que nous venons de démontrer, pour $\mu>\nu-3$. C. Q. F. D.

Les cas où μ est $<\nu-3$ se résolvent d'après cela très facilement; il suffit de prendre z et t négatifs. Nous pouvons donc finalement énoncer le théorème suivant :

Le système des points d'intersection avec F *d'une courbe* Θ *du* $\mu^{\text{ième}}$ *ordre adjointe à* F *devient, dans la transformation unidéterminative de* F *en* f, *le système des points d'intersection d'une courbe* ϑ *adjointe de* f, *courbe de l'ordre* $s(\mu-\nu+3)+n-3$, s *désignant l'ordre des courbes de transformation* Φ_i *dans* (2), ν *celui de* F, n *celui de* f. *Mais, parmi les points d'intersection de la courbe* ϑ *avec* f, *il y en a un plus grand nombre tombant aux points multiples de* f *qui ne se rencontrent pas dans* F *qu'il ne serait nécessaire pour une courbe quelconque adjointe à* f; *et, pour préciser, le nombre des intersections de* f *et de* ϑ *non situées aux points singuliers est égal au nombre des intersections correspondantes de* F *et de* Θ. *On a d'ailleurs la relation*

$$(23)\qquad (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)\,\Theta(\Phi_i)=\mathrm{M}\,\vartheta(x)+\mathrm{C}f,$$

où la fonction M *est définie par* (3) *et les fonctions* Φ_i *sont définies par* (2).

Nous avons encore maintenant à démontrer la dernière équation pour le cas de $\mu=n-3$. Parmi les $2p-2$ points d'inter-

section de la courbe Θ avec F non situés aux points singuliers de F, $p-1$ sont, comme on sait (t. II, p. 140), déterminés par les autres (p désignant encore ici le genre de F et f). Il s'agit donc, puisque l'ordre x de $\mathfrak{S}$ est actuellement égal à $n-3$ et que l'on trouve $y_i = i-1$, de montrer que par les $p-1$ points correspondants sur f on peut toujours faire passer une courbe du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre adjointe à f, c'est-à-dire que

$$\tfrac{1}{2}n(n-3) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1) - p + 1 \geqq 0:$$

Mais cette condition est toujours remplie, car le nombre qui figure dans le premier membre devient précisément égal à zéro. Pour $\mu = \nu - 3$, nous avons donc en particulier l'important théorème qui suit :

Par suite d'une transformation à détermination unique qui change une courbe d'ordre n en une courbe d'ordre ν, le système des points d'intersection d'une courbe du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre adjointe à la première se transforme dans le système des points d'intersection d'une courbe du $(\nu-3)^{\text{ième}}$ ordre adjointe à la seconde. *Les recherches que nous ferons plus tard sur les groupes de points qui sont découpés sur une courbe d'ordre n par des courbes adjointes d'ordre* $n-3$ *conservent donc, sans modification, leur valeur dans une transformation unidéterminative quelconque de la courbe de départ.*

D'après le compte que nous venons de faire, il y a toujours, pour une courbe adjointe C_{n-3}, $\frac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1)$ conditions données par l'assujettissement à être une courbe adjointe. *Il existe donc un nombre* $[\frac{1}{2}n(n-3) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1) = p-1]$ *fois infini de courbes adjointes* C_{n-3}, en supposant que les conditions en question soient indépendantes les unes des autres. Or c'est toujours le cas, car nous sommes arrivés précédemment au même résultat par voie générale, lorsque nous avons démontré (en suivant la marche de Brill et Nöther) que le nombre des courbes C_{n-3} linéairement indépendantes les unes des autres ne peut non plus jamais être plus grand que p (t. II, p. 146). Si nous supposons, d'un autre côté, que le nombre p des courbes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre indépendantes les unes des autres ait déjà été déterminé de cette

manière, on en pourrait déduire une nouvelle démonstration de la conservation du nombre p [1], en admettant que l'on ait prouvé d'une autre manière l'identité (23) pour les courbes d'ordre $n-3$; nous, au contraire, nous avons employé le théorème dont il s'agit à prouver précisément l'identité (23).

Remarquons enfin que ces considérations restent encore complètement vraies si la courbe primitive possède des points singuliers de nature compliquée. Cela est évident quand on définit une courbe adjointe à une telle courbe primitive f par cette propriété qu'elle doit se changer, par une transformation Cremona, en une courbe adjointe à f', cette dernière étant déduite de f par la même transformation Cremona, et n'ayant que des points multiples ordinaires (t. II, p. 215). Quant aux propriétés caractéristiques d'une courbe adjointe, on peut dire, pour abréger, qu'elle doit se comporter, dans les points multiples individuels qui se réunissent pour former une singularité élevée, comme devrait le faire une courbe adjointe si les points multiples avaient une situation séparée. D'autre part, les points de ramification qui interviennent restent sans influence sur le mode d'existence d'une courbe adjointe, ainsi qu'on le sait pour le point de rebroussement. Une telle courbe possédera donc en tout point j^{iple} de f un point $(j-1)^{\text{iple}}$; si un point i^{iple} de la courbe primitive y est réuni au premier, il s'y trouvera encore un point $(i-1)^{\text{iple}}$ de la courbe adjointe, etc. Dans un point de contact de la courbe avec elle-même (lequel équivaut à deux points doubles voisins), la tangente commune des deux branches de la courbe primitive sera nécessairement, d'après cela, tangente de la courbe adjointe; de même en un point de rebroussement de seconde espèce (équivalent à un point double et un point de rebroussement) [2], et ainsi de suite.

Les courbes adjointes étant ainsi définies, on voit immédiatement que *le théorème du reste et toutes les propositions qui s'y*

---

(1) C'est là-dessus que repose la démonstration donnée dans Clebsch et Gordan (*loc. cit.*, § 14, p. 50 et suiv.) du théorème de Riemann dont nous nous occupons; mais la preuve de l'identité (23) donnée dans ce passage n'est pas suffisante pour tous les cas, parce qu'il n'a pas été tenu compte des relations qui peuvent exister entre les points doubles (seuls considérés à l'endroit dont nous parlons) ainsi qu'entre les points multiples.

(2) *Voir* Salmon, *Higher plane curves*, 2e édition, art. 58.

rattachent relativement aux systèmes de points conservent toute leur portée, sans aucune restriction (t. II, p. 161 et suiv.). Un fait analogue a également lieu pour les considérations suivantes, ce que nous nous dispenserons quelquefois de rappeler.

Le résultat de ces remarques sur les courbes adjointes peut encore s'énoncer sous une forme différente et très importante pour les applications que nous pourrons avoir à en faire plus tard. Nous avons vu précédemment que l'influence d'un point singulier sur la classe de la courbe primitive est la même que l'influence des différents points multiples qui s'y trouvent réunis; on doit seulement diminuer encore la classe d'une unité pour chaque point de ramification qui se présente. Actuellement, comme un point multiple d'ordre i entraîne sur la classe une réduction égale à $i(i-1)$, et que d'ailleurs cette dernière elle-même est égale au nombre des points d'intersection de la courbe primitive avec une quelconque de ses premières polaires non situés aux points singuliers, nous pouvons énoncer notre détermination des courbes adjointes de la manière suivante :

Une courbe adjointe à f aura en tout point singulier P *de f le même nombre de points d'intersection avec f que la première polaire d'un point quelconque relativement à f, si l'on retranche de ce nombre le nombre des points de ramification situés en* P.

Nous nous proposons d'utiliser encore la théorie des transformations à détermination unique pour écarter une restriction qui a été faite dans la démonstration de l'extension du principe de correspondance (t. II, p. 163) [1]. Nous nous sommes toujours figuré une correspondance sur $f=0$ comme déterminée par une équation $\varphi(x,y)=0$, laquelle a été supposée homogène du $r^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux quantités x_i et du $s^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux quantités y_i. Dans les démonstrations, nous avons constamment admis que les courbes $\varphi=0$ répondant à un point x ou y n'avaient pas toutes les mêmes points *fixes* communs avec $f=0$.

---

[1] L'auteur (M. Lindemann) doit les considérations suivantes à une communication de M. Brill. *Voir*, à ce sujet, le Mémoire de ce dernier sur la formule de correspondance (*Math. Annalen*, t. VII, p. 616 et suiv.),

Actuellement, pour fixer aussi l'influence de ces *points exceptionnels de la correspondance* φ sur le nombre des coïncidences *proprement dites* qui ne tombent point en ces points exceptionnels ou aux points singuliers de f, nous procéderons de la manière suivante :

Soit sur la courbe primitive f dépourvue de points doubles une correspondance $(\alpha, \beta)_\gamma$ sans points exceptionnels de l'espèce citée, correspondance donnée par une équation $\varphi(x,y) = 0$; le nombre de ses coïncidences proprement dites sera

$$C = \alpha + \beta + 2\gamma p = nr - \gamma + ns - \gamma + 2\gamma p,$$

r, s, α, β, γ ayant les significations précédentes. Imaginons maintenant que la courbe f subisse, en même temps que la correspondance φ, une transformation à détermination unique, telle que $f = 0$ se change en $F = 0$, $\varphi = 0$ en $\Phi = 0$. Dans cette circonstance, les nombres γ, C, p sont conservés, ainsi qu'il résulte de la notion de la détermination unique. Les nr ou ns intersections mobiles qui répondent à un point quelconque de f, et parmi lesquelles γ sont situées en ce dernier point lui-même, ne formeront en général sur f, après la transformation, un système complet d'intersections que si on leur adjoint un certain nombre de points *fixes* de la nouvelle courbe F, points signalés précisément comme points exceptionnels de la correspondance Φ. En ces points exceptionnels tomberont alors un certain nombre (U) de coïncidences *improprement dites* (de la détermination desquelles nous nous occuperons spécialement), tandis que C coïncidences proprement dites seront encore situées *en dehors* des points exceptionnels. L'ensemble des coïncidences proprement dites et improprement dites formera, comme précédemment, un système complet de points d'intersection ou, en d'autres termes, sera traversé par une *courbe de coïncidence* (t. II, p. 161 et suiv.); nous avons donc à éclaircir *la question du nombre* U *des intersections de cette dernière avec* F *qui sont situées en des points exceptionnels de la correspondance* Φ.

Les coefficients de l'équation de cette courbe de coïncidence dépendent des coefficients des équations $F = 0$ et $\Phi = 0$, et leur ordre est le même que s'il n'existait ni points exceptionnels de Φ ni points singuliers de F, car on peut faire disparaître ou naître

ces derniers d'une manière quelconque par modification continue des coefficients de F et de Φ. Or, si r', s' sont les ordres des courbes qui répondent respectivement en vertu de $\Phi = 0$ à un point y ou x de F, l'ordre de la courbe de coïncidence est égal à $r' + s' + \gamma(\nu - 3)$. Actuellement, admettons que F ait $d' + d''$ points doubles, que σ' points d'intersection avec F des courbes $\Phi = 0$ répondant à un point y de F tombent en chacun des d' points doubles, que ces courbes passent encore en outre chacune σ fois par e points fixes de F, et qu'enfin τ', τ soient les nombres correspondants pour les courbes $\Phi = 0$ qui répondent à un point x de F [1]; nous avons, pour le nombre des intersections mobiles de F avec les courbes Φ, les valeurs

$$\alpha = nr - \gamma = \nu r' - \gamma - e\sigma - d'\sigma',$$
$$\beta = ns - \gamma = \nu s' - \gamma - e\tau - d'\tau',$$

et l'on doit avoir la relation

$$U + (r'\nu - \gamma - e\sigma - d'\sigma') + (s'\nu - \gamma - e\tau - d'\tau')$$
$$+ \gamma[(\nu - 1)(\nu - 2) - 2d' - 2d''] = \nu[r' + s' + \gamma(\nu - 3)].$$

De là résulte immédiatement la valeur de U,

$$U = e(\sigma + \tau) + d'(\sigma' + \tau' + 2\gamma) + 2\gamma d''.$$

Donc sont absorbées (ce qui concorde avec les indications données à une occasion précédente, t. II, p. 163 et suiv.) :

En chacun des e points simples, $\sigma + \tau$ *coïncidences improprement dites;*

En chacun des d' points doubles, $\sigma' + \tau' + 2\gamma$ *coïncidences improprement dites;*

En chacun des d'' points doubles, 2γ *coïncidences improprement dites.*

En conséquence, si U désigne le nombre total des coïncidences improprement dites, C le nombre total des coïncidences proprement dites d'une correspondance $(\alpha, \beta)_\gamma$ à points fixes quelconques, et que Π soit l'ordre de la courbe qui traverse ces coïncidences,

---

(1) Il est facile d'apercevoir comment les choses se passent si les courbes Φ se comportent différemment aux divers points doubles d' de F. Les nombres σ et τ ne sont au surplus pas toujours indépendants les uns des autres. *Voir* t. II, p. 164.

n l'ordre de la courbe primitive, p son genre, on a la relation

$$n\text{II} - \text{U} = \text{C}(= \alpha + \beta + 2p\gamma).$$

Le nombre total des coïncidences proprement dites *se détermine donc précisément comme s'il n'existait pas de points exceptionnels pour la correspondance* ([1]). Nous considérerons comme exemple la correspondance déterminée sur $f \equiv a_x^n = 0$ par l'équation $a_x^{n-1} a_y = 0$. Il nous faut poser dans les formules précédentes

$$r' = n - 1, \quad s' = 1, \quad \gamma = 2, \quad \sigma' = 2, \quad d' = d, \quad \sigma = \tau = \tau' = d' = e = 0;$$

d'où

$$\alpha = n(n-1) - 2 - 2d, \quad \beta = n - 2.$$

Pour le nombre des coïncidences proprement dites, c'est-à-dire pour le nombre des points d'inflexion, on obtient ainsi le résultat connu

$$\text{C} = 3n(n-2) - 6d,$$

et en tout point double de f sont situées $\sigma' + \tau' + 2\gamma = 6$ coïncidences improprement dites, ce qui concorde avec des propositions précédentes sur le mode d'existence de la hessienne (ici courbe de coïncidence, t. II, p. 28).

Par ces considérations se trouvent démontrés les théorèmes provisoirement donnés plus haut (t. II, p. 163), et conséquemment aussi les nombreuses applications qui s'y rattachent, et en particulier les formules de contact des pages 171 et 188 (*ibid.*). L'influence des points fixes sur les correspondances à points de valeurs multiples (*ibid.*, p. 172) se déterminera enfin absolument de la même manière. On peut, d'ailleurs, étendre aux courbes à singularités quelconques ces réflexions et les précédentes relatives à la formule de correspondance, si l'on imagine que les singularités

---

([1]) La circonstance que la démonstration précédente s'applique uniquement à des correspondances pouvant être déduites, par transformation unidéterminative, de correspondances sans points fixes, ne doit pas être prise en considération, car il s'agit seulement de déterminer l'influence de chaque point fixe en particulier, et cette influence ne dépend que du mode d'existence de la courbe primitive $f = 0$, ainsi que des courbes de correspondance $\varphi = 0$ dans le voisinage immédiat de ce point, mais non des autres propriétés de la courbe primitive, comme l'ordre, le genre, etc., non plus que de ses autres particularités par rapport à la correspondance.

dont il s'agit aient été résolues de la manière connue. Demandent seuls des éclaircissements spéciaux les cas dans lesquels des points de ramification se sont joints à des points multiples de la courbe primitive (t. II, p. 214), quelques-unes des coïncidences proprement dites pouvant tomber en ces derniers [1].

Nous donnerons, pour terminer, un aperçu des démonstrations du théorème de Riemann, sur la conservation du genre. Nous avons précédemment étudié les suivantes :

1° *Démonstration de Zeuthen,* où le théorème est conclu d'une relation plus générale [2] entre les nombres qui expriment les genres de deux courbes liées par une relation à détermination multiple (t. II, p. 168).

2° *Démonstration à l'aide du nombre donné pour les courbes tangentes d'un faisceau* (p. 8).

3° *Démonstration algébrique directe* (p. 9 et suiv.).

Dans cette dernière, nous avons tenu compte en détail de tous les points multiples de f. Pour ces points, les démonstrations 1° et 2°, ainsi que celles qu'il nous reste à citer, ont besoin d'un plus ample développement (en ce qui concerne au moins les expositions usuelles), développement qui, du reste, ne se heurte pas à des difficultés de premier ordre.

Nous mentionnerons encore les démonstrations suivantes, qui font en partie usage d'autres méthodes et d'autres notions que celles employées par nous jusqu'ici pour traiter les questions algébriques.

4° *Démonstration originaire de Riemann* [3]. A une équation algébrique $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ou en coordonnées rectangulaires $F(x, y) = 0$ répond, comme on le sait, ce qu'on appelle une *sur-*

---

[1] Comparez ce qui a été dit t. II, p. 166 et 186 sur l'influence des points de rebroussement.

[2] Cette relation, d'après le raisonnement dont elle a été déduite précédemment, n'aurait lieu qu'au cas où la relation mutuelle des deux courbes est établie par des systèmes d'intersections complets (t. II, p. 153, note); mais il ressort de la démonstration donnée par Zeuthen qu'elle reste encore vraie pour les autres cas. Le premier cas entre seul en considération dans le texte.

[3] *Theorie der Abel'schen Functionen*, § 11 (*Journal de Crelle*, t. 54).

face de Riemann, dont la *connexité* est par définition égale à $2p+1$, c'est-à-dire qui peut être décomposée par $2p$ *sections transverses* en une surface simplement connexe, p désignant le genre de F. Maintenant, si deux courbes F et F′ sont liées unidéterminativement l'une à l'autre, il en est de même des surfaces de Riemann correspondantes. La connexité, d'après sa notion, est alors la même pour les deux surfaces, c'est-à-dire égale à $2p+1$; de là résulte immédiatement l'égalité du genre. Faisons observer que la construction de la surface de Riemann, répondant à F en tant que y est considéré comme fonction de x, dépend d'abord du système de coordonnées choisi. Il est donc plus conforme aux notions fondamentales de la Géométrie projective de considérer, comme l'a fait Klein, les variables x_1, x_2, x_3 dans l'équation $f=0$ comme des coordonnées-lignes, et de rattacher alors directement à la courbe réciproque $f=0$ (sans égard à un système particulier de coordonnées) la construction d'une surface à plusieurs feuilles couvrant le plan, ainsi que nous l'avons décrit précédemment (t. II, p. 369). Cette surface fournit, pour les fonctions dont l'irrationnalité est donnée par $F=0$, les mêmes ressources que celle de Riemann; on peut, en particulier, l'employer pour démontrer le théorème de la conservation du genre ([1]). Toutefois, un développement détaillé de la suite des idées relatives à ce sujet nous conduirait trop loin. Observons seulement que la relation respective des deux surfaces de l'espèce citée en dernier lieu n'est pas à détermination unique pour *tous* leurs points, si les courbes auxquelles elles correspondent sont rapportées unidéterminativement l'une à l'autre, mais que, au contraire, il se présente en général sur chaque surface des *points fondamentaux,* c'est-à-dire des points auxquels correspond une courbe entière de l'autre surface. A la place du théorème sur l'égalité de la connexité de deux surfaces rapportées unidéterminativement l'une à l'autre, on a donc à employer une relation qui existe entre les nombres de connexité des deux surfaces et entre les nombres des points fondamentaux qui se rencontrent de part et d'autre ([2]).

([1]) *Voir* Klein, *Sitzungsberichte der phys. med. Societät zu Erlangen,* 11 mai 1874.

([2]) *Voir* Klein, *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* (*Math. Annalen,* t. VII, p. 549).

5° *Démonstration de Cremona* [1]. Cette dernière fait usage des représentations de la Géométrie de l'espace. Imaginons que les deux courbes considérées f et f' soient situées sur les deux plans différents E et E′ et que n, d, r et ν, δ, ρ respectivement soient leurs nombres caractéristiques. Les lignes qui joignent les points correspondants formeront une surface réglée de l'ordre $n+\nu$. Cette surface sera coupée par le plan E′, suivant la courbe f' et suivant une autre courbe de l'ordre n composée des lignes joignant les n points d'intersection de E′ et f aux points correspondants de f'. Le plan E′ renferme d'après cela n lignes de la surface, et doit par suite toucher cette dernière en n points placés respectivement sur ces lignes. Abstraction faite de ces points de contact, la section E′ de la surface possède

$$n\nu + \tfrac{1}{2}n(n-1) + \delta + \rho - n = n\nu + \tfrac{1}{2}n(n-3) + \delta + \rho$$

points doubles, et avec ce nombre on a l'ordre de la courbe double de notre surface réglée, lequel est, par suite, égal au nombre correspondant obtenu par la considération du plan E, c'est-à-dire égal au nombre

$$n\nu + \tfrac{1}{2}\nu(\nu-3) + d + r,$$

et de là résulte $p = \pi$.

6° *Démonstration de Bertini* [1]. Joignons les points x de f à un point *fixe* a et les points correspondants y de F à un autre point fixe b. A toute ligne passant par a répondront n lignes passant par b, et le point de rencontre ξ de deux lignes correspondantes décrira une nouvelle courbe X, qui est liée par une relation unidéterminative aussi bien à f qu'à F. Notre construction donne

---

[1] Voir *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (*Mémoires de l'Académie de Bologne*, 2e série, t. VI et VII), p. 54 dans la traduction allemande de CURTZE, Berlin, 1870.

[2] Voir *Journal de Battaglini*, t. VII, ainsi que SALMON, *Higher plane curves*, 2e édition, p. 314, et ZEUTHEN, *Math. Annalen*, t. I, p. 150, et t. III, *loc. cit.* Une marche de démonstration analogue, mais un peu différente quant à la forme et quant à l'ordre, se trouve dans Voss : *Göttinger Nachrichten*, 1873. Les calculs y sont effectués à l'aide du principe de correspondance de Chasles. La démonstration a été formulée algébriquement par CLEBSCH; *voir*, sur ce point, NÖTHER, *Math. Annalen*, t. VIII, p. 497.

pour les coordonnées de ξ les valeurs

$$\rho\xi_i = (xab)y_i - (xay)b_i,$$

ou, en supposant encore la relation entre f et F établie au moyen des équations $\mu y_i = \Phi_i(x)$,

$$\sigma\xi_i = (xab)\Phi_i - (xa\Phi)b_i.$$

Prenons maintenant a et b pour sommets du triangle des coordonnées (et supposons qu'ils ne soient situés ni sur f ni sur F), c'est-à-dire posons $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$; il vient

$$\text{(I)} \qquad \sigma\xi_1 = x_1\Phi_1(x), \quad \sigma\xi_2 = x_1\Phi_2(x), \quad \sigma\xi_3 = x_3\Phi_1(x).$$

Admettons que les courbes Φ coupent la courbe f en ν points mobiles, en sorte que ν soit l'ordre de F. Les courbes de transformation de la transformation représentée par (I), c'est-à-dire les courbes du réseau

$$u_1x_1\Phi_1(x) + u_2x_1\Phi_2(x) + u_3x_3\Phi_1(x) = 0,$$

coupent la courbe f en $\nu + n$ points mobiles, *et par suite* X *est de l'ordre* $\nu + n$. Mais les lignes du faisceau $\xi_1 + \lambda\xi_3 = 0$ coupent X seulement en n points mobiles, car les lignes du faisceau $x_1 + \lambda x_3 = 0$ leur correspondent (le facteur Φ se séparant). La courbe X a donc au point a (c'est-à-dire au point $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$) un point multiple d'ordre ν. De ce dernier, on peut encore mener $\varkappa - 2\nu$ tangentes à la courbe X [1], $\varkappa$ désignant la classe de X. Si ensuite χ est le genre de cette dernière courbe, nous avons, d'après les formules de Plücker,

$$\varkappa - 2\nu = 2\chi - 2 + 2(n + \nu) - 2\nu.$$

Tel doit être également le nombre des lignes correspondantes du faisceau $x_1 + \lambda x_3 = 0$ qui touchent f, c'est-à-dire le nombre

$$k + r = 2p - 2 + 2n,$$

et de là résulte $p = \chi$. Nous pouvons de même considérer la

---

(1) Il faut compter avec ces dernières les lignes joignant a aux points de rebroussement qui peuvent exister dans X (p. 8).

relation entre les courbes F et X; nous obtiendrons par là le résultat $\pi = \chi$, π étant le genre de F, et conséquemment on en a fait $p = \pi$. La simplicité de cete démonstration repose sur l'introduction de la courbe auxiliaire X.

7° *Démonstration de Brill et Nöther.* Sur toute courbe C_n du genre p il existe un ensemble $p-1$ fois infini de systèmes de points qui sont découpés par des courbes adjointes C_{n-3}, théorème que nous avons reconnu précédemment être une conséquence d'un autre théorème sur les systèmes d'intersections de courbes adjointes d'ordre $n-3$ (t. II, p. 147). Nous utiliserons ici le premier et le second théorème. Prenons arbitrairement sur f un groupe G_π de π points résiduel avec un autre groupe G_ρ, π désignant encore le genre de F. Si π était $> p$, il y aurait au moins un nombre $\pi - p$ infini d'autres groupes de π points chacun qui seraient de même résiduels par rapport à G_ρ, c'est-à-dire qui seraient corésiduels de G_π (t. II, p. 138). Cette réunion de groupes $g_\pi^{(\pi-p)}$ se transforme encore lors d'une transformation unidéterminative, d'après la notion de ce genre de transformation, en une réunion de groupes $g_\pi^{(\pi-p)}$ sur F. Mais, pour cette dernière, la condition

$$q \geqq Q - \pi + 1$$

est satisfaite, car nous avons $q = p - \pi$, $Q = \pi$. La réunion de groupes $g_\pi^{(\pi-p)}$ placée sur F peut donc, d'après une proposition précédente, être découpée par des courbes adjointes C_{n-3} (t. II, p. 143), et, en conséquence, chaque groupe qui en fait partie ne dépend que de $\pi - 1$ éléments déterminateurs arbitraires, tandis que nous avons pris arbitrairement π points du groupe correspondant sur f. Par conséquent, l'hypothèse $\pi > p$ implique contradiction; on peut démontrer la même chose en suivant la même marche à l'égard de l'hypothèse $\pi < p$, et par conséquent il ne reste comme possible que la seule hypothèse $\pi = p$, ce qu'il fallait démontrer.

II. — Systèmes de points d'intersection de courbes adjointes d'ordre $n-3$ avec la courbe primitive. Systèmes ou familles spéciales.

Dans ce qui précède, nous nous sommes surtout occupé de la théorie de la transformation unidéterminative en elle-même; ac-

tuellement se présente naturellement la question de savoir quelles sont les propriétés d'une courbe qui persistent dans ce genre de transformation; c'est ainsi que précédemment nous avons étudié les propriétés d'une courbe qui ne sont pas détruites par collinéation. *Dans ce qui suit, nous devrons donc considérer comme, au fond, identiques entre elles toutes les courbes qui peuvent être changées les unes dans les autres par transformation à détermination unique.* Mais quels sont, devons-nous nous demander d'abord, les marques distinctives de la possibilité d'une semblable transformation? Comme condition nécessaire, nous avons déjà reconnu l'égalité du genre des deux courbes en présence; mais cette condition n'est pas suffisante. De même, l'égalité de l'ordre des deux courbes était nécessaire pour pouvoir les transformer linéairement l'une dans l'autre, mais il fallait en outre que leurs invariants absolus fussent les mêmes ([1]). Ces invariants absolus étaient certaines constantes caractéristiques pour la courbe, et leur nombre était par suite égal au nombre des constantes figurant dans l'équation de cette dernière qui ne peuvent être détruites par transformation linéaire, c'est-à-dire égal à $\frac{1}{2}n(n+3)-8$.

De même, actuellement, la possibilité de la transformation unidéterminative de deux courbes l'une en l'autre dépendra de certaines constantes absolues appelées *modules*, ainsi que nous l'étudierons plus tard encore avec plus de soin ([2]), et le nombre de ces modules doit nécessairement être égal au nombre des constantes figurant dans l'équation de la courbe qu'on ne peut plus détruire par transformation à détermination unique. Pour déterminer ce nombre, le point de départ doit être avant tout d'abaisser autant que possible l'ordre de la courbe, et nous serons ainsi conduits au problème suivant : *Indiquer la courbe de l'ordre le moins élevé* (courbe normale) *en laquelle une courbe de genre donné peut être changée par transformation à détermination unique.* La solution générale de ce problème se rattache étroitement à des recherches générales relatives aux systèmes de points sur une

---

([1]) Il était de plus nécessaire que pour chacune des deux courbes les mêmes covariants s'évanouissent identiquement si l'une d'elles était particularisée par l'évanouissement identique d'invariants fonctionnels.

([2]) *Voir* la Section suivante.

courbe qui possèdent des propriétés de nature à persister dans les transformations unidéterminatives, et il sera surtout question, en cette circonstance, des *systèmes de points d'intersection de courbes adjointes* C_{n-3}, car un système de cette espèce devient le système de courbes $C_{\nu-3}$ adjointes à la courbe C_ν si C_n se transforme en C_ν. Nous traiterons, dans l'ordre suivant, les riches matières qui se pressent en réponse à ces questions :

1° Nous étudierons la transformation de la courbe C_n au moyen d'un réseau de courbes adjointes C_{n-3}, comme courbes de transformation;

2° Nous considérerons une série d'exemples concernant des systèmes de points d'un caractère spécial sur une courbe et leurs relations respectives;

3° Nous traiterons en général la détermination *sur* C_n *de groupes de points par lesquels passe une multiplicité plus élevée de courbes adjointes* C_{n-3} *que l'on ne devait s'y attendre d'après le nombre de points d'un tel groupe* (*groupes spéciaux*). Nous ferons alors connaître, en particulier, la proposition appelée *théorème de Riemann et Roch*. A cela se rattacheront dans les deux sections suivantes :

4° La détermination des courbes normales et des modules;

5° L'étude complète (au point de vue de la Géométrie du nombre) de quelques problèmes qui se présentent, par le moyen de recherches sur les correspondances.

Les propriétés remarquables, plusieurs fois signalées, des courbes adjointes C_{n-3} donnent naturellement l'idée d'employer un système doublement infini de courbes de cette espèce à la place des courbes de transformation Φ. Nous placerons alors tous les points fixes du réseau sur la courbe f elle-même, en sorte que le réseau dépende uniquement de points de cette courbe. Or comme, parmi les points de rencontre d'une courbe adjointe C_{n-3}, $p-1$ déterminent en général les $p-1$ restants, il passera par $p-3$ points *quelconques* de f un nombre doublement infini de courbes adjointes C_{n-3}. Nous avons donc à poser, dans les formules précédentes,

$$s=n-3,\quad r_i=i-1,\quad \alpha_i=\alpha_i'',\quad \alpha_i'=0,\quad r=r'',\quad r'=0,\quad t=1,\quad \sigma=p-3,$$

d'où l'on déduit, en vertu de (15) et de (19),

$$\nu = p + 1, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}p(p-3).$$

Il est donc en général possible de transformer une courbe f du genre p en une courbe d'ordre p + 1 à $\frac{1}{2}p(p-3)$ *points doubles, et la chose s'effectue par une transformation du* $(n-3)^{\text{ième}}$ *ordre dans laquelle toutes les courbes* Φ *sont adjointes à f et passent en outre par p — 3 points* σ *arbitrairement choisis sur f* (¹).

Donc, ayant $p-3$ points quelconques de f, on pourra encore trouver $\frac{1}{2}p(p-3)$ couples de points tels, que par les premiers $p-3$ points et par les points d'un couple (conséquemment par $p-1$ points en tout) passe un *nombre simplement infini* de courbes adjointes C_{n-3}. Nous énoncerons ce résultat sous une forme un peu différente, qui a de l'importance pour ce qui suit. Le réseau de courbes considéré étant donné par

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \alpha_3\varphi_3(x) = 0,$$

et y, z formant les points d'un couple précité, on a

$$\rho\varphi_1(y) = \varphi_1(z), \quad \rho\varphi_2(y) = \varphi_2(z), \quad \rho\varphi_3(y) = \varphi_3(z).$$

Le nombre $\frac{1}{2}p(p-3)$ donne donc aussi le nombre des couples de valeurs y, z qui satisfont simultanément aux trois équations

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y)\varphi_2(z) - \varphi_2(y)\varphi_1(z) &= 0,\\
\varphi_2(y)\varphi_3(z) - \varphi_3(y)\varphi_2(z) &= 0,\\
\varphi_3(y)\varphi_1(z) - \varphi_1(y)\varphi_3(z) &= 0
\end{aligned}$$

[si d'ailleurs $f(y) = 0, f(z) = 0$], les solutions identiques $y = z$ étant exclues par avance. Nous pouvons aussi représenter som-

---

(¹) Cette transformation a été indiquée par Clebsch et Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen;* Leipzig, 1866, p. 65. Elle est évidemment impossible pour les cas de $p = 0$, 1, 2 qui sont traités chacun en particulier à la fin de ce Chapitre. Dans les autres cas, il peut se présenter encore une exception lorsque, étant donnés $p-3$ points quelconques, un certain nombre d'autres points des courbes C_{n-3} se trouvent par là même déterminés, ainsi que cela se produit pour les courbes appelées *hyperelliptiques* (auxquelles appartiennent également toutes les courbes où $p = 2$). Nous verrons ultérieurement que ce sont là les seuls cas d'exception. Sur les courbes hyperelliptiques, *voir* aussi la fin de la Section suivante.

mairement les équations précitées par l'évanouissement d'une matrice de déterminant, sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

et la présence d'une semblable matrice est caractéristique pour tous les problèmes traités dans ce qui suit.

Il existe, d'après cela, sur C_n un nombre $p - 3$ fois infini de groupes de points G_{p-1} de $p - 1$ points appartenant à cette espèce particulière, *et la même chose a lieu pour toute courbe liée unidéterminativement* à C_n; tout groupe de points de l'espèce en question se transforme toujours en un groupe de même nature, sans pourtant être défini comme le système complet des intersections de C_n avec une autre courbe. Or à chacun de ces groupes G_{p-1} répond une famille simplement infinie de groupes Γ_{p-1} découpés sur C_n, précisément au moyen du faisceau de C_{n-3} passant par G_{p-1}; et c'est une chose très digne de remarque que, *réciproquement, par chacun de ces groupes résiduels* Γ_{p-1} *on peut faire passer encore un faisceau de courbes adjointes* C_{n-3}.

La démonstration de cette proposition s'obtient très simplement si l'on fait usage du théorème d'après lequel *tout* ensemble $\gamma_p^{(1)}$ possible sur C_n peut être découpé par un faisceau d'adjointes C_{n-3} (t. II, p. 143). Nous pouvons, en effet, compléter chacun des groupes Γ_{p-1} en nombre simplement infini, de manière à en faire un groupe Γ_p par un point *fixe* A arbitrairement choisi sur C_n (assujetti seulement à ne pas tomber en un point du groupe de base G_{p-1}); l'ensemble de ces groupes Γ_p peut alors, d'après un théorème précédent, être découpé par un faisceau C_{n-3} [1]. Mais toutes les courbes de ce dernier ont nécessairement en commun le point fixe A, et par conséquent nous avons trouvé un second faisceau de courbes C_{n-3} (différent du faisceau originaire qui avait pour groupe de base G_{p-1}) et déterminant de même la famille $\gamma_{p-1}^{(1)}$ sur

---

[1] Le fait que le théorème précédent a également lieu pour les familles $g_p^{(1)}$ à points fixes résulte immédiatement de la démonstration donnée plus haut (t. II, p. 144 et suiv.); seulement on ne doit plus placer précisément en un point fixe le point désigné alors par α.

C_n [1]. Par tout groupe Γ_{p-1} de cette dernière passent donc deux et, par conséquent, une infinité simple de courbes C_{n-3}, ce qu'il fallait démontrer. Nous ferons d'ailleurs diversement usage, dans les exemples suivants, du théorème démontré ici.

Revenons *aux transformations au moyen de courbes adjointes* C_{n-3}, lesquelles ont une importance particulière en ce qu'elles permettent précisément d'établir les courbes normales de l'ordre le moins élevé possible. Le fait que l'on peut prendre $s = n - 3$, pour transformer f en une courbe du degré le moindre possible, résulte immédiatement de nos précédentes recherches sur les systèmes de points d'intersection des ensembles ou familles linéaires de courbes. Si, en effet, q est la multiplicité d'un tel ensemble, Q le nombre des points d'intersection mobiles, s l'ordre de la courbe sécante, on a, d'après ce qui a été dit (t. II, p. 142),

$$\text{pour } s = n - 3, \quad Q \leqq q + p - 1;$$
$$\text{pour } s > n - 3, \quad Q \leqq q + p.$$

Q prend donc, en toute hypothèse, la plus petite valeur pour $s = n - 3$; le cas de s inférieur à $n - 3$ n'a pas besoin d'être traité d'une façon spéciale, car nous avons vu que toute famille de points pour laquelle Q est $< q + p$ peut être découpée par des courbes adjointes C_{n-3} (t. II, p. 143). Notre proposition est par là démontrée, car il nous suffit de prendre dans notre cas $q = 2$ et $Q = \nu$, ν étant alors précisément l'ordre de F.

En faisant le compte détaillé pour notre transformation, nous obtenons, si les courbes employées C_{n-3} passent par $p - 3$ points

---

[1] La proposition est évidente pour une courbe C_5 à deux points doubles ($p = 4$). Ici l'on a $p - 1 = 3$. Or, par trois points G_3 et par les deux points doubles on ne peut plus faire passer un nombre infini de coniques que si les trois points sont sur une droite avec l'un des points doubles; chaque adjointe C_2 du faisceau se décompose alors en cette droite fixe et en une droite (mobile) passant par l'autre point double. Les rayons du faisceau mené par ce dernier déterminent donc sur C_5 les groupes Γ_3; par chacun de ces groupes passe alors naturellement un faisceau analogue de coniques se composant de la droite qui découpe le groupe Γ_3 et du faisceau de rayons qui passe par le premier point double. Toutefois, nous recommandons spécialement d'effectuer figurativement sur cet exemple très simple la démonstration donnée t. II, p. 144. L'affirmation du texte se formule ici d'une manière générale dans la proposition suivante : *Si une conique passant par trois points quelconques $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ et par les deux points doubles de C_5 possède encore un paramètre arbitraire et coupe de plus C_5 aux points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, une conique passant par $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et par les points doubles possède aussi un paramètre arbitraire.*

choisis *arbitrairement* sur C_n, les courbes suivantes du $(p+1)^{\text{ième}}$ ordre :

$p=3$	courbes du	4e ordre à	0	points doubles,
$p=4$.....	»	5e ordre à	2	»
$p=5$.....	»	6e ordre à	5	»
$p=6$. ...	»	7e ordre à	9	»
$p=7$... .	»	8e ordre à	14	»
$p=8$.....	»	9e ordre à	20	».

La courbe générale du cinquième ordre ($p=6$), par exemple, apparaît alors comme transformation d'une courbe *spéciale* du septième ordre, à neuf points doubles, possédant la propriété que sur elle on peut déterminer d'un nombre doublement infini de manières $5\,(=p-1)$ points par lesquels passe une infinité *double* de courbes C_{n-3}, ce qui ne serait pas possible sur une courbe générale C_7 où $p=6$ (¹). Les courbes en question $C_{n-3}=C_4$ forment alors une famille à cinq points d'intersection mobiles (d'où $\nu=5$ dans ce qui précède), et l'ensemble correspondant $g_5^{(2)}$ sur C_5 est découpé par les droites du plan qui sont complétées par une droite fixe quelconque, de manière à former une conique $C_2\,(=C_{\nu-3})$. De même la courbe du cinquième ordre à un point double apparaît comme transformation d'une courbe spéciale du sixième ordre, à cinq points doubles, et ainsi de suite.

On voit par là comment la possibilité d'abaisser l'ordre d'une courbe au moyen d'une transformation à détermination unique dépend du point de savoir si sur la courbe en question il existe des groupes de points d'un caractère spécial ou s'il n'en existe pas. Il résulte immédiatement de cette réflexion que nos courbes du $(p+1)^{\text{ième}}$ ordre elles-mêmes ne sont pas nécessairement celles de l'ordre *le moins élevé* qui puissent tirer leur origine d'une courbe générale du genre p; car les $p-3$ points de base du réseau d'adjointes C_{n-3} employé pour la transformation avaient été choisis sur C_n, absolument *arbitrairement*. Actuellement se présente la question de savoir si l'on peut choisir des groupes non spéciaux de plus de $p-3$ points pour points de base d'un tel réseau, cas où les courbes C_{n-3} du réseau dont il s'agit couperaient la courbe en moins

(¹) Car, d'après le Tableau donné ci-après, $\nu=6$ est en général la valeur minima de ν (valeur désignée par R dans le Tableau) pour $p=6$.

de $p+1$ points mobiles. Pour répondre à cette question, nous avons à résoudre le problème suivant : *Trouver sur une courbe* C_n *de genre* p *les groupes de points par lesquels on peut faire passer une infinité double de courbes adjointes* C_{n-3} *telles, que le nombre des points d'intersection mobiles soit le moindre possible.*

L'étude de ce problème nous conduit naturellement à la continuation des recherches algébriques, précédemment interrompues, sur les systèmes des points d'intersection des courbes adjointes C_{n-3} (t. II, p. 142 et suiv.). Mais, avant d'entrer dans les explications de nature plus générale que nous avons en vue, il sera bon de considérer en détail un exemple, et nous nous proposons de montrer qu'il est possible de ramener par une transformation unidéterminative *une courbe du septième ordre à neuf points doubles,* à laquelle conduisait, pour $p=6$, la transformation que nous venons d'étudier, en *une courbe du sixième ordre à quatre points doubles.*

Nous avons donc à montrer que sur une courbe C_7 de genre $p=6$ il existe un ensemble $\gamma_6^{(2)}$, c'est-à-dire un ensemble doublement infini de six points, déterminé par les intersections de courbes adjointes C_4 ($=C_{n-3}$) ou, ce qui est la même chose, que sur C_7 on peut déterminer des groupes G_4 de trois points chacun (en nombre fini ou infini) par lesquels passe une infinité double de courbes C_4 (tandis que par $4=p-2$ points choisis *arbitrairement* sur C_7 on ne peut faire passer qu'une infinité *simple* des mêmes courbes). Cela conduit au problème consistant à déterminer trois points $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, de telle sorte que les courbes C_{n-3} en nombre doublement infini qui passent par ces points contiennent toutes un quatrième point $y^{(4)}$ de C_7. Or l'ensemble des adjointes C_4 forme une famille linéaire à six paramètres homogènes

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_6\varphi_6(x)=0.$$

Nous pouvons donc formuler la condition imposée en disant que, parmi les quatre équations

$$\begin{aligned}
\alpha_1\varphi_1(y^{(1)})+\alpha_2\varphi_2(y^{(1)})+\ldots+\alpha_6\varphi_6(y^{(1)})&=0,\\
\alpha_1\varphi_1(y^{(2)})+\alpha_2\varphi_2(y^{(2)})+\ldots+\alpha_6\varphi_6(y^{(2)})&=0,\\
\alpha_1\varphi_1(y^{(3)})+\alpha_2\varphi_2(y^{(3)})+\ldots+\alpha_6\varphi_6(y^{(3)})&=0,\\
\alpha_1\varphi_1(y^{(4)})+\alpha_2\varphi_2(y^{(4)})+\ldots+\alpha_6\varphi_6(y^{(4)})&=0,
\end{aligned}$$

la dernière est une conséquence des trois premières, d'où il résulte que trois des six paramètres α_i restent encore arbitraires. Cela

s'exprime par le fait que tous les déterminants *quaternaires* formés des quantités $\varphi_i(y^{(k)})$ doivent s'annuler, c'est-à-dire que l'on a le système suivant d'équations figuré par l'évanouissement d'une matrice de déterminants

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \varphi_3(y^{(1)}) & \varphi_4(y^{(1)}) & \varphi_5(y^{(1)}) & \varphi_6(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \varphi_3(y^{(2)}) & \varphi_4(y^{(2)}) & \varphi_5(y^{(2)}) & \varphi_6(y^{(2)}) \\ \varphi_1(y^{(3)}) & \varphi_2(y^{(3)}) & \varphi_3(y^{(3)}) & \varphi_4(y^{(3)}) & \varphi_5(y^{(3)}) & \varphi_6(y^{(3)}) \\ \varphi_1(y^{(4)}) & \varphi_2(y^{(4)}) & \varphi_3(y^{(4)}) & \varphi_4(y^{(4)}) & \varphi_5(y^{(4)}) & \varphi^6(y^{(4)}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Mais ce système renferme seulement *trois* équations indépendantes les unes des autres, savoir celles qui tirent leur origine de l'équation unique

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \varphi_3(y^{(1)}) & \varphi_i(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \varphi_3(y^{(2)}) & \varphi_i(y^{(2)}) \\ \varphi_1(y^{(3)}) & \varphi_2(y^{(3)}) & \varphi_3(y^{(3)}) & \varphi_i(y^{(3)}) \\ \varphi_1(y^{(4)}) & \varphi_2(y^{(4)}) & \varphi_3(y^{(4)}) & \varphi_i(y^{(4)}) \end{matrix} \right| = 0,$$

pour $i = 4$, 5 et 6 (1). Ces trois équations renferment, en tenant compte des conditions

$$f(y^{(1)}) = 0, \quad f(y^{(2)}) = 0, \quad f(y^{(3)}) = 0, \quad f(y^{(4)}) = 0$$

[$f(x) = 0$ étant l'équation de C_7], encore quatre inconnues : *Donc, parmi les quatre points $y^{(i)}$, l'un, tel que $y^{(4)}$, peut être choisi* arbitrairement, *et l'on pourra trouver alors par rapport à lui* un nombre fini *de groupes ternaires $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ satisfaisant au système d'équations obtenu* (2).

Si maintenant l'on choisit pour courbes de transformation le réseau des courbes C_4 qui passent par quatre points $y^{(i)}$, ainsi définis, ces courbes détermineront sur C_7 un ensemble $\gamma_6^{(2)}$; en d'autres termes, *la courbe C_7 est transformée unidéterminativement en une courbe C_6* (3).

---

(1) *Voir*, par exemple, la *Théorie des déterminants* de Baltzer, ou les explications générales du texte, p. 54 et suiv.

(2) On verra plus tard que le nombre des solutions ne peut être nul; à la fin de la IVe Section nous le trouverons égal à cinq.

(3) *Voir* sur ce sujet Brill, *Math. Annalen*, t. II, p. 471.

Comme parmi les quatre points $y^{(i)}$ on peut en choisir un arbitrairement, il existe en tout un système simplement infini de tels groupes de quatre points chacun; l'ensemble de ces groupes peut être traversé sur C_7 par un faisceau de courbes C_4 qui passent encore par six points fixes de C_7 (ainsi qu'il résulte déjà d'un théorème donné t. II, p. 143), et l'on verra que, pour six points de base de cette espèce, on peut choisir l'un quelconque des groupes du système $\gamma_6^{(2)}$, dont les groupes sont tous résiduels par rapport à un groupe G_4 de quatre points $y^{(i)}$. Cet exemple est très important pour les explications générales qui suivent et peut, pour cette raison, être traité d'une manière encore plus approfondie. On reconnaît, au surplus, l'affinité de notre dernière proposition avec la proposition ci-dessus, que tout système $g_{p-1}^{(1)}$ se compose de groupes de points par lesquels passe également encore une infinité simple de courbes C_{n-3} (p. 35); nous avons sous les yeux deux cas particuliers d'un théorème plus général.

Actuellement, admettons que quatre points $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$ aient été déterminés de telle sorte, que par ces points passe une infinité double de courbes C_4. Soient ensuite $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}$ les six autres points d'intersection d'une courbe C_4 de ce système doublement infini avec C_7. Par les quatre points y et par tout point quelconque du plan, conséquemment aussi en particulier par l'un des six points $x^{(i)}$, passe un nombre simplement infini de courbes C_4; autrement dit, ces points forment ensemble un groupe de $p-1=5$ points par rapport auquel il existe un système résiduel $g_5^{(1)} = g_{p-1}^{(1)}$. Mais alors aussi, par tout groupe de ce dernier système, passe encore une infinité de courbes C_4; il en est ainsi, en particulier (pour $i=6$, par exemple), à l'égard des cinq points $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}$. Il en résulte que tous les déterminants à cinq colonnes qui se trouvent dans la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \varphi_3(x^{(1)}) & \varphi_4(x^{(1)}) & \varphi_5(x^{(1)}) & \varphi_6(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \varphi_3(x^{(2)}) & \varphi_4(x^{(2)}) & \varphi_5(x^{(2)}) & \varphi_6(x^{(2)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x^{(5)}) & \varphi_2(x^{(5)}) & \varphi_3(x^{(5)}) & \varphi_4(x^{(5)}) & \varphi_5(x^{(5)}) & \varphi_6(x^{(5)}) \end{matrix}\right\| = 0,$$

s'évanouissent. En effet, ces conditions sont nécessaires et suffi-

santes pour que les cinq équations

$$\alpha_1\varphi_1(x^{(i)}) + \alpha_2\varphi_2(x^{(i)}) + \ldots + \alpha_6\varphi_6(x^{(i)}) = 0,$$

où $i = 1, 2, 3, 4, 5$ admettent une infinité simple de solutions pour les paramètres α_k. Mais comme pour $x^{(i)}$ nous pouvions choisir chacun des six points x, il en résulte l'existence des cinq autres équations dérivées de la précédente par permutation de chacun des points $x^{(1)} \ldots x^{(5)}$ avec $x^{(6)}$, ce que nous pouvons exprimer en disant que *tous les déterminants mineurs à termes de cinq facteurs doivent s'annuler dans le déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_6(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_6(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x^{(6)}) & \varphi_2(x^{(6)}) & \ldots & \varphi_6(x^{(6)}) \end{vmatrix}.$$

On serait conduit exactement au même système d'équations, et c'est là l'important, par la condition de déterminer six points $x^{(i)}$ tels, que par ces points passe encore un système simplement infini de courbes adjointes C_4. En effet, s'il doit en être ainsi, il faut nécessairement que, parmi les six équations

$$\alpha_1\varphi_1(x^{(1)}) + \alpha_2\varphi_2(x^{(1)}) + \ldots + \alpha_6\varphi_6(x^{(1)}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1\varphi_1(x^{(6)}) + \alpha_2\varphi_2(x^{(6)}) + \ldots + \alpha_6\varphi_6(x^{(6)}) = 0,$$

deux soient la conséquence des quatre autres, puisque déjà $p - 2 = 4$ points de C_7 déterminent un faisceau d'adjointes C_4. Mais l'inverse a également lieu : étant donné un groupe Γ_6 de l'espèce des points $x^{(i)}$, tout résidu de celui-ci forme un groupe G_4 de points $y^{(i)}$ appartenant à la catégorie que nous venons de signaler. En effet, puisque par cinq points quelconques de Γ_6 passe un nombre infini de courbes C_4, les quatre points G_4 forment aussi ensemble avec *chacun* des points de Γ_6 un groupe de cinq points par lequel passe une infinité de courbes C_4 (suivant une proposition précédente, p. 35). Donc, par G_4 passent *six faisceaux différents* de courbes C_4, ce qui n'est possible que si par G_4 on peut faire passer un ensemble doublement infini de courbes C_4,

ou si les six faisceaux sont identiques entre eux. Mais ce dernier cas doit être exclu de prime abord ; car alors nous aurions $4+6=10$ points sur C_7 qui, conjointement avec les neuf points doubles, devraient former les points de base d'un faisceau de courbes C_4, tandis que deux courbes C_4 ne peuvent se couper qu'en seize points. Il ne reste donc comme possible que la première hypothèse, ce qu'il fallait démontrer. *Par conséquent, si quatre points* G_4 *sont situés de telle sorte sur* C_7 *que par ces points passe un ensemble doublement infini de courbes adjointes* C_4, *on peut par tout résidu* Γ_6 *du groupe faire encore passer un système* (¹) *simplement infini de courbes* C_4 *de cette espèce, et réciproquement.*

Tout groupe G_4 de l'espèce en question formant ensemble avec les neuf points doubles treize points de base d'une famille doublement infinie de courbes C_4, il existe au moins un ensemble doublement infini $\gamma_6^{(2)}$ de groupes Γ_6. La *totalité* de ces groupes se trouve aussi représentée par là, car le système d'équation obtenu pour les six points $x^{(i)}$ est, d'après une proposition de la théorie des déterminants que nous allons exposer incessamment, équiva-

(¹) On peut aussi employer les systèmes $g_4^{(1)}$ pour la transformation de C_7 en la forme normale indiquée par Riemann (*loc. cit.*, § 13), c'est-à-dire en une courbe C_8 *à deux points quadruples et trois points doubles*. Soient, en effet, $\psi=0$, $\chi=0$ deux adjointes C_4 qui se coupent aux six points $x^{(i)}$ de l'un des groupes Γ_6 caractérisés dans le texte, et $\psi'=0$, $\chi'=0$ deux autres courbes C_4 qui ont en commun les six points $z^{(i)}$ d'un autre groupe Γ_6 de la même espèce; on se servira des formules de transformation

$$\rho y_1=\psi\cdot\chi', \quad \rho y_2=\psi'\cdot\chi, \quad \rho y_3=\chi\cdot\chi'.$$

Une courbe quelconque du réseau $\alpha_1\psi\chi'+\alpha_2\psi'\chi+\alpha_3\chi\chi'=0$ a alors en commun avec C_7 quarante-huit points fixes (dont trente-six se trouvent aux neuf points doubles et six en chacun des groupes $x^{(i)}$ et $z^{(i)}$), et, par suite, coupe encore C_7 en huit points mobiles (dépendant des quantités α). Mais le faisceau $\psi+\lambda\chi=0$ n'a plus que quatre points d'intersection mobiles; il en est de même du faisceau $\psi'+\lambda\chi'=0$: la courbe C_8 qui prend naissance a donc, en chacun des deux points $y_1=0, y_3=0$ et $y_2=0, y_3=0$, un point quadruple, ce qu'il fallait démontrer. (*Voir*, sur les formes normales de Riemann, Brill, *Math. Annalen*, t. I, p. 401, et t. II, *loc. cit.*). L'établissement de ces formes exige, d'après Riemann, la recherche de deux fonctions algébriques devenant nulles ou infinies dans le moindre nombre de points possible, c'est-à-dire des fonctions dont le numérateur et le dénominateur égalés à zéro représentent des courbes qui ont avec la courbe le plus grand nombre possible de points communs. Les fonctions de cette nature sont précisément ici les quotients $\psi:\chi$ et $\psi':\chi'$.

lent seulement à *quatre* équations indépendantes les unes des autres, de telle sorte que l'on peut prendre encore deux des points $x^{(i)}$ à volonté sur C_7. On reconnaît ainsi (la réciproque de ce raisonnement étant vraie) que le nombre de *tous les groupes possibles* Γ_6 sur C_7 est épuisé par les résidus en nombre doublement infini *d'un nombre fini* de groupes G_4 de l'espèce précitée, et inversement que *tous* les groupes G_4 sont résiduels d'un nombre fini de groupes Γ_6 du système précédent $\gamma_6^{(2)}$.

La réciprocité complète exprimée en cette dernière circonstance entre les systèmes $\gamma_6^{(2)}$ et $g_4^{(1)}$ est, ainsi qu'on le verra incessamment, particulière aux courbes du genre 6 [qui peuvent toutes, en général, être transformées en une courbe du septième ordre, à neuf points doubles, et, par suite, en une courbe du sixième ordre, à quatre points doubles (*voir* p. 39)]; on peut d'ailleurs effectuer la détermination des systèmes $g_{p-2}^{(1)}$ et $g_p^{(2)}$ sur une courbe de genre p absolument comme nous l'avons fait pour le cas de $p = 6$. Si nous nous demandons, en effet, comment $p - 3$ points $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p-3)}$ doivent être situés sur la courbe primitive C_n pour que toute courbe adjointe C_{n-3}, menée par ces points, passe encore par un autre point fixe de C_n, nous imaginerons que l'on adjoigne aux points $y^{(1)}, \ldots, y^{(p-3)}$ deux points mobiles $y^{(p-2)}$, $y^{(p-1)}$, et nous rechercherons la condition moyennant laquelle une courbe adjointe C_{n-3} menée par ces $p - 1$ points passe encore par un certain point fixe $y^{(p)}$ de C_n pendant que les points $y^{(p-2)}$ et $y^{(p-1)}$ parcourent la courbe primitive. Cette condition en implique en réalité deux. Nous regarderons donc $y^{(1)}, \ldots, y^{(p-5)}$ comme seuls donnés arbitrairement, et nous nous demanderons *comment* $y^{(p-4)}$ et $y^{(p-3)}$ *doivent être situés pour que toutes les courbes adjointes* C_{n-3} *menées par ces points passent encore par un point commun* $y^{(p)}$. Comme ici les données comprennent quatre points de moins qu'il serait nécessaire pour la fixation d'une telle courbe C_{n-3}, on peut par les $p - 5$ points donnés [1] faire passer cinq courbes $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_5 = 0$ avec lesquelles une courbe adjointe quelconque C_{n-3} passant par les points

---

[1] Dans le cas de $p = 6$, nous pouvions encore choisir arbitrairement un des quatre points $y^{(i)}$.

en question se compose linéairement; la courbe générale de cette famille a donc la forme

$$(1) \qquad \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_5\varphi_5 = 0.$$

La condition imposée est que toute courbe de ce système qui passe par $y^{(p-4)}$ et $y^{(p-3)}$ passe aussi par $y^{(p)}$, que conséquemment des équations

$$\alpha_1\varphi_1(y^{(p-4)}) + \alpha_2\varphi_2(y^{(p-4)}) + \ldots + \alpha_5\varphi_5(y^{(p-4)}) = 0,$$
$$\alpha_1\varphi_1(y^{(p-3)}) + \alpha_2\varphi_2(y^{(p-3)}) + \ldots + \alpha_5\varphi_5(y^{(p-3)}) = 0,$$

résulte d'elle-même l'équation

$$\alpha_1\varphi_1(y^{(p)}) + \alpha_2\varphi_2(y^{(p)}) + \ldots + \alpha_5\varphi_5(y^{(p)}) = 0.$$

Pour cela, il est nécessaire et suffisant que les valeurs des fonctions φ_i se composent linéairement avec celles des deux premières, que par suite pour $i = 1, 2, \ldots, 5$ aient lieu les équations

$$(2) \qquad \varphi_i(y^{(p)}) = \lambda\varphi_i(y^{(p-4)}) + \mu\varphi_i(y^{(p-3)}).$$

On a là cinq équations qui renferment λ, μ et les coordonnées des trois points $y^{(p-4)}$, $y^{(p-3)}$, $y^{(p)}$, et qui, en tenant compte de $f(y^{(p-4)}) = 0$, $f(y^{(p-3)}) = 0$, $f(y^{(p)}) = 0$, renferment également cinq inconnues. On peut, comme on sait, les remplacer en posant $y_i^{(p-4)} = x_i$, $y_i^{(p-3)} = y_i$, $y_i^{(p)} = z_i$, par la formule unique

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_2(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

laquelle exprime que tous les déterminants mineurs ternaires des fonctions φ_i formés avec la matrice comprise entre les lignes verticales doivent s'annuler séparément, et est équivalente à *trois* équations indépendantes les unes des autres. Il s'agit alors de répondre à la question de savoir combien de systèmes de valeurs x, y, z satisfont simultanément à ce système d'équations et aux équations $f(x) = 0$, $f(y) = 0$, $f(z) = 0$ [1].

Désignons provisoirement le nombre de ces systèmes de valeurs

[1] Si l'on pose pour abréger $\varphi_i(x) = a_i$, $\varphi_i(y) = b_i$, $\varphi_i(z) = c_i$, *tous* les détermi-

par Z [1]; il existera pour $p-5$ points quelconques Z groupes ternaires de l'espèce précitée, et il y a en tout un nombre $p-5$ fois infini de groupes G_{p-2} par lesquels passe une infinité double de courbes C_{n-3} [2]. Ces groupes se répartissent d'une manière remarquable sur certains systèmes qui sont en nombre $p-6$ fois infini et dont chacun renferme un nombre simplement infini de groupes, c'est-à-dire sur les ∞^{p-6} systèmes $g_{p-2}^{(1)}$; chacun de ces groupes est résiduel par rapport à tous les groupes d'un système déterminé $\gamma_p^{(2)}$, de telle sorte que tous les groupes d'un système $g_{p-2}^{(1)}$ sont corésiduels entre eux. On arrive à ce résultat comme on est arrivé au résultat correspondant dans le cas de $p=6$, à l'aide du théorème donné (p. 35) sur les systèmes $g_{p-1}^{(1)}$. Si, en effet, Γ_p est un groupe résiduel d'un groupe G_{p-2} que nous supposerons composé des points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$, il résulte en premier lieu du théorème dont il s'agit que, par chaque réunion de $p-1$ de ces points y_i, on peut faire passer un nombre infini de courbes C_{n-3}, et, pour cette raison, tous les déterminants mineurs d'ordre $p-1$ doivent s'évanouir (*voir*, pour $p=6$, p. 41) dans le déterminant suivant d'ordre p :

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x^{(p)}) & \varphi_2(x^{(p)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(p)}) \end{vmatrix}.$$

---

nants de la matrice (3) s'annulent dans le cas (*voir* la Note I de la page 39) où ont lieu les trois équations

$$(\alpha)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} = 0,$$

à moins que l'on n'ait en même temps

$$(\beta)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour trouver les solutions du système d'équations (3), il faut donc, des solutions communes des équations (α) [en tenant toujours compte des conditions $f(x)=0$, $f(y)=0$, $f(z)=0$], retrancher les solutions communes des équations (β).

[1] Z est égal à $p(p-1)[\frac{1}{6}(p-1)-1]$. (*Voir* la fin de la IVe Section.)

[2] Ici et dans ce qui suit, il s'agit naturellement toujours de courbes *adjointes*.

Or, les équations qui résultent de là expriment précisément que *par les p points* $x^{(i)}$ *du groupe* Γ_p *on peut encore faire passer un système simplement infini de courbes* C_{n-3}; on démontre aussi, à peu près comme précédemment, la réciproque de cette proposition. Le système d'équations mentionné en dernier lieu se montre équivalent à *quatre* conditions, c'est-à-dire que l'on peut prendre encore arbitrairement $p-4$ points d'un groupe Γ_p. Si alors $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ sont quatre courbes du système triplement infini déterminé par les $p-4$ points, nous avons pour la recherche d'un groupe Γ_p à déterminer quatre autres points ξ, η, ζ, θ tels, que tous les premiers déterminants mineurs formés avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) & \varphi_3(\xi) & \varphi_4(\xi) \\ \varphi_1(\eta) & \varphi_2(\eta) & \varphi_3(\eta) & \varphi_4(\eta) \\ \varphi_1(\zeta) & \varphi_2(\zeta) & \varphi_3(\zeta) & \varphi_4(\zeta) \\ \varphi_1(\theta) & \varphi_2(\theta) & \varphi_3(\theta) & \varphi_4(\theta) \end{vmatrix} \tag{5}$$

s'évanouissent. Donc, tandis que d'une part la détermination des groupes Γ_p peut se faire directement par la recherche des solutions communes (c'est-à-dire par les systèmes de valeurs ξ, η, ζ, θ) du système d'équations ainsi obtenu, *on aperçoit, d'autre part, que le problème de la détermination des groupes* Γ_p *se trouve ramené à la détermination de groupes* G_{p-2} *de l'espèce précédente,* car tous les groupes Γ_p s'obtiennent comme résidus de tous les groupes G_{p-2}.

Désignant actuellement par Z′ le nombre des groupes quaternaires ξ, η, ζ, θ de C_n qui satisfont au système d'équations obtenu en dernier lieu [1], nous pouvons résumer ces résultats dans ce qui suit. Si l'on part de $p-5$ points quelconques, il existe encore Z groupes ternaires différents qui, ensemble avec ces points, déterminent un groupe G_{p-2} par lequel passe une infinité double de courbes C_{n-3}; ces courbes C_{n-3}, en nombre doublement infini, déterminent par leurs intersections avec C_n une famille $\gamma_p^{(2)}$ de groupes Γ_p [2], et par chaque ensemble $\Gamma_p^{(2)}$ passe une série sim-

---

(1) Nous trouverons plus tard $Z' = \frac{1}{12}p(p-1)^2(p-2) - \frac{1}{2}p[(p-1)(p-2)-(p+1)]$.

(2) La courbe C_n peut, par suite, être transformée unidéterminativement en une courbe C_p, mais aucune réduction de l'ordre n'est possible ensuite.

plement infinie d'autres courbes C_{n-3}. Réciproquement, l'ensemble de ces dernières détermine sur C_n une famille $g_{p-2}^{(1)}$ de groupes G_{p-2} dont l'un a été notre point de départ. Il existe donc en tout un nombre $p-6$ fois infini de familles $g_{p-2}^{(1)}$ de cette catégorie, en sorte qu'il faut $p-5$ points quelconques pour déterminer un groupe individuel $G_{p-2}^{(1)}$. Celles-ci se divisent en Z systèmes complètement séparés qui répondent aux racines de l'équation du Z^{ième} degré dont dépend leur détermination; et cela de telle sorte qu'aucune famille d'un système n'ait avec une famille d'un autre système un groupe G_{p-2} complet commun, et que l'on ne puisse pas arriver par variation continue d'un groupe d'un système à un groupe des $Z-1$ autres systèmes ([1]). Or, comme à toute famille $g_{p-2}^{(1)}$ répond une famille $\gamma_p^{(2)}$ de groupes résiduels, il existe aussi un nombre $p-6$ fois infini de familles différentes $\gamma_p^{(2)}$, ce qui concorde avec le compte direct fait précédemment, et ces dernières se partagent en Z' systèmes séparés. *Ce nombre Z' coïncide en particulier avec le nombre Z pour le cas de $p=6$*, qui se trouve par là caractérisé de la manière indiquée plus haut (p. 43). Si, en effet, p est égal à 6, il n'existe qu'un nombre *fini* de familles $g_{p-2}^{(1)}$ et qu'un nombre fini de familles $\gamma_p^{(2)}$; or le nombre de ces familles est nécessairement le même, parce que d'une famille $g_{p-2}^{(1)}$ dérive toujours unidéterminativement une *seule* famille $g_p^{(2)}$, car, dans ce cas, ces familles ne renferment plus de points arbitraires. Au contraire, pour $p>6$, une correspondance unidéterminative de cette espèce n'a plus lieu.

Faisons remarquer, en terminant, *qu'il ne peut exister de familles $\gamma_p^{(2)}$ et $g_{p-2}^{(1)}$ pour $p=5$ et, en général, pour $p<6$*; car, dans ce cas, le nombre $p-6$ des points que l'on peut prendre encore arbitrairement dans chaque groupe des deux familles deviendrait négatif, ce qui n'a aucun sens. On le vérifie du reste sans difficulté directement. En effet, une courbe du genre $p=5$ peut (si elle n'est pas hyperelliptique) être transformée (d'après ce qui a été

([1]) Nous rencontrerons plus tard encore de tels systèmes de groupes de points sur C_n complètement séparés, lorsque nous considérerons les courbes de contact. Nous en trouvons aussi des exemples dans les trois systèmes de couples de pôles sur une courbe de troisième ordre, et dans les systèmes de points où une conique peut avoir avec cette même courbe un contact d'ordre élevé.

dit t. II, p. 258 et 267) en une courbe du sixième ordre à cinq points doubles; mais, s'il existait sur cette courbe C_6 un groupe G_5 par lequel passerait une infinité double de courbes adjointes $C_3 (= C_{n-3})$, il faudrait que toutes ces courbes eussent en commun, conjointement avec les cinq points de G_5, les cinq points doubles de C_6, c'est-à-dire en tout dix points communs, ce qui est impossible.

Après avoir ainsi expliqué sur des exemples particuliers la notion des *groupes spéciaux* et démontré leur existence, nous passons à l'étude *générale* de ces groupes. Nous allons d'abord établir le théorème appelé *théorème de Riemann et Roch*, qui se réfère aux relations respectives des groupes de cette nature (et que nous avons énoncé aux pages 35 et 42 pour des cas particuliers); nous prouverons ensuite, d'une manière générale, l'existence de tels groupes par l'établissement des équations de condition qui les concernent.

Nous commencerons par revenir à nos recherches précédentes sur les systèmes de points d'intersection des courbes adjointes C_{n-3}, recherches interrompues au moment où nous énoncions cette importante proposition (t. II, p. 143), qu'*une famille linéaire $g_Q^{(q)}$ q fois infinie de groupes de Q points chacun peut toujours être découpée par une famille de courbes adjointes C_{n-3} si la relation*

$$(6) \qquad q \geqq Q - p + 1 \quad \text{ou} \quad Q - q \leqq p - 1$$

est satisfaite [1].

---

[1] Une famille $g_Q^{(q)}$, pour laquelle $q = Q - p + 1$, est déterminée par les intersections de courbes C_{n-3} qui passent par $R = 2p - 2 - Q$ points fixes G_R. Si donc on a $Q \leqq p - 1$, et que q soit d'ailleurs un nombre positif, le groupe G_R sera nécessairement d'un caractère tout particulier; alors $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ étant deux courbes C_{n-3} menées par G_R, $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ est une fonction algébrique qui deviendra infinie pour Q points, c'est-à-dire pour un nombre de points inférieur à p. *Mais, d'après la proposition du texte, toute fonction algébrique de cette dernière espèce peut réciproquement être représentée sous la forme* $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. C'est ainsi présentée que la proposition se trouve dans Riemann, *loc. cit.*, § 10. Mentionnons encore un exemple du théorème. Sept points quelconques étant pris sur une courbe C_4, on en déterminera deux autres [et cela de trois manières différentes (p. 16 et suiv.)] de telle espèce que par les neuf passe

Dans notre démonstration, nous sommes partis du fait que la proposition est exacte en toute hypothèse pour $q = 0$, et nous avons montré alors qu'elle a encore lieu pour $q = 1$ Nous sommes venus à bout des autres cas en nous élevant d'un système $g_{Q-1}^{(q-1)}$ à un système $g_Q^{(q)}$.

Nous avons déjà fait remarquer qu'il s'agit avant tout pour nous de l'étude de ce que nous avons appelé les *groupes spéciaux* [1], c'est-à-dire des groupes assujettis à posséder les propriétés définies dans les exemples précédents (p. 33). D'une manière générale, nous comprendrons actuellement sous le nom de *systèmes spéciaux* $g_Q^{(q)}$ un ensemble linéaire q fois infini de groupes chacun de Q points, pour lequel on a

$$q > Q - p + 1, \tag{7}$$

c'est-à-dire un ensemble dont un groupe spécial déterminé $G_Q^{(q)}$ n'est fixé que si l'on prend *plus* de $Q - p + 1$ points arbitraires. Les systèmes spéciaux qui sont possibles sur une courbe C_n ne sont aucunement indépendants les uns des autres et peuvent au contraire se grouper deux à deux, suivant une loi remarquable, de telle façon que d'une famille donnée on peut toujours en déduire une autre, ainsi qu'il est arrivé dans les exemples précédents, et le fait a lieu en conséquence de la proposition suivante :

Si R *points* G_R *ont sur une courbe f non décomposable de genre p une situation particulière telle que les courbes adjointes du* $(n-3)^{\text{ième}}$ *ordre qui passent par ces points forment encore une famille q fois infinie* (*q étant un nombre positif et supérieur à* $p-1-R$), *cas où leurs intersections déterminent l'ensemble de groupes* $\gamma_Q^{(q)}$ (Q *étant égal à* $2p-2-R$), *le groupe* G_R *appar-*

---

une infinité simple de courbes C_3. Les trois points d'intersection mobiles forment alors un système $g_3^{(1)}$ pour lequel la condition (6) est satisfaite; ils peuvent donc être déterminés par les intersections d'un *faisceau de droites* ($C_{n-3} = C_1$). Ce dernier engendre alors inversement, avec le faisceau de courbes C_3, la courbe C_4, suivant le procédé de CHASLES (t. II, p. 95).

[1] Pour les recherches suivantes, *voir* BRILL et NÖTHER, *Math. Annalen*, t. VII, p. 280 et suiv.

tient à un système r fois infini pour lequel on a

$$r = \mathrm{R} - p + 1 + q = p - 1 - \mathrm{Q} + q,$$

et qui est conséquemment encore un système spécial; en d'autres termes, par tout groupe $\Gamma_{\mathrm{Q}}^{(q)}$ *de l'ensemble* $\gamma_{\mathrm{Q}}^{(q)}$ *passe une famille r fois infinie de courbes adjointes d'ordre n — 3 dont les intersections déterminent l'ensemble* $g_{\mathrm{R}}^{(r)}$ *de groupes* $\mathrm{G}_{\mathrm{R}}^{(r)}$.

Pour le démontrer, nous pourrions encore, sous le bénéfice de quelques propositions empruntées à la théorie des déterminants, suivre la même voie que pour le cas de $\mathrm{R} = p - 2$, $r = 1$, $\mathrm{Q} = p$, $q = 2$ (p. 45 et suiv.); mais on arrive également très simplement au but en faisant usage du théorème [1] sur les systèmes spéciaux (t. II, p. 143, et t. III, p. 48), comme précédemment dans le cas de $q = r = 1$, $\mathrm{Q} = \mathrm{R} = p - 1$ (p. 35), et cela de la manière suivante :

Soit donné un système spécial $g_{\mathrm{Q}}^{(q)}$ à l'égard duquel l'inégalité (7) se trouve satisfaite par définition, et soit

$$q = \mathrm{Q} - p + 1 + r, \tag{8}$$

r désignant un nombre entier positif, mais tel que l'on ait $r < p - 1$. Nous adjoindrons à tout groupe de l'ensemble $g_{\mathrm{Q}}^{(q)}$ les mêmes r points fixes (choisis d'une manière quelconque). L'ensemble donné en produit alors un autre $g_{\mathrm{Q}'}^{(q')}$, où

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q} + r, \quad q' = q$$

et pour lequel conséquemment le nombre des paramètres arbitraires ne s'est pas accru, tandis que le nombre des points a subi une augmentation dans les groupes individuels de l'ensemble. Actuellement on a, en vertu de (8),

$$q' = \mathrm{Q}' - p + 1$$

ou, en d'autres termes, la condition (6) est remplie à l'égard du

---

[1] Conjointement avec la démonstration suivante du texte, on trouve à l'endroit cité une démonstration obtenue par généralisation des considérations qui ont été présentées à la page 35. Nous reprendrons la marche suivie dans l'autre exemple lorsque nous arriverons à la Section consacrée à l'évanouissement des fonctions Θ.

système $G_{Q'}^{(q')}$. Ce dernier système peut donc être traversé par un système d'adjointes C_{n-3}, et conséquemment par tout groupe $G_{Q'}^{(q')}$ du système passe une courbe adjointe. Mais comme, parmi les Q' points du groupe, r ont été choisis d'une manière complètement arbitraire, on doit pouvoir, par les $Q' - r = Q$ points du groupe en question $G_{Q'}^{(q')}$, faire passer au moins une famille r fois infinie d'adjointes C_{n-3}; en d'autres termes, toutes les courbes C_{n-3} de cette catégorie passant par le groupe $G_{Q}^{(q)}$ déterminent un système $g_{R}^{(\rho)}$ pour lequel R est égal à $2p - 2 - Q$ et ρ au moins égal à r, c'est-à-dire qu'on a, d'après (8),

$$(9) \qquad \rho \gtreqq q + p - 1 - Q \quad \text{et conséquemment} \quad \gtreqq R - p + 1 + q.$$

Mais ρ ne peut pas non plus être supérieur à r. Si nous posons en effet $\rho = R - p + 1 + \varkappa$, $\varkappa$ étant supérieur à q, on sera conduit du système $g_{R}^{(\rho)}$ à un système $g_{Q}^{(\varkappa)}$ par des considérations absolument identiques à celles qui ont servi à déduire le système $g_{R}^{(\rho)}$ du système $g_{Q}^{(q)}$, en sorte qu'on obtiendrait pour $\varkappa$ l'inégalité

$$(10) \qquad \varkappa \geqq Q - p + 1 + \rho,$$

analogue à la relation (9). Mais les deux systèmes $g_{Q}^{(q)}$ et $g_{Q}^{(\varkappa)}$ sont résiduels d'un groupe quelconque $G_{R}^{(\rho)}$, ainsi qu'on l'aperçoit immédiatement d'après notre construction des systèmes $g_{R}^{(\rho)}$ et $g_{Q}^{(\varkappa)}$; les deux systèmes doivent donc comprendre le même nombre de paramètres arbitraires (t. II, p. 141), et de là résulte $\varkappa = q$, d'où aussi, en vertu de (10) et de (8), $\rho = r$. Nous formulerons ce résultat dans le théorème suivant :

Si par un groupe $G_{Q}^{(q)}$ d'un système spécial $g_{Q}^{(q)}$ sur C_n, système dans lequel q est donné par (8), c'est-à-dire où l'on a $q = Q - p + 1 + r$, on fait passer une courbe adjointe du $(n-3)^{ième}$ ordre, celle-ci coupe encore C_n en $2p - 2 - Q = R$ points qui, de leur côté, si l'on mène par $G_{Q}^{(q)}$ toutes les courbes possibles C_{n-3} de l'espèce en question, forment un système spécial $g_{R}^{(r)}$ de groupes $G_{R}^{(r)}$ pour lequel r possède la valeur déduite de (8), $r = R - p + 1 + q$.

Or, c'est là encore, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement, le théorème de Riemann et Roch, précédemment énoncé sous une

autre forme (¹), théorème par le moyen duquel on obtient le groupement par couples des systèmes spéciaux dont nous avons parlé; *car, pour deux systèmes* $g_Q^{(q)}$ *et* $g_R^{(r)}$ *associés de la manière prescrite, on en déduit les relations*

$$(11) \qquad Q + R = 2p - 2, \quad Q - R = 2q - 2r.$$

Quelques exemples serviront à mieux éclaircir encore le sens du théorème.

A. *Courbe du cinquième ordre à un seul point double,* $p = 5$. — Nous pouvons ici déterminer un *système spécial* $g_5^{(2)}$ par des coniques adjointes, dont chacune se décompose en deux droites, savoir une droite fixe passant par le point double et une droite mobile d'une façon quelconque. Comme on a $Q = 5$ et $q = 2$, on trouve, en vertu de (11), $R = 3$, $r = 1$, c'est-à-dire un système $g_3^{(1)}$; ce dernier prend naissance lorsque la courbe adjointe C_2 se décompose en une droite fixe quelconque et en une droite mobile passant par le point double.

B. *Courbe du sixième ordre à deux points doubles,* $p = 8$. — Nous pouvons déterminer un système spécial $g_Q^{(q)} = g_7^{(1)}$ par une famille de courbes C_{n-3}, dont chacune se décompose en une droite fixe passant par l'un des points doubles et en une conique mobile passant par l'autre point double et, en outre, par trois points fixes de la courbe primitive. Pour le système associé $g_R^{(r)}$, on trouve $R = 7$, $r = 1$; les sept points qui sont déterminés sur la courbe primitive par une conique quelconque du faisceau précité forment donc, ensemble avec les deux points doubles de C_6 (la courbe primitive), un système de neuf points par lequel passe une infinité de courbes du troisième ordre (²). On obtient un système spécial $g_Q^{(q)} = g_6^{(2)}$ si les courbes sécantes C_{n-3} se composent d'une adjointe fixe C_2 et d'une droite mobile.

(¹) Il a été établi d'une autre manière pour quelques cas particuliers, par RIEMANN, *loc. cit.*, et § 5, *Journal de Crelle*, t. 54, et *Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen* (*ibid.*, t. 66); il a été presque immédiatement démontré d'une manière générale par ROCH, *ibid.*, t. 64, p. 372. (*Voir* plus bas la Section XI, sur l'évanouissement des fonctions Θ).

(²) C'est donc là un nouvel exemple du cas traité t. II, p. 35.

Il vient pour le système associé $R = 8$, $r = 3$, et l'ensemble $g_8^{(3)}$ est traversé par l'ensemble des adjointes C_2 (en y réunissant la droite fixe).

C. *Courbe du cinquième ordre à deux points doubles.* (*Voir* la note de la p. 36.)

D. *Courbe du septième ordre à neuf points doubles.* (*Voir* p. 38 et suiv.)

Nous nous proposons maintenant de présenter d'une manière générale les explications qui, dans la courbe du septième ordre à neuf points doubles, nous ont conduits à certains systèmes de déterminants; en même temps, nous approfondirons un peu les propositions de la théorie des déterminants qui sont relatives à ces systèmes. Pour le moment, nous ne ferons aucune attention au nombre de systèmes spéciaux de groupes possibles (nombre exprimé par Z dans l'exemple). Il s'agit actuellement pour nous de fixer pour les nombres Q, R, q, r certaines limites en deçà desquelles la recherche des systèmes spéciaux puisse encore avoir lieu. Les raisonnements algébriques nécessaires à cet objet restent les mêmes si l'on remplace les courbes adjointes C_{n-3} par des courbes adjointes d'un ordre quelconque. Nous traiterons donc immédiatement le problème général qui suit :

Soit donnée une famille t fois infinie de courbes adjointes. On demande de déterminer, sur $f = 0$, R points (G_R) tels, que par eux passe un nombre q fois infini de courbes de la famille donnée.

Ce problème conduit de même naturellement à l'évanouissement d'une matrice, c'est-à-dire à l'évanouissement d'un certain nombre de déterminants qui ne sont pas indépendants les uns des autres. La famille t fois infinie de courbes étant donnée par l'équation

$$(12)\qquad \Psi \equiv \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \ldots + \alpha_{t+1}\psi_{t+1} = 0,$$

on a, relativement à elle, les R équations

$$(13)\qquad \Psi(x^{(1)}) = 0,\quad \Psi(x^{(2)}) = 0,\quad \ldots,\quad \Psi(x^{(R)}) = 0,$$

et simultanément,

$$f(x^{(1)}) = 0, \quad f(x^{(2)}) = 0, \quad \ldots, \quad f(x^{(R)}) = 0.$$

Les équations (13) doivent, parmi les rapports des paramètres α_i, en laisser encore q arbitraires; il y en a donc seulement $t-q$ qui soient applicables à la détermination de ces rapports, ou, en d'autres termes, de $t-q+1$ quelconques des équations (13), chacune sera une conséquence des $t-q$ restantes. Or de là résulte, circonstance répondant à (5), cette condition que tous les déterminants de l'ordre $t-q+1$ du Tableau

$$(14) \qquad \left\| \begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \psi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \psi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1(x^{(R)}) & \psi_2(x^{(R)}) & \ldots & \psi_{t+1}(x^{(R)}) \end{matrix} \right\|$$

doivent nécessairement s'annuler [1]; qu'il en est ainsi, par exemple, de tous les déterminants de la forme

$$(15) \quad D_{ik} = \begin{vmatrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \psi_{t-q}(x^{(1)}) & \psi_i(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \psi_{t-q}(x^{(2)}) & \psi_i(x^{(2)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1(x^{(t-q)}) & \psi_2(x^{(t-q)}) & \ldots & \psi_{t-q}(x^{(t-q)}) & \psi_i(x^{(t-q)}) \\ \psi_1(x^{(k)}) & \psi_2(x^{(k)}) & \ldots & \psi_{t-q}(x^{(k)}) & \psi_i(x^{(k)}) \end{vmatrix},$$

où l'on doit mettre successivement

pour i toutes les valeurs... $t-q+1, \quad t-q+2, \quad \ldots, \quad t+1,$
pour k toutes les valeurs... $t-q+1, \quad t-q+2, \quad \ldots, \quad R.$

Mais il est aussi précisément nécessaire et suffisant pour que toutes les équations en question soient satisfaites, que tous les déterminants D_{ik} *s'évanouissent individuellement* [2], en suppo-

---

[1] Pour $R = t-q+1$, ce problème a été formulé de la même manière par CLEBSCH et GORDAN, *Theorie der Abel'schen Functionen* (p. 211 et suiv.).

[2] *Voir* KRONECKER dans la *Théorie des déterminants* de BALTZER, page 42 de la 3e édition. C'est à de semblables questions que se réfèrent les recherches de ROBERT, publiées dans le *Journal de Crelle*, t. 67, p. 266.

sant que le déterminant du $(t-q)^{\text{ième}}$ ordre

$$D = \begin{vmatrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(x^{(t-q)}) & \psi_2(x^{(t-q)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(t-q)}) \end{vmatrix}$$

ne soit pas lui-même nul. Or, nous pouvons toujours supposer qu'il en est ainsi, puisque nous n'avons imposé aucune condition au système des courbes (12). Pour démontrer notre proposition, nous développerons D_{ik} suivant les éléments de la dernière ligne horizontale, sous la forme

$$D_{ik} = \psi_1(x^{(k)}).B_{1i} + \psi_2(x^{(k)}).B_{2i} + \ldots + \psi_{t-q}(x^{(k)}).B_{t-q,i} + \psi_i(x^{(k)}).D,$$

où la loi de formation des quantités B_{hi} comme déterminants mineurs de D_{ik} est facile à apercevoir. Posons maintenant

$$(16)\quad C_{ik} = \psi_i(x^{(k)}) - \frac{D_{ik}}{D} = -\frac{1}{D}\left[\psi_1(x^{(k)})B_{1i} + \ldots + \psi_{t-q}(x^{(k)})B_{t-q,i}\right];$$

il viendra

$$C_{ik} = \psi_i(x^{(k)})$$

si i ou k prend l'une des valeurs 1 jusqu'à $t-q$, D_{ik} s'évanouissant alors; et si l'on attribue à l'indice i toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à $t+1$, à l'indice k toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à R, les quantités C_{ik}, en vertu de la manière dont elles sont composées avec les quantités ψ et B [1], forment un système d'éléments tel, que *tous* les déterminants de l'ordre $t-q+1$ que l'on peut en déduire sont nuls. Si l'on suppose donc que les déterminants

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{llll} D_{t-q+1,\,t-q+1}, & D_{t-q+2,\,t-q+1}, & \ldots, & D_{t+1,\,t-q+1}, \\ D_{t-q+1,\,t-q+2}, & D_{t-q+2,\,t-q+2}, & \ldots, & D_{t+1,\,t-q+2}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ D_{t-q+1,\,R}, & D_{t-q+2,\,R}, & \ldots, & D_{t+1,\,R} \end{array} \right.$$

sont tous nuls, comme nous l'avons fait précédemment, *tous* les éléments C_{ik} se confondent, en vertu de (16), avec les fonctions

---

(1) Cette conséquence résulte du théorème sur la multiplication des déterminants. (Voir *Journal de Crelle*, t. 67, p. 38.)

$\psi_i(x^{(k)})$; c'est-à-dire qu'ils forment de nouveau le Tableau (14). Donc, *tous* les déterminants de l'ordre $t-q+1$ des quantités ψ sont également nuls, ce qu'il fallait démontrer.

Par conséquent, dans le système (14) sont uniquement comprises $(q+1)(R-t+q)$ équations indépendantes les unes des autres; savoir, par exemple, celles qui sont données par l'évanouissement des déterminants D_{ik} réunis dans (17). Les solutions communes de ces dernières donnent donc aussi celles du système (14), car tout système de valeurs qui entraîne l'évanouissement des déterminants (17) satisfait aussi aux autres conditions qui résultent de (14); il faut néanmoins en retrancher tous les systèmes de valeurs pour lesquels s'évanouissent des déterminants de la forme D [1]. Or dans les $(q+1)(R-t+q)$ équations figurent R inconnues, savoir les coordonnées des points $x^{(i)}$, lesquelles sont en outre liées aux équations $f(x^{(i)})=0$. Parmi ces R points, on peut donc en prendre arbitrairement sur f

$$R-(q+1)(R-t+q), \tag{18}$$

nombre qui ne peut devenir négatif en aucune hypothèse. *Par conséquent, pour que l'on puisse trouver sur f des groupes de* R *points par lesquels passe une famille q fois infinie de courbes tirée d'une famille linéaire donnée t fois infinie, il faut la réalisation de la condition*

$$R \geqq (q+1)(R-t+q) \quad [2]. \tag{19}$$

On impose au nombre (18) une condition plus restrictive encore, si l'on demande que les groupes G_R forment un système de multiplicité déterminée, traversé par des courbes d'ordre déterminé. L'établissement de cette seconde condition présente un intérêt particulier si les fonctions ψ sont de l'ordre $n-3$ et que les groupes G_R eux-mêmes forment encore un système spécial $g_R^{(r)}$, c'est-à-dire sont traversables par une famille r fois infinie d'ad-

---

(1) *Voir* à ce sujet les exemples donnés dans la 4e Section de ce Chapitre, ainsi que la note de la page 44. Ces exemples montrent également *que le nombre des solutions restantes n'est pas nul en général.*

(2) Sur la question de savoir dans quelle mesure ces considérations restent exactes à l'égard des courbes non adjointes, *voir* ci-dessous la Section relative aux systèmes de points d'intersection.

jointes C_{n-3}, les nombres r, R, q, Q étant liés alors entre eux par le théorème de Riemann et Roch. Revenons, par exemple, au cas précédemment mentionné (p. 43 et 46) où nous avions

$$r=1,\quad R=p-2,\quad q=2,\quad Q=p,\quad t=p-1$$

et où, en concordance avec (18), $p-5$ points pouvaient être choisis encore à volonté sur f, pour trouver un groupe $G_R=G_{p-2}$ par lequel passerait une infinité double de courbes C_{n-3}. Si, de plus, ici le groupe G_R doit appartenir à un système simplement infini (r étant égal à 1) $g_{p-2}^{(1)}$, *nous avons encore la seconde condition* $p-5\geqq 1$, et le nombre $p-6$ est le nombre (désigné plus loin par τ) des points qui peuvent être choisis arbitrairement si l'on veut trouver un système $g_{p-2}^{(1)}$.

On vient de la même manière à bout de notre problème général concernant les courbes C_{n-3}, c'est-à-dire la détermination des systèmes spéciaux $g_R^{(r)}$. Nous supposerons dans cette circonstance que t est égal à $p-1$, c'est-à-dire que les courbes de la famille (12) ne satisfont à aucune condition autre que celles d'être du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre et d'être adjointes à f. Les déterminants (15) ou (17) deviennent dans ce cas des déterminants d'ordre $p-q$, et parmi les R points qui figurent dans les équations résultant de (14) on peut encore en prendre d'après (18)

$$R-(q+1)(R+q-p+1)$$

arbitrairement. Mais, pour que nous arrivions à un système $g_R^{(r)}$, *il faut non seulement que ce nombre ne devienne pas négatif, mais encore qu'il ne descende pas au-dessous de* r. Or comme, en vertu de (11), on a $R-p+1=r-q$, *à la place de* (19) *se présentera pour les groupes spéciaux* $G_R^{(r)}$ *la relation*

$$R-(q+1)r\geqq r, \tag{20}$$

et de là résulte, en tenant compte de (11),

$$R\geqq\frac{r(r+p+1)}{1+r}, \tag{21}$$

ou encore, si l'on élimine R de (20) au moyen de (11),

$$p\geqq(r+1)(q+1). \tag{22}$$

Les différences des premiers et des seconds membres de ces

inégalités

$$(23)\qquad \begin{cases} \tau = R - (q+1)r - r = R(r+1) - r(r+p-1) \\ \quad = p - (q+1)(r+1), \end{cases}$$

donnent le nombre des points d'un groupe G_R qui restent encore arbitraires après que r points de ce groupe ont été fixés à volonté et qui doivent être eux-mêmes fixés de telle manière que l'on obtienne un nombre *fini* de systèmes $g_R^{(r)}$ séparés de tous les ∞^τ systèmes r fois infinis $g_R^{(r)}$ satisfaisant aux conditions données. Or le nombre τ peut devenir aussi petit que l'on voudra; s'il est égal à zéro, il n'existe qu'un nombre fini de systèmes $g_R^{(r)}$ sur C_n, comme dans l'exemple considéré pour $p = 6$. *Si, au contraire, il est négatif, le problème cesse d'être résoluble* (p. 47).

A tout système $g_R^{(r)}$ de groupes corésiduels G_R correspond, d'après le théorème de Riemann et de Roch, un système pareil $g_Q^{(q)}$ ou réciproquement; et cela de telle sorte, que tout groupe de l'un des systèmes est résiduel de tout groupe de l'autre système; les nombres Q, q se déduisent ici de R, r au moyen des équations (11). Les systèmes en nombre τ fois infini $g_R^{(r)}$ ont cette propriété qu'aucun d'eux n'a en commun avec un autre un groupe complet $G_R^{(r)}$, parce que, suivant le théorème du reste, un groupe détermine complètement et sans ambiguïté le système auquel il appartient. La même chose a lieu à l'égard des systèmes $g_Q^{(q)}$, dont il existe naturellement aussi un nombre τ fois infini.

Le cas de $\tau = 0$ est particulièrement intéressant pour la suite. Lorsqu'il se présente, on trouve au moyen des équations (13) ou (14) ou au moyen de l'évanouissement des déterminants D_{ik}, pour r points donnés un nombre *fini* Z *de groupes* de $R - r = r(q+1)$ points dont chacun forme, ensemble avec les r points, un groupe $G_R^{(r)}$, et qui donnent naissance par le mouvement des r points à Z systèmes différents $\mathfrak{g}_R^{(r)}$ [1]. Ces systèmes n'ont entre eux rien de commun et ne peuvent même pas être transformés les uns dans les autres (d'une façon continue) par des variations infiniment petites. Il existe du reste *un nombre égal* de systèmes de groupes $G_Q^{(q)}$ sur $f = 0$ qui sont associés *sans ambiguïté* aux premiers comme rési-

[1] En d'autres termes, la détermination de ces systèmes dépend d'une équation du Zième degré. On n'a pu jusqu'ici faire connaître le nombre Z; pour le cas de $R = t - q + 1$, sa valeur a été donnée sans démonstration par BRILL et NÖTHER, *loc. cit.*

dus, et inversement. (*Voir* l'exemple précédent, p. 46 et suiv.) La recherche des systèmes $g_Q^{(q)}$ conduit, par conséquent, à une équation du même degré que celles des systèmes $g_R^{(r)}$; *le nombre des solutions est le même pour les deux problèmes,* et les solutions des deux équations se déduisent les unes des autres, d'une manière parfaitement déterminée, bien que les problèmes apparaissent comme complètement différents au point de vue algébrique.

Si, au contraire, τ est différent de zéro, il n'y aura plus correspondance analogue de deux problèmes déterminés. (*Voir* l'exemple cité.) S'il existe, en effet, un nombre fini de groupes se composant chacun de $R - r - \tau = r(q+1)$ points qui avec $r + \tau$ points forment un groupe $G_R^{(r)}$, ceux-ci conduisent, d'après le théorème de Riemann et Roch, à des groupes $G_Q^{(q)}$ qui peuvent bien avoir q, mais non $q+\tau$ points communs, car par q points se trouve déterminé un nombre fini de groupes $G_Q^{(q)}$ de cette espèce. Si l'on prend d'après cela $q+\tau$ points arbitrairement et qu'on cherche les groupes $G_Q^{(q)}$ qui leur correspondent, c'est-à-dire les groupes de $Q-q$ points chacun qui les complètent, le chiffre de ceux-ci est fini, mais d'ailleurs différent du premier nombre. Mais il existe relativement à r points donnés, ainsi que la remarque en a déjà été faite, un nombre τ fois infini de solutions pour la détermination des groupes $G_R^{(r)}$, auxquelles répondent unidéterminativement pour q points donnés d'une manière quelconque un nombre τ fois infini de solutions servant à déterminer des groupes $G_Q^{(q)}$.

Au commencement de nos recherches sur les groupes spéciaux, nous nous étions demandé quels étaient les systèmes *doublement* infinis dans lesquels le nombre R des points mobiles était aussi petit que possible (p. 37 et suiv.). Notre condition (21) nous permet maintenant d'indiquer immédiatement pour le cas de $r=2$ la plus petite valeur que puisse prendre R. En effet, d'après la relation dont il s'agit, on doit avoir

$$3R \geqq 2(p+3).$$

Si donc $p = 3\pi$, π désignant un nombre entier positif, nous avons *comme valeur minima de* R *dans le cas de* $r=2$

$$R = 2(\pi+1) = p - \pi + 2,$$

et cette valeur satisfait encore, pour $p = 3\pi + 1$ et $p = 3\pi + 2$, à la

condition posée. Mais les relations (20), (21) ou (22) permettent d'indiquer en général *la valeur minima du nombre* R *de points, pour lequel r, étant donné, peut exister un groupe spécial* $G_R^{(r)}$ *sur* $f=0$; on obtient ainsi en même temps, d'après (11), la valeur maxima relative au nombre Q des points formant les groupes résiduels. Les nombres ainsi obtenus ont été, pour les cas de $r=1, 2, 3$, réunis dans le Tableau suivant, qu'il sera aisé de prolonger d'une façon quelconque; l'avant-dernière colonne de ce Tableau contient le nombre τ défini par (23) et relatif au nombre des paramètres linéaires dans les systèmes correspondants $g_R^{(r)}$ et $g_Q^{(q)}$, nombre qui ne peut jamais devenir négatif. En se basant sur cette observation, on trouve, d'après (22) et (23), les plus petites valeurs de p pour lesquelles le système spécial correspondant est possible; ces valeurs sont indiquées dans la dernière colonne. Des nombres entiers devant apparaître pour R, etc., il faut faire attention à la nature du nombre p. Soit π un nombre entier positif, on trouve

Valeur de p.	r.	Valeur minima de R.	Valeurs correspondantes de q.	Valeurs correspondantes de Q.	τ.	$p \geqq$.
2π $2\pi+1$	1	$p-\pi+1$	$\pi-1$	$p+\pi-3$	0 1	4
3π $3\pi+1$ $3\pi+2$	2	$p-\pi+2$	$\pi-1$	$p+\pi-4$	0 1 2	6
4π $4\pi+1$ $4\pi+2$ $4\pi+3$	3	$p-\pi+3$	$\pi-1$	$p+\pi-5$	0 1 2 3	8
$(r+1)\pi+\tau$ avec $\tau<r+1$	r	$p-\pi+r$	$\pi-1$	$p+\pi-r-2$	τ	$2r+2$ (¹)

(¹) On reconnaît l'exactitude de cette série générale de nombres en la portant dans l'équation (21); il vient alors en fait, pour $\tau=0$, $(r+1)R=r(r+p-1)$; pour $\tau>0$, cette condition se transforme en $(r+1)(\tau+r)\geqq r(r+1+\tau)$. Or cette dernière est satisfaite.

Ainsi, par exemple, il existe, comme nous l'avons fait observer plusieurs fois (p. 36), sur une courbe du cinquième ordre à deux points doubles ($p=4, \pi=2$), deux systèmes différents $g_3^{(1)}$, puisque $\tau=0$, $r=1$, $p-\pi+1=3$; et tous deux sont résiduels l'un par rapport à l'autre; en effet, on a aussi $q=\pi-1=1$, $Q=p+\pi-3=3$. Un autre exemple nous est offert par la courbe du sixième ordre à cinq points doubles ($p=5$). Pour deux points P_1, P_2 arbitrairement choisis, il existe ici un nombre fini de couples de points qui forment, ensemble avec les premiers, des groupes spéciaux $G_4^{(1)}$, p étant égal à $2\pi+1$ pour $\pi=2$, $p-\pi+1=4$, $\tau=1$, d'où résulte $r+\tau=2$ (ce qui répond au choix arbitraire de deux points). Et il existe pour P_1, P_2 précisément cinq groupes $G_4^{(1)}$; car si l'on transforme la courbe du sixième ordre au moyen des courbes adjointes C_3 en nombre doublement infini qui peuvent être menées par P_1, P_2, on obtient une courbe C_6' qui aura encore nécessairement cinq points doubles; les couples de points répondant à ces derniers sur C_6 forment, comme on le sait, conjointement avec P_1, P_2, les points de base du faisceau de courbes adjointes C_3 qui rencontrent C_6 dans les systèmes résiduels $g_4^{(1)}=g_Q^{(q)}$ (t. II, p. 145). On obtient en tout sur C_6 un nombre infini de systèmes $g_4^{(1)}$ de cette espèce, puisque $\tau=1$. L'un d'entre eux, par exemple, se compose des groupes déterminés par les intersections du faisceau de droites passant par un point double; le système résiduel de ce premier système est formé par les groupes $G_4^{(1)}$ qui sont déterminés par le faisceau des coniques passant par les quatre autres points doubles. Nous renvoyons enfin à l'exemple relatif au cas de $p=6$ qui a été traité avec détails. A l'égard de ce dernier, les précédentes propositions sur les déterminants ont établi la preuve qui nous manquait encore de l'existence de systèmes $g_4^{(1)}$ et $\gamma_6^{(2)}$ sur une courbe du septième ordre, à neuf points doubles ([1]).

III. — La transformation en courbes normales. Modules.

Nous revenons maintenant au cas de $r=2$, qui présente une importance particulière pour la transformation à détermination

([1]) Pour les courbes spéciales du genre p, il peut d'ailleurs exister d'autres systèmes spéciaux que ceux indiqués au Tableau; le fait, par exemple, se produit dans le cas des courbes hyperelliptiques.

unique de la courbe primitive. En fait, nous pouvons, d'après nos développements précédents (p. 37), et en ayant égard aux valeurs minima de R qui répondent à $r=2$ et qui ont été indiquées dans le Tableau, énoncer immédiatement la proposition suivante :

La courbe de l'ordre le moins élevé (courbe normale) en laquelle une courbe générale du genre p peut être transformée unidéterminativement est de l'ordre $p-\pi+2$ si le nombre p est de la forme 3π, $3\pi+1$, $3\pi+2$, ou, ce qui revient au même, de l'ordre $2\pi+2$, $2\pi+3$, $2\pi+4$ respectivement, et, comme le genre de cette courbe normale doit de même être égal à p, elle possède $\frac{1}{2}(p-\pi+1)(p-\pi)-p$ ou respectivement $2\pi(\pi-1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2+2\pi+1$ points doubles [1].

---

[1] Ces courbes normales ont été indiquées par BRILL et NÖTHER, *loc. cit.* Déjà, dans la note de la page 42, nous avons fait observer, à propos d'un exemple, que les courbes normales de RIEMANN, *Theorie der Abelschen Functionen*, § 13, diffèrent essentiellement de celles-là. Dans RIEMANN il s'agit, en effet, étant donnée une équation $F(x,y)=0$ du $m^{\text{ième}}$ degré par rapport à x et du $n^{\text{ième}}$ par rapport à y, d'abaisser autant que possible par transformation unidéterminative les nombres m et n *séparément*, ou, en d'autres termes, de trouver deux fonctions algébriques différentes l'une de l'autre, $\frac{\varphi}{\chi}$ et $\frac{\varphi'}{\chi'}$, qui deviennent nulles ou infinies en aussi peu de points que possible. On est donc conduit à chercher deux faisceaux de courbes

$$(\alpha) \qquad \varphi+\lambda\chi=0 \quad \text{et} \quad \varphi'+\lambda\chi'=0,$$

qui coupent $f=0$ en un nombre aussi réduit que possible de points mobiles ou qui, autrement dit, déterminent sur $f=0$ deux systèmes $g_R^{(1)}$ relativement auxquels R a la valeur minima indiquée dans le Tableau, c'est-à-dire $R=p-\pi+1$ pour $p=2\pi$ ou $p=2\pi+1$. Les courbes de transformation dont on doit faire usage, savoir

$$(\beta) \qquad \alpha_1\varphi\chi'+\alpha_2\chi\varphi'+\alpha_3\chi\chi'=0,$$

coupent encore $f=0$ en $2p-2\pi+2$ points mobiles. Aux groupes composés chacun de $Q=p+\pi-3$ points de base des faisceaux (α) correspond un point multiple d'ordre $p+\pi-3$ sur la nouvelle courbe. Nous obtenons donc (d'accord avec RIEMANN) :

Pour $p=2\pi$, des courbes d'ordre $p+2$ à deux points multiples d'ordre $3(\pi-1)$ et $\pi(\pi-2)$ points doubles;

Pour $p=2\pi+1$ des courbes d'ordre $p+3$ à deux points multiples d'ordre $3\pi-2$ et π^2 points doubles.

Sont exceptés les cas de $p=1$ et $p=2$. Pour $p=2\pi+1$, on a $\tau=1$; la transformation peut donc être réalisée d'un nombre infini de manières différentes. Par une transformation quadratique dont les points fondamentaux sont respectivement situés aux deux points multiples et en l'un des points doubles (ou par des considérations sur les courbes de l'espace) ces courbes normales peuvent aisément être transformées en courbes d'ordre p ou $p+1$ (pour $p>4$). (*Voir* BRILL, *Math. Annalen*, t. II, p. 471.

Corrélativement aux trois cas cités, on a pour le choix du système de courbes de transformation, eu égard aux valeurs de τ lorsque $r = 2$, ou bien aucun paramètre, ou bien un seul ou bien deux à sa disposition. Les valeurs de Q et q qui correspondent à la valeur $R = p + \pi - 2$ permettent donc d'énoncer encore le théorème précédent, sous la forme suivante :

Pour $p = 3\pi$, $3\pi + 1$ ou $3\pi + 2$, *on peut, relativement à un groupe spécial de* $p + \pi - 4$ *ou respectivement de* $4\pi - 4$, $4\pi - 3$, $4\pi - 2$ *points par lesquels passe un nombre doublement infini de courbes adjointes d'ordre* $n - 3$ *et dont* $\pi - 1$, π, $\pi + 1$ *respectivement peuvent être pris à volonté, trouver encore* $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ *ou respectivement* $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ *couples de points qui avec les* $p + \pi - 4$ *points cités forment un groupe spécial de* $2\pi(\pi + 1) - 4$, $2\pi(\pi + 2) - 3$, $2\pi(\pi + 3) - 1$ *points par lesquels on peut encore faire passer un nombre simplement infini de courbes de la même espèce.*

On obtient ainsi, pour les valeurs les moins élevées de p calculées exactement, les courbes normales suivantes : une comparaison avec le Tableau donné plus haut (p. 37) pour les courbes du $(p + 1)^{\text{ième}}$ ordre montre comment, en fait, pour $p \geqq 6$, on obtient les courbes d'un ordre moins élevé. On trouve

Pour $p = 3$, $\pi = 1$	des courbes du	4e ordre à	0	points doubles,
» $p = 4$, $\pi = 1$	»	5e ordre à	2	»
» $p = 5$, $\pi = 1$	»	6e ordre à	5	»
» $p = 6$, $\pi = 2$	»	6e ordre à	4	»
» $p = 7$, $\pi = 2$	»	7e ordre à	8	»
» $p = 8$, $\pi = 2$	»	8e ordre à	13	»
» $p = 9$, $\pi = 3$	»	8e ordre à	12	»

Dans ces courbes manquent, par exemple, les courbes du cinquième ordre, où $p = 5$ et $p = 6$. Ces dernières et, en général, les courbes du genre p dont l'ordre est inférieur à $p - \pi + 2$ s'obtiennent, au contraire, par transformation de courbes du $(p - \pi + 2)^{\text{ième}}$ ordre sur lesquelles, en vertu de relations particulières entre les constantes qui les déterminent, existent des systèmes spéciaux $g_R^{(2)}$ ayant un nombre de points mobiles moindre

que cela n'est possible sur une courbe générale appartenant au genre dont il s'agit.

La transformation d'une courbe $C_n f(x) = 0$ de genre p en la courbe normale correspondante au moyen de courbes adjointes C_{n-3} peut, du reste, être rendue impossible par des valeurs particulières des constantes que nous avons déjà mentionnées (p. 32) et que l'on désigne habituellement sous le nom de *modules* (¹). Si, en effet, deux points sur f ont entre eux une relation telle que (comme il arrive par exemple dans les courbes du cinquième ordre ayant un point triple) toutes les adjointes C_{n-3} qui passent par un point quelconque passent par cela même par un ou plusieurs points associés au premier, l'inversion unidéterminative des formules de transformation $\rho y_i = \varphi_i(x)$ devient impossible, même sous le bénéfice de $f(x) = 0$, de telle sorte que les variables x ne peuvent plus s'exprimer en fonctions des variables y rationnellement, mais seulement à l'aide de radicaux (ou en général de quantités irrationnelles), et la correspondance cesse alors d'être unidéterminative. On se convaincra du reste aisément que, dans l'emploi des courbes adjointes C_{n-3} comme courbes de transformation, il ne peut se présenter d'irrationnalités plus élevées que les radicaux du second degré. Si, en effet, à tout point A donné *d'une manière quelconque* sur f il pouvait correspondre j points tels que toutes les adjointes C_{n-3} menées par A passassent également par ces j points, on aurait déjà, puisqu'une courbe de cette espèce possède $p-1$ éléments déterminateurs, en prenant $p-1$ points à volonté, fixé $(j+1)(p-1)$ points d'intersection de la courbe, tandis que celle-ci ne rencontre f qu'en $2p-2$ points mobiles. Donc j est au plus égal à 1.

Par conséquent, dans le système de points d'intersection d'une courbe C_n *avec une adjointe* C_{n-3}, *il n'y a qu'un seul point* au plus *qui puisse être déterminé par un autre point du même système* (²). Or, comme il existe un nombre simplement infini de points sur la courbe, une courbe de cette nature spéciale est caractérisée par la circonstance qu'elle possède un système $g_2^{(1)}$. A son égard reste vraie la proposition que $p-1$ points d'intersection d'une courbe

(¹) Nous reviendrons incessamment sur leur nombre.

(²) *Voir* Brill et Nöther, *loc. cit.*, p. 286.

adjointe C_{n-3} sont déterminés par les $p-1$ restants, mais un point individuel quelconque faisant partie des premiers dépend déjà d'un point entièrement déterminé, faisant partie des seconds et réciproquement. On peut donc prendre $p-2$ points arbitrairement; par ces points et par les $p-2$ points correspondants passe un faisceau d'adjointes C_{n-3} qui déterminent sur f le système $g_2^{(1)}$ dont il a été parlé. Un groupe individuel $G_2^{(1)}(=G_R^{(r)})$ de ce système forme alors, suivant le théorème de Riemann et Roch, le système des points de base des courbes adjointes C_{n-3} qui sont en nombre $p-2$ fois infini et déterminent sur f le système résiduel $g_{(p-2)}^{2p-4}=g_Q^{(q)}$, tandis que par deux points quelconques de f il ne passe plus qu'un nombre $p-3$ fois infini de courbes de cette espèce. Un exemple des faits dont nous parlons nous est offert par les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre à point multiple d'ordre $n-2$ (lesquelles sont conséquemment du genre $n-2$); en effet, ici toute adjointe C_{n-3} se décompose en $n-3$ droites passant par le point multiple. Une ligne mobile et $n-4$ droites fixes de ce faisceau de rayons représentent donc ensemble une famille simplement infinie de courbes C_{n-3} qui ne coupent f qu'en deux points mobiles. Les courbes dont il est question ici sont ordinairement appelées *hyperelliptiques* [1].

Mais on a aussi réciproquement cette proposition que *toute courbe C_n de genre p sur laquelle existe un système spécial $g_2^{(1)}$ peut être transformée unidéterminativement en une courbe du $(p+2)^{\text{ième}}$ degré à point multiple d'ordre p*; nous pouvons donc qualifier d'hyperelliptique toute courbe possédant un système $g_2^{(1)}$. La transformation précitée s'effectue au moyen d'une famille doublement infinie de courbes adjointes C_{n-2} qui passent par $n+p-4$ points fixes de C_n et rencontrent par suite cette dernière en $p+2$ points mobiles. Pour produire sur la nouvelle courbe C_{p+2} un point multiple d'ordre p, il faut, parmi les $n+p-4$ points fixes sur C_n, en placer $n-p$ aux points d'in-

---

(1) Cette dénomination est fondée sur ce que, pour les courbes dont il s'agit, les intégrales hyperelliptiques (*voir* la 6e Section de ce Chapitre) ont une signification semblable à celle des intégrales elliptiques pour les courbes du genre $p=1$. A la fin de cette Section, nous revenons encore sur les courbes hyperelliptiques; consulter aussi la Section relative aux courbes du genre $p=2$.

tersection d'une droite quelconque $u_x = 0$ avec $f = 0$ et choisir les $2p - 4$ autres de telle sorte que par eux passe, de la façon indiquée, un faisceau $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0$ de courbes adjointes C_{n-3} déterminant le système $g_2^{(1)}$.

Si l'on emploie alors les formules de transformation

$$\rho y_1 = u_x \varphi_1, \quad \rho y_2 = u_x \varphi_2, \quad \rho y_3 = \psi,$$

où $\psi = 0$ représente une courbe C_{n-2} quelconque passant par les $n + p - 4$ points précités, le faisceau $y_1 + \lambda y_2 = 0$ coupe la courbe résultante C_{p+2} seulement en deux points mobiles, en déterminant sur elle le système caractéristique $g_2^{(1)}$; autrement dit, le point $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ est de fait un point multiple d'ordre p de la courbe C_{p+2}.

La détermination du nombre des constantes caractéristiques ou modules d'une courbe peut actuellement s'effectuer en connexion avec notre détermination des courbes normales de l'ordre le moins élevé (p. 32). Nous supposerons d'abord que le genre p soit divisible par 3, que par suite p soit égal à 3π; alors la courbe normale correspondante est de l'ordre $2\pi + 2$ et a $2\pi(\pi - 1)$ points doubles, c'est-à-dire qu'elle dépend de

$$(\pi + 1)(2\pi + 5) - 2\pi(\pi - 1) = 9\pi + 5$$

constantes. Mais on peut, par transformation linéaire, faire disparaître encore huit de ces dernières, en sorte qu'il n'en restera plus que

$$9\pi - 3 = 3p - 3.$$

Une réduction plus considérable de ce nombre par le choix particulier des $\pi - 1$ points arbitraires qui, dans la réduction de notre courbe C_n de genre 3π à la forme normale, servent comme points de base pour les courbes de transformation du $(n - 3)^{\text{ième}}$ ordre, est impossible. Deux groupes différents $G_{\pi-1}$ de cette espèce donnent, en effet, lieu à deux familles d'adjointes C_{n-3} qui déterminent sur C_n un *même* système $g_{2\pi+2}^{(1)}$ (parce qu'il n'existe qu'un nombre fini de systèmes $g_{2\pi+2}^{(1)}$, τ étant égal à zéro), et sont par suite complètement équivalentes relativement à la courbe $f = 0$. Si donc deux transformations de cette espèce sont données par les équations

$$\rho y_i = \varphi_i(x), \quad \rho y_i = \psi_i(x),$$

elles conduisent à une *même* courbe normale $F(y) = 0$. Par conséquent, en choisissant autrement les $\pi - 1$ points de base sur C_n, on obtient uniquement le changement d'une autre famille d'adjointes C_{n-3} en une famille de droites (et en une courbe fixe $C_{2\pi-1}$ adjointe à $F = 0$), sans que d'ailleurs l'équation $F = 0$ elle-même varie.

L'examen des hypothèses $p = 3\pi + 1$ et $p = 3\pi + 2$ se fait d'une manière tout à fait analogue. On a dans le premier cas $\tau = 1$, et conséquemment la transformation en courbe normale peut avoir lieu d'une infinité de manières *différentes*, de telle sorte que, par le choix spécial des π points arbitraires, on peut encore faire disparaître une constante de l'équation résultante $F = 0$. Le nombre des constantes restantes est donc égal à

$$\frac{1}{2}(2\pi + 3)(2\pi + 6) - 2\pi^2 - 8 - 1 = 9\pi = 3p - 3.$$

Pour compléter cette conclusion, il faut encore démontrer que deux courbes normales différentes $F(y) = 0$, déduites d'une même courbe C_n, ne peuvent dériver l'une de l'autre par transformation linéaire, de telle sorte qu'on ait (comme précédemment) à diminuer de huit, par suite des transformations linéaires, le nombre des constantes. Car si deux courbes $F = 0$, $F' = 0$ provenant de $f = 0$ par les substitutions respectives

$$\rho y_i = \varphi_i(x), \quad \rho y'_i = \varphi'_i(x),$$

étaient transformables linéairement l'une en l'autre, on pourrait poser

$$\sigma\varphi_i = \alpha_{i1}\varphi'_1 + \alpha_{i2}\varphi'_2 + \alpha_{i3}\varphi'_3.$$

Les courbes φ'_i appartiendraient donc à la même famille doublement infinie que les courbes φ_i, et par suite auraient en commun entre elles les mêmes points de $f = 0$; les deux transformations ne différeraient donc pas l'une de l'autre. On trouve enfin, d'une manière tout à fait semblable, que pour $p = 3\pi + 2$ le nombre des constantes est égal à

$$(\pi + 2)(2\pi + 7) - (2\pi^2 + 2\pi + 1) - 8 - 2 = 9\pi + 3 = 3p - 3.$$

Le nombre des modules d'une courbe du genre p, ou autrement dit le nombre des constantes caractéristiques de cette

courbe relativement aux transformations à détermination unique, est donc égal à $3p-3$ (¹).

Les modules jouent conséquemment, dans les transformations à détermination unique, le même rôle que les invariants absolus dans les collinéations (²). On peut, semblablement à ce qui a été fait pour les seconds, considérer les premiers comme des fonctions de rapports anharmoniques, ou même qualifier précisément de modules certains rapports anharmoniques, si (comme il arrive le plus fréquemment) on n'attache aucune importance à la représentation des modules comme fonctions rationnelles des coefficients de f. *On peut, en effet, envisager comme modules tous les paramètres dépendant uniquement des coefficients de l'équation* $f=0$ *qui, formés par un procédé algébrique rigoureusement défini, ne changent pas de valeur lorsqu'on les déduit, par le même procédé, des coefficients de la courbe transformée ou qui, dans le cas où, comme par exemple un rapport anharmonique, ils seraient des fonctions irrationnelles des coefficients, ne peuvent néanmoins se transformer qu'en un nombre fini de valeurs différentes des premières.* Suivant l'espèce de l'opération algébrique employée, on obtiendra comme modules différents systèmes de grandeurs; pour représenter en particulier les modules comme des rapports anharmoniques, le plus simple est de chercher sur le terrain binaire un champ de valeurs lié à la courbe, et tel qu'il lui réponde unidéterminativement un semblable champ de valeurs par rapport à la courbe transformée. Ces deux champs de valeurs sont alors liés projectivement l'un à l'autre (³); les rapports anharmoniques formés avec les éléments correspondants sont donc égaux et fournissent les modules. Le plus avantageux est de partir ici de courbes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre, car nous avons vu qu'aux systèmes d'intersections de ces courbes avec $f=0$ correspondent sur la nouvelle courbe du $\nu^{\text{ième}}$ ordre des systèmes de

---

(¹) Le nombre $3p-3$ a été donné pour la première fois par Riemann, *loc. cit.*, § 12. Les cas de $p=0$ et $p=1$ forment exception. Le nombre en question est encore exact pour $p=2$, tandis qu'il ne l'est plus pour les courbes hyperelliptiques (p. 72). En général, le nombre vrai est inférieur à $3p-3$ pour toute courbe sur laquelle existent d'autres systèmes spéciaux que ceux figurant au Tableau ci-dessus.

(²) *Voir* t. I, p. 310 et 332.

(³) *Voir* t. II, p. 141, note.

points qui sont déterminés par des courbes adjointes du $(\nu-3)^{\text{ième}}$ ordre. Maintenant, dans un faisceau d'adjointes C_{n-3}, dont $p-2$ points de base sont situés sur $f=0$ d'une façon quelconque, il existe, d'après des formules données plus haut (t. II, p. 172), $4p-2$ courbes tangentes à la courbe f, et dans les faisceaux correspondants de courbes $C_{\nu-3}$ il y a un nombre égal de courbes qui touchent la courbe f (¹).

Le système des $4p-2$ tangentes de ces courbes en un point de base du premier faisceau est donc projectif au système des $4p-2$ tangentes des courbes correspondantes dans le second faisceau, et les $4p-5$ invariants absolus des formes binaires corrélatives, c'est-à-dire les $4p-5$ rapports anharmoniques des deux systèmes de tangentes sont égaux entre eux. Mais ces rapports anharmoniques dépendent encore des coordonnées des $p-2$ points de base choisis arbitrairement sur $f=0$; donc, par élimination de ces dernières quantités, on pourra former, d'après le compte précédent, $3p-3$ fonctions de ces $4p-5$ rapports anharmoniques, indépendantes l'une de l'autre et ne dépendant plus que des coefficients de la courbe primitive; ces fonctions doivent donc être légitimement considérées comme modules (²). On vérifie aussi ces dernières propriétés par le fait qu'en choisissant d'une façon spéciale les $p-2$ points en question on obtient directement $3p-3$ rapports anharmoniques indépendants entre eux, et cela de la manière suivante :

Dans la famille $p-1$ fois infinie d'adjointes C_{n-3}, il existe, d'après ce qui a été dit t. II, p. 172,

$$p[2p-2+(p-1)p-(p-1)]=(p-1)p(p+1)$$

courbes qui ont avec C_n un contact d'ordre $p-1$ (c'est-à-dire la rencontrent en p points consécutifs); ces courbes sont, par suite, données avec C_n et dépendent uniquement des coefficients de cette dernière. Actuellement, choisissons les autres $p-2$ points d'inter-

(¹) La présence éventuelle de quelques points de rebroussement ne doit entraîner ici aucune réduction du nombre $4p-2$. (*Voir* les remarques faites p. 8.)

(²) Ce mode de détermination des modules a été donné par RIEMANN, *loc. cit.*; la question abordée en dernier lieu dans le texte est traitée par les transcendantes dans ce passage.

section d'une semblable courbe C_{n-3} pour points de base de notre faisceau. Parmi les $4p-2$ courbes tangentes de ce dernier, $p-1$ s'absorbent dans la courbe unique ayant un contact d'ordre $p-1$, et $3p-1$ courbes C_{n-3} ayant un contact simple restent encore comprises dans le faisceau; les tangentes de ces courbes et de la courbe de contact précédemment signalée, en un point de base du faisceau, représentent alors une forme binaire de l'ordre $3p$, telle que les $3p-3$ rapports anharmoniques en relation avec elle dépendent uniquement des coefficients de la courbe primitive [1]. On peut donc considérer ces rapports anharmoniques comme des modules, étant admis avant tout qu'ils soient en général indépendants les uns des autres. Or, on prouve qu'il en est bien réellement ainsi [2], en montrant que *réciproquement, par les valeurs de ces $3p-3$ paramètres, un nombre fini de courbes C_{p+1} est déterminé, attendu que l'on considère comme identiques entre elles toutes les courbes qui dérivent les unes des autres par transformation à détermination unique,* et cela de la manière suivante [3]. Au lieu d'une courbe C_n de genre p, nous pourrons prendre pour base de notre examen une courbe C_{p+1} ayant $\frac{1}{2}p(p-3)$ points doubles; on peut ensuite, sans nuire à la généralité, attribuer à cette courbe la propriété de posséder un point dans lequel elle a un contact d'ordre $p-1$ avec une droite; car, pour déduire une courbe de cette espèce d'une courbe générale C_n, il suffit de choisir le réseau des courbes de transformation de telle sorte qu'il renferme une des courbes C_{n-3} ayant un contact

---

[1] Ce mode de détermination des modules a aussi été employé par WEIERSTRASS. (*Voir* BRILL et NÖTHER, *loc. cit.*) Dans ce Mémoire sont également indiqués d'autres modes de détermination.

[2] S'il devait en être autrement dans des cas particuliers, c'est que l'on aurait précisément assigné aux modules des valeurs spéciales, certaines relations invariantes étant alors satisfaites à l'égard de la forme binaire correspondante représentée par les $3p$ tangentes en un point de base. Ces relations peuvent être données par des valeurs particulières des invariants absolus (c'est-à-dire par l'évanouissement d'invariants) ou aussi par l'évanouissement identique de covariants. Cette dernière circonstance indique encore généralement des relations entre les rapports anharmoniques, en sorte que l'on embrasse les deux cas si l'on considère seulement des rapports anharmoniques (c'est-à-dire des paramètres *irrationnels*); on renonce néanmoins par là d'abord à la représentation *rationnelle* des modules par les coefficients de C_n.

[3] *Voir* CAYLEY, *Proceedings of the London Math. Society*, t. I.

d'ordre $p-1$. La droite tangente d'ordre $p-1$ dont nous avons parlé coupera C_{p+1} en un autre point P duquel on pourra encore mener $3p-1$ tangentes à cette courbe. Les rapports anharmoniques des $3p$ droites ainsi déterminées sont les paramètres que nous cherchons. Considérons actuellement, à l'inverse, ces paramètres comme donnés d'une façon complètement arbitraire; alors on peut toujours trouver, ainsi qu'il suit, une courbe C_{p+1} à laquelle ils appartiennent comme modules. Nous prendrons un point quelconque P et nous mènerons par ce point trois droites quelconques; on pourra alors tracer par P encore $3p-3$ autres droites qui, avec les trois premières, formeront les $3p-3$ rapports anharmoniques donnés. Si maintenant nous imposons à une courbe C_{p+1} les conditions de passer par P, d'avoir $\frac{1}{2}p(p-3)$ points doubles, de toucher les $3p$ droites précitées, le contact avec une d'entre elles étant d'ordre $p-1$, le nombre des constantes dont on peut encore disposer pour C_{p+1} est égal à

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+4)-\frac{1}{2}p(p-3)-(4p-2)-1=3.$$

Soit $F'=0$ l'équation d'une courbe satisfaisant à ces conditions, et soient $x_1=0$, $x_2=0$ les coordonnées du point P : nos conditions seront encore satisfaites par toute courbe $F=0$ dérivée de F' par la transformation linéaire ([1])

$$\rho y_1=x_1,\quad \rho y_2=x_2,\quad \rho y_3=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3,$$

et cette courbe $F=0$ renferme trois constantes arbitraires α_1, α_2, α_3. Il en résulte que toutes les courbes qui satisfont aux conditions précédentes doivent pouvoir être déduites d'un nombre fini de courbes $F'=0$ par transformation linéaire. Il est donc prouvé en premier lieu par là que *les* $3p-3$ *rapports anharmoniques introduits plus haut comme modules sont indépendants les uns des autres,* et en même temps aussi, que *ces* $3p-3$ *modules déterminent réciproquement une* CLASSE *de courbes du genre* p, si, avec Riemann, nous rangeons dans une classe toutes les courbes

---

([1]) Cette transformation est une collinéation perspective dont le centre (à savoir le point $x_1=0$, $x_2=0$) est donné (t. I, p. 319 et suiv.).

qui peuvent être transformées unidéterminativement les unes dans les autres.

Nous mentionnerons, pour terminer, les modifications que cette détermination des modules subit dans les courbes hyperelliptiques (p. 65), c'est-à-dire dans les courbes qui possèdent un système spécial $g_2^{(1)}$. Un faisceau d'adjointes C_{n-3} mené par $p-2$ points de f passe encore par $p-2$ autres points fixes de cette même courbe, et dans ce faisceau il existe seulement $2(2+p-1)=2p+2$ courbes tangentes. Or, comme tous les faisceaux constructibles de courbes C_{n-3} sont ici équivalents, les $2p-1$ rapports anharmoniques des paramètres de ces courbes de contact sont indépendants du choix des points fixes, *et ce sont les* $2p-1$ *modules de la courbe hyperelliptique*. Il suit également de là *que si une courbe du genre* p *doit posséder un système spécial* $g_2^{(1)}$, *cela équivaut à* $3p-3-2p+1=p-2$ *conditions* [1]. Si l'on part, en particulier, de la forme normale précédemment indiquée pour une courbe hyperelliptique, c'est-à-dire d'une courbe d'ordre $p+2$ à point multiple d'ordre p, les adjointes C_{n-3} sont données par les groupes de $p-1$ droites qui passent par le point multiple; *les modules sont donc les* $2p-1$ *rapports anharmoniques* (*les invariants absolus*) *des* $2p+2$ *tangentes que l'on peut mener du point multiple à la courbe.*

Il est au surplus facile de mettre l'équation d'une semblable courbe C_{p+2} sous une forme dans laquelle ces $2p-1$ modules figurent seuls explicitement comme constantes. Supposons, en effet, que le point multiple soit situé au sommet $x_1=0$, $x_3=0$, l'équation de la courbe C_{p+2} aura alors la forme

$$x_2^2\varphi_p(x_1, x_3)+x_2\varphi_{p+1}(x_1, x_3)+\varphi_{p+2}(x_1, x_3)=0,$$

les φ désignant des fonctions de leurs arguments et étant de l'ordre indiqué par leur indice inférieur. Pour les coordonnées des points de contact des tangentes issues du point multiple, cette équation doit, une valeur de $x_1 : x_3$ étant donnée, fournir deux valeurs

[1] On reconnaît en même temps qu'une courbe de genre $p=2$ est toujours hyperelliptique et peut conséquemment toujours être transformée en une courbe de quatrième ordre, à point double, ce qui sera plus tard démontré directement. (*Voir* la Section relative aux courbes du genre $p=2$.)

égales de $x_2 : x_3$. Ces $2p+2$ tangentes sont donc données par l'équation

$$X(x_1, x_3) \equiv 4\varphi_{p+2}(x_1, x_3) \cdot \varphi_p(x_1, x_3) - [\varphi_{p+1}(x_1, x_3)]^2 = 0.$$

Or, par rotation du système de coordonnées autour du point multiple, on peut toujours obtenir que

$$X(x_1, x_3) = x_1 \cdot x_3 (x_1 - x_3)(x_1 - k^{(1)} x_3)(x_1 - k^{(2)} x_3) \ldots (x_1 - k^{(2p-1)} x_3).$$

et les grandeurs $k^{(1)}, \ldots, k^{(2p-1)}$ sont alors les modules de la courbe.

Si l'on fait à présent la transformation

$$\rho y_1 = x_1 \varphi_p, \quad \rho y_2 = x_2 \varphi_p + \frac{1}{2} \varphi_{p+1}, \quad \rho y_3 = x_3 \varphi_p,$$

notre courbe se transforme en

$$4 y_2^2 [\varphi_p(y_1, y_3)]^2 + X(y_1, y_3) = 0,$$

courbe du $(2p+2)^{\text{ième}}$ ordre qui, d'après les explications données t. II, p. 214, possède en $y_1 = 0, y_3 = 0$ un point multiple d'ordre $2p$ dont les tangentes coïncident par couples, en sorte qu'il existe seulement p tangentes séparées. L'équation de ces dernières est précisément donnée par $\varphi_p = 0$.

Dans notre dernière équation sont encore comprises, en dehors des $2p-1$ modules, les p constantes de la fonction φ_p; on peut également se débarrasser encore de ces constantes par une transformation à détermination unique. La courbe donnée C_{p+2} se transforme en effet évidemment en une autre courbe C'_{p+2}, si l'on emploie pour la transformation un réseau de courbes adjointes du $p^{\text{ième}}$ ordre passant par $2p-2$ points simples fixes de C_{p+2}; car, en fait, ces courbes coupent C_{p+2} encore en

$$p(p+2) - p(p-1) - 2p + 2 = p + 2$$

points mobiles. Si, en particulier, la courbe C'_{p+2} qui prend naissance doit avoir encore un point multiple d'ordre p [et non $\frac{1}{2}p(p-1)$ points doubles ordinaires], il faut que dans le réseau soit compris un faisceau dont les courbes rencontrent C_{p+2} en *deux* points mobiles seulement. Mais, comme il n'existe qu'*un seul* système $g_2^{(1)}$ sur la courbe primitive, ce faisceau se composera

d'une courbe *fixe* du $(p-1)^{\text{ième}}$ ordre $\Phi_{p-1}=0$ possédant, au point multiple d'ordre p, un point multiple d'ordre $p-2$ et du faisceau de droites $x_1+\lambda x_3=0$. La courbe $\Phi_{p-1}=0$ coupe encore C_{p+2} en

$$(p-1)(p+2)-p(p-2)=3p-2$$

points simples; par $2p-p$ de ces derniers nous ferons passer une courbe $\Phi_p=0$ ayant un point multiple d'ordre $p-1$ en $x_1=0$, $x_3=0$; alors les courbes

$$(x_1+\lambda x_3)\Phi_{p-1}+\mu\Phi_p=0$$

forment un réseau de l'espèce demandée à $p+2$ points mobiles. La courbe C_{p+2} se transforme donc en une courbe C'_{p+2} à point multiple d'ordre p en $y_1=0$, $y_3=0$ au moyen de la transformation

$$\rho y_1=x_1\Phi_{p-1}(x),\quad \rho y_2=\Phi_p(x),\quad \rho y_3=x_3\Phi_{p-1}(x).$$

Ici, aux $2p+2$ tangentes de C_{p+2}, faisant partie du faisceau $x_1+\lambda x_3=0$, correspondent les $2p+2$ tangentes de C'_{p+2} faisant partie du faisceau $y_1+\lambda y_3=0$. Mais on peut, en particulier, disposer la courbe $\Phi_{p-1}=0$ de telle manière que p des points de contact des tangentes de ce dernier faisceau reviennent en arrière au point p^{iple} $y_1=0$, $y_3=0$, c'est-à-dire que les p tangentes aux branches respectives de la courbe en ce point deviennent à la fois des *tangentes d'inflexion*. Cette circonstance se produira évidemment si les p points d'intersection de C_{p+2} avec $\Phi_{p-1}=0$ qui ne sont pas situés simultanément sur la courbe $\Phi_p=0$ se confondent avec p des points de contact des tangentes du faisceau $x_1+\lambda x_3=0$; car ce sont précisément ces p points d'intersection de $\Phi_{p-1}=0$ avec C_{p+2} qui se réunissent pour former le point multiple de C'_{p+2}. Or, comme parmi les points d'intersection de Φ_{p-1} avec C_{p+2},

$$\frac{1}{2}(p-1)(p+2)-\frac{1}{2}(p-2)(p-1)=2p-2$$

peuvent encore être pris arbitrairement, on peut, *en toute hypothèse,* faire coïncider p de ces points avec p des points de contact précités; parmi les $2p-2$ points de base communs du réseau précédent, $p-2$ peuvent encore être choisis arbitrairement. Chacune des p tangentes du point multiple de la courbe C'_{p+2} ainsi

obtenue coupe déjà la courbe $p+2$ fois en ce point; si donc l'ensemble de ces tangentes est représenté par $\chi_p(y_1, y_3)=0$, l'équation de la courbe devra, pour $\chi_p=0$, être indépendante de y_2, c'est-à-dire être de la forme

$$y_2^2\chi_p(y_1,y_3)-\psi_{p+2}(y_1,y_3)=0,$$

$\psi_{p+2}(y_1,y_3)$ étant une fonction homogène du degré $p+2$ par rapport à y_1 et y_3. Les points d'intersection de $y_2=0$ avec $\psi_{p+2}=0$ sont alors les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point multiple à la courbe, abstraction faite des $p+2$ tangentes de ce point même. Aux $2p+2$ points de contact des tangentes du faisceau $x_1+\lambda x_3=0$, qui sont déterminés sur la courbe primitive par l'équation $X(x_1,x_3)=0$, correspondent donc, sur la courbe transformée, les $p+2$ points de $\psi_{p+2}(y_1,y_3)=0$ et les p points qui se trouvent infiniment voisins du point multiple $y_1=0, y_3=0$ sur les différentes branches issues de ce point. Ces derniers points satisfont à l'équation $\chi_p(y_1,y_3)=0$. Par conséquent, le produit $\chi_p.\psi_{p+2}$ étant une fonction homogène du degré $2p+2$, on doit avoir, par notre transformation des y_i en x_i,

$$\rho^{2p+2}\chi_p(y_1,y_3).\psi_{p+2}(y_1,y_3)\equiv X_{2p+2}(x_1,x_3).[\Phi_{p-1}(x)]^{2p-2};$$

de plus, on peut faire

$$\sigma\chi_p(y_1,y_3)=y_1.y_3.(y_1-y_3)(y_1-k^{(1)}y_3)\ldots(y_1-k^{(p-3)}y_3)$$
$$\sigma\psi_{p+2}(y_1,y_3)=(y_1-k^{(p-2)}y_3)(y_1-k^{(p-1)}y_3)\ldots(y_1-k^{(2p-1)}y_3).$$

L'équation de la courbe dépend donc bien des $2p-1$ modules seulement, et nous avons ce théorème :

Toute courbe hyperelliptique peut être transformée en une courbe d'ordre $p+2$, à point multiple d'ordre p, de telle façon que les tangentes ($\chi_p=0$) de ce dernier soient en même temps tangentes d'inflexion (¹), *en sorte qu'il n'en parte plus que $p+2$ autres tangentes ($\psi_{p+2}=0$). Les points de contact de ces der-*

(¹) Cette transformation a été effectuée d'une autre manière par Cremona, *Sulle trasformazione delle curve iperellipliche* (*Rendiconti del reale Istituto Lombardo*, serie II, vol. II, 29 aprile 1869).

nières sont alors situés sur une droite ($y_2 = 0$), *ainsi qu'on le reconnaît immédiatement, d'après l'équation de la courbe*

$$y_2^2 \chi_p - \psi_{p+2} = 0.$$

IV. — Généralisation des formules de correspondance. — Détermination de quelques systèmes spéciaux.

Dans nos recherches précédentes sur le théorème de Riemann et Roch, nous n'avons pas effectué réellement la détermination du nombre des solutions pour les problèmes qui s'offraient, et nous nous sommes, au contraire, contentés de démontrer la possibilité de les résoudre et de déduire de là les limites dans lesquelles elle existait. Nous nous proposons actuellement de réaliser, pour quelques cas particuliers, la détermination dont il s'agit, en nous rattachant aux formules de correspondance données plus haut.

Les développements généraux dont l'exposition préalable est nécessaire présentent d'ailleurs, indépendamment des applications qui viendront plus tard, un grand intérêt pour la théorie de l'élimination, et nous nous en occuperons, pour cette raison, avec d'assez grands détails. Il s'agit au fond, dans cette théorie, du problème suivant :

Soient données n équations

$$\varphi_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \quad \varphi_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

dans lesquelles les systèmes de variables

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \quad \ldots \quad x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}$$

entrent chacun séparément d'une façon homogène, et supposons qu'une même équation $f = 0$ *soit simultanément satisfaite pour eux tous, en sorte que l'on ait*

$$f(x^{(1)}) = 0, \quad f(x^{(2)}) = 0, \quad \ldots \quad f(x^{(n)}) = 0.$$

On demande de déterminer le nombre des groupes de chacun n points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, *situés* séparément *sur* $f = 0$, *qui satisfont en même temps aux n conditions* $\varphi_i = 0$.

Pour le cas de $n = 2$, le nombre $(\varphi\varphi')$, établi t. II, p. 153, a déjà fourni la réponse à cette question. Un examen plus approfondi de cette formule, pour l'hypothèse où les correspondances φ, φ' possèdent des *points exceptionnels,* formera le point de départ de nos considérations. Nous aurons particulièrement l'occasion de reconnaître qu'en fait l'application du principe de correspondance de Chasles est d'une très grande utilité pour le discernement des facteurs étrangers qui se présentent dans le résultat des éliminations algébriques. Nous pourrons ensuite passer, d'une manière simple, à la détermination des *assemblages ternaires de points qui satisfont simultanément à trois correspondances*. On trouvera ainsi dans ce qui suit de nombreux compléments à nos précédentes recherches sur les correspondances.

Pour donner un exemple simple de la manière de traiter les problèmes qui s'offrent ici, nous nous attacherons d'abord à des résultats connus, pour les établir d'après une méthode nouvelle et susceptible de généralisation ultérieure. Déjà, dans la théorie des transformations à détermination unique, nous avons considéré une courbe, que nous avons désignée par M, et qui était rapportée, d'une manière complètement déterminée, à une courbe primitive donnée $f = 0$ et à un réseau donné

$$\alpha_1\psi_1(x) + \alpha_2\psi_2(x) + \alpha_3\psi_3(x) = 0 \tag{1}$$

(p. 4). Cette courbe avait été définie comme étant le lieu des autres points de base d'un faisceau choisi dans le réseau (1), lorsqu'un point de base de ce faisceau parcourt la courbe $f = 0$. Nous avons déterminé l'ordre de la courbe $M = 0$, ainsi que la manière dont elle se comporte aux points fixes communs des courbes (1), et nous avons vu qu'elle passe par toutes les intersections de la jacobienne du réseau (1) avec $f = 0$, et qu'elle détermine, en outre, par ses autres intersections avec f, les *couples* de points x, y, par lesquels passe *une infinité simple* de courbes du réseau, c'est-à-dire ceux dont les coordonnées satisfont (p. 34) au système d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \psi_1(y) & \psi_2(y) & \psi_3(y) \end{matrix} \right\| = 0.$$

On peut, et c'est là en quoi ces précédentes recherches sont, à titre d'exemple très simple, importantes pour la suite, remplacer ce dernier système [en faisant abstraction de $\psi_1(x) = 0$, $\psi_1(y) = 0$] par les *deux* équations

$$(2) \quad \psi_1(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\psi_1(y) = 0, \quad \psi_1(x)\psi_3(y) - \psi_3(x)\psi_1(y) = 0,$$

lesquelles représentent, relativement à la courbe primitive $f = 0$, deux correspondances $(\nu - 1, \nu - 1)_1$ [1] symétriques par rapport aux x et aux y; à tout point x de $f = 0$ répond, en vertu de chacune de ces deux correspondances, une courbe du réseau (1) passant par x, et les autres points d'intersection de ces deux courbes décrivent la courbe $M = 0$ si x parcourt la courbe $f = 0$. On est aussi conduit à la même courbe $M = 0$, en vertu de la symétrie dont il a été parlé, si l'on considère les courbes (2) qui répondent à des points y de f. Le nombre des couples de points x, y qui satisfont aux équations (2) devra alors s'obtenir au moyen des formules de correspondance précédemment données par $(\varphi\varphi')$ (t. II, p. 153), à la condition d'avoir égard aux modifications que cette dernière peut éprouver par suite de la présence des points fixes du réseau, et de faire subir *une réduction* au nombre ainsi obtenu, en tenant compte des solutions qui correspondent aux équations $\psi_1(x) = 0$, $\psi_1(y) = 0$.

Dans le même ordre d'idées, on est conduit à prendre, au lieu des équations (2), *deux correspondances quelconques* $(\alpha, \beta)_\gamma$, $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ données sur f par les équations

$$(3) \qquad \varphi\begin{pmatrix} r & s \\ x, & y \end{pmatrix} = 0, \quad \varphi'\begin{pmatrix} r' & s' \\ x, & y \end{pmatrix} = 0.$$

Si alors x se meut sur la courbe primitive fixe, les autres points d'intersection des deux courbes, répondant à x en vertu de (3), parcourront une courbe que nous désignerons dans ce qui suit par $\mathfrak{M}_y = 0$, et l'on obtiendra une autre courbe $\mathfrak{M}_x = 0$ comme lieu des points d'intersection des courbes qui répondent aux points y de f. Les deux courbes se confondront si les deux correspondances (3) sont symétriques en x et y, comme dans le cas des équations (2). *Nous nous proposons d'abord d'exposer les*

---

(1) Sur cette notation, *voir* t. II, p. 149, et t. III, p. 2.

propriétés de ces courbes $\mathfrak{M}_y = 0$ *et* $\mathfrak{M}_x = 0$, car nous serons ainsi conduits à la détermination exacte des couples de points qui satisfont simultanément aux deux correspondances (3).

Pour éclairer la marche à suivre, qu'il nous soit permis de donner d'abord à la question posée une réponse pour le cas relativement simple des équations (2), c'est-à-dire d'étudier encore une fois la courbe $M = 0$, en partant des points de vue qui dominent ici la question. Cette étude repose essentiellement sur les applications du principe de correspondance de Chasles [1].

Supposons que les courbes ψ du réseau (1) soient de l'ordre s, et qu'elles aient, aux ρ points de base communs $S_1, S_2, \ldots, S_\rho$ respectivement, des points multiples de l'ordre $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$ (tous à tangentes séparées). Admettons que la courbe $f = 0$ soit du $n^{\text{ième}}$ ordre et possède, en $S_1, S_2, \ldots, S_\rho$ respectivement, des points multiples d'ordre $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ (ces derniers nombres pouvant d'ailleurs être nuls). Les courbes C_s du système, qui passent par un autre point arbitrairement choisi de C_n, se coupent encore en $s^2 - \Sigma t_i^2 - 1$ [2] points y qui sont situés sur la courbe $M = 0$. Actuellement, pour déterminer l'ordre m de cette dernière, on prendra dans le plan deux points fixes quelconques A et B; on fera passer par A et x une courbe C_s du réseau, puis une semblable courbe par B et x, et l'on fera mouvoir x sur C_n. Alors les points d'intersection de ces deux courbes C_s avec une droite fixe quelconque forment sur cette dernière une correspondance

$$[s(ns - \Sigma a_i t_i), \quad s(ns - \Sigma a_i t_i)].$$

Les points de coïncidence de cette correspondance sont, pour partie, des points de la courbe C_m ($M = 0$), pour partie, des points de C_n, et enfin, pour partie, des points de celle des courbes C_s du réseau qui passe à la fois par les deux points fixes A et B [3]. Chacun de ces derniers points de la droite absorbe $ns - \Sigma a_i t_i$

---

[1] L'auteur (M. Lindemann) doit la détermination suivante des propriétés de $M = 0$ et de la jacobienne du réseau (1) à une communication de M. Brill.

[2] Le signe sommatoire se rapporte à tous les ρ points fixes du réseau.

[3] Ces points doivent être choisis de telle façon qu'ils ne soient pas points de base d'un seul et même faisceau compris dans le réseau. Si A est un point d'intersection de ψ_1 avec ψ_2 et B un point d'intersection de ψ_1 avec ψ_3, les deux courbes en question sont précisément données par (2), et la courbe mentionnée en dernier lieu est $\psi_1 = 0$.

coïncidences; car c'est en ce nombre de points que la courbe précitée C_s coupe C_n, et *à chacun* d'eux correspond encore la même courbe C_s comme courbe de l'autre faisceau. On a donc la relation

$$2s(ns - \Sigma a_i t_i) = m + n + s(ns - \Sigma a_i t_i),$$

d'où l'on déduit *l'ordre de la courbe* $M = 0$ (p. 4):

$$m = n(s^2 - 1) - s\Sigma a_i t_i = \nu s - n, \tag{4}$$

$\nu = ns - \Sigma a_i t_i$ désignant le nombre des intersections mobiles d'une courbe ψ avec $f = 0$. Faisons d'ailleurs observer que, si x chemine sur C_n, les t_k tangentes (mobiles avec x), qui peuvent être menées en un point fixe S_k aux courbes C_s passant par x et A ou par x et B, forment également une correspondance

$$[t_k(ns - \Sigma a_i t_i),\ t_k(ns - \Sigma a_i t_i)].$$

Or les coïncidences de cette dernière correspondent :

1° Aux a_k tangentes de la courbe C_n en S_k;

2° Aux t_k tangentes à la courbe C_s qui passe en même temps par A et B, chacune comptant $ns - \Sigma a_i t_i$ fois comme rayon de coïncidence;

3° Aux α_k tangentes de $M = 0$ en S_k, ce nombre α_k étant précisément encore à déterminer.

Nous avons donc

$$2t_k(ns - \Sigma a_i t_i) = \alpha_k + a_k + t_k(n - \Sigma a_i t_i),$$

ce qui donne la multiplicité du point S_k *pour la courbe* $M = 0$ (p. 5):

$$\alpha_k = t_k(ns - \Sigma a_i t_i) - a_k = \nu t_k - a_k. \tag{5}$$

En combinant (5) avec (4), on obtient encore la formule symétriquement construite

$$s(a_k + \alpha_k) = t_k(n + m) \quad [1]. \tag{6}$$

Pour trouver enfin le nombre des couples de points x, y, nous aurions encore besoin de faire usage des propriétés de la jaco-

[1] Les résultats exprimés dans les équations (4), (5), (6), sont ceux qui ont été, par occasion, énoncés par Cayley pour le cas de $s = 3$, sous la dénomination de *Théorème de Geiser et Cotterill* (*Math. Annalen,* t. VIII, p. 360.)

bienne $(\psi_1\psi_2\psi_3) = 0$ (p. 15), c'est-à-dire du lieu des points où se touchent deux (et par conséquent une infinité) des courbes du réseau, où, par suite, se touchent deux courbes des faisceaux passant par A et B. Remarquons, au surplus, que l'ordre de ce lieu peut aussi être établi de la manière suivante. En dehors des points A et B, nous prendrons deux droites auxiliaires *quelconques* F et G. Par A et par un point mobile P de F, faisons passer une courbe C_s et menons-en également une autre par B et P, puis construisons les tangentes en P à ces deux courbes. Nous cherchons le nombre des points P pour lesquels ces deux tangentes coïncident. Or si autour d'un point Q, arbitrairement choisi sur F, on fait tourner une droite quelconque, et que, pour une des positions de celle-ci, on cherche celles des courbes C_s du faisceau passant par A, pour lesquelles elle est tangente, il y en aura $2(s-1)$, et le lieu des points de contact, pour toutes les positions de la droite menée par Q, est une courbe de l'ordre $2(s-1)+1 = 2s-1$ qui a un point simple en Q [1]. Cette courbe coupe la droite G en $2s-1$ points; on a donc entre les points d'intersection de G avec les couples de tangentes construites aux points P une correspondance $(2s-1, 2s-1)$. Or parmi les $4s-2$ coïncidences de cette dernière se trouvent encore, en outre des points d'intersection de G avec $(\psi_1\psi_2\psi_3) = 0$, les points d'intersection de la courbe C_s, qui passe à la fois par A et B, ainsi que le point de rencontre des deux droites G et F. Il reste conséquemment, *pour l'ordre de la jacobienne, le nombre*

$$4s-2-s-1 = 3(s-1). \tag{7}$$

On peut parvenir à des considérations tout à fait analogues si, au lieu de partir des faisceaux appartenant à un même réseau qui passent par A et B, on prend pour base deux faisceaux quelconques

$$\psi + \lambda\chi = 0, \quad \psi' + \lambda\chi' = 0,$$

de l'ordre s et de l'ordre s' respectivement; seulement, on ne doit alors apporter aucune réduction aux résultats obtenus à raison

[1] Cela résulte aussi d'un théorème général donné par Zeuthen dans son *Mémoire sur les systèmes de Courbes*, cité t. II, p. 127 (n° 29 de ce Mémoire).

d'une courbe commune aux deux faisceaux. Donc, à la place de la courbe $M = 0$, intervient une courbe de l'ordre

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &s(ns' - \Sigma a_i t'_i) + s'(ns - \Sigma a_i t_i) - n \\ &\quad = n(2ss' - 1) - s\Sigma a_i t'_i - s'\Sigma a_i t_i, \end{aligned}\right.$$

formule où les nombres t_i se rapportent aux points multiples communs du faisceau d'ordre s, et les nombres t'_i aux points multiples communs du faisceau d'ordre s'. Pour la multiplicité de cette courbe en un point t^{iple} du premier faisceau, t'^{iple} du second et a^{iple} de $f = 0$, on obtient, à la place de (5), le nombre

$$(9)\quad \alpha = t'(ns - \Sigma a_i t_i) + t(ns' - \Sigma a_i t'_i) - a$$

On trouve enfin que l'ordre du lieu des points où se touchent deux courbes des faisceaux est égal à

$$(10)\quad (2s - 1) + (2s' - 1) - 1 = 2(s + s') - 3 \quad (^1).$$

On pourrait enfin généraliser encore davantage ces résultats en remplaçant les deux faisceaux par deux systèmes de courbes, simplement infinis, des ordres s et s', ayant pour caractéristiques μ, ν et μ', ν' respectivement, et en considérant alors ces systèmes dans leur relation avec une courbe C_n *quelconque* $f = 0$ [2]. Mais, pour

---

[1] *Voir* aussi CREMONA, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven*, p. 127, dans la traduction de Curtze; il est aussi montré, p. 130 du même Ouvrage, que les tangentes communes des courbes des deux faisceaux aux points où ces courbes se touchent enveloppent en général une courbe de la classe $4ss' - 2(s + s')$. — On peut aussi utiliser deux faisceaux de l'espèce considérée ici pour une transformation à détermination unique; aux points doubles de la nouvelle courbe correspondent alors les couples de points par lesquels passe une courbe faisant partie de *chacun* des deux faisceaux (*voir* les notes des pages 42 et 62).

[2] On obtient du reste aisément, et en suivant une marche analogue, à la place de (8), le nombre

$$\mu\mu' s(ns' - \Sigma a_i t'_i) + \mu\mu' s'(ns - \Sigma a_i t_i) - \mu\mu' n = \mu\mu' [n(2ss' - 1) - \Sigma a_i(s't_i + st'_i)],$$

à la place de (9) le nombre

$$\mu\mu' [t'(ns - \Sigma a_i t_i) + t(ns' - \Sigma a_i t'_i) - a],$$

enfin, à la place de (10), le nombre

$$\mu'(\mu + \nu) + \mu(\mu' + \nu') - \mu\mu' = \mu\nu' + \nu\mu' + \mu\mu'.$$

Des réductions sont encore à apporter ici si les deux systèmes ont une courbe commune (cas de $s = s'$), ou si (pour $s > s'$) une courbe C_s du premier système se décompose en une courbe $C_{s'}$ du second et en une autre $C_{s-s'}$.

nous, le cas qui présente un intérêt extrême est celui où les deux systèmes de courbes sont liés à f par des relations d'un caractère tout à fait spécial, *car cette hypothèse se présente si deux correspondances quelconques sont données sous la forme* (3), ainsi qu'il sera montré incessamment. Nous passons donc à l'examen des faits dont il s'agit, tout en étant forcés, pour de nombreuses particularités, de nous borner à de simples indications.

Dans les équations (3), qui donnent naissance aux correspondances $(\alpha, \beta)_\gamma$, $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ sur $f = 0$ (f étant encore supposé de l'ordre n et du genre p), nous pouvons considérer les quantités y_i, par exemple, comme des coordonnées ponctuelles variables, et les quantités x_i comme trois paramètres entrant d'une façon homogène, et liés par la condition $f(x) = 0$. Une équation $\varphi(x, y) = 0$ nous représente alors un système de courbes qui dépend, de la manière la plus générale, d'un paramètre entrant d'une façon irrationnelle (t. II, p. 114). Dans les équations (3), nous avons donc deux systèmes de courbes qui sont liés avec leur paramètre par *la même* irrationnalité. Mais ces systèmes se trouvent dans des circonstances particulières à l'égard de la courbe $f = 0$, en ce que, conformément à l'hypothèse faite, les fonctions $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$ doivent, en vertu de $f = 0$, s'évanouir respectivement au degré γ et γ' pour $x = y$, tandis que ce dernier fait n'a pas lieu en général pour un point quelconque du plan. Nous pouvons exprimer la même chose en disant que, parmi les courbes du système qui passent par un point quelconque x de la courbe f, il s'en trouve toujours figurer une [savoir celle qui répond à x, en vertu de (3)], dont γ ou γ' intersections avec la courbe primitive sont situées en x même; pour chacune des autres courbes passant par x, il existe un autre point de $f = 0$, dans lequel se confondent γ ou γ' points d'intersection de cette courbe avec $f = 0$.

A l'égard du système des courbes du $s^{\text{ième}}$ ordre $\varphi = 0$, nous admettrons maintenant que les points $S_1, S_2, \ldots, S_\rho$, ainsi que leurs nombres caractéristiques $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$ et $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ aient le même sens que dans l'exemple précédent d'un faisceau; pour les courbes du $s'^{\text{ième}}$ ordre $\varphi' = 0$, nous désignerons d'une manière analogue les points qui présentent le même caractère par $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{\rho'}$, et les nombres qui leur appartiennent par $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{\rho'}$; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\rho'}$. Quelques-uns des points S', ou même tous, peuvent se con-

6.

fondre avec les points S. On a alors les relations

$$(11)\qquad \beta = ns - \Sigma a_i t_i - \gamma, \quad \beta' = ns' - \Sigma a'_i t'_i - \gamma',$$

car β, par exemple, est le nombre des points où une courbe $\varphi(x, y) = 0$, répondant au paramètre x, rencontre C_n, et qui ne sont pas situés en x même, mais sont tous mobiles avec x; et $\Sigma a_i t_i$ est le nombre des intersections fixes de la courbe $C_s(\varphi = 0)$ avec la courbe $C_n(f = 0)$. Faisons encore observer qu'il nous suffit d'avoir égard aux points S_i, pour lesquels on a $a_i \geqq 1$, c'est-à-dire qui sont situés sur $f = 0$; les autres points fixes des deux systèmes de courbes n'entrent point en considération dans ce qui suit.

Naturellement, nous aurions pu considérer les quantités y_i comme des paramètres liés par la condition $f(y) = 0$, et les quantités x_i comme des coordonnées ponctuelles. Dans cette circonstance, les équations (3) nous représentent deux systèmes de courbes d'ordre r et r' respectivement. En admettant que ces dernières possèdent les points exceptionnels fixes $R_1, R_2, \ldots, R_\sigma$ et $R'_1, R'_2, \ldots, R_{\sigma'}$, et que, par rapport à eux, les nombres corrélatifs des nombres a_i, t_i, qui répondent aux points S_i, soient α_i, τ_i, α'_i, τ'_i, nous avons également les équations

$$(12)\qquad \alpha = nr - \Sigma \alpha_i \tau_i - \gamma, \quad \alpha' = nr' - \Sigma \alpha'_i \tau'_i - \gamma'.$$

Pour déterminer maintenant *l'ordre de la courbe* $\mathfrak{M}_y = 0$, qui, en vertu de $f = 0$, est engendrée par les deux systèmes de courbes du $s^{\text{ième}}$ et du $s'^{\text{ième}}$ ordre (p. 78), nous établirons, ainsi qu'il suit, une correspondance entre les points d'une droite quelconque, semblablement à ce que nous avons fait plus haut pour la courbe $M = 0$ (p. 79). Le nombre des courbes $C_s[\varphi(x, y) = 0]$ qui passent par un point quelconque z du plan est égal au nombre des solutions communes de $\varphi(x, z) = 0$ et $f(x) = 0$ qui dépendent de z (c'est-à-dire qui ne tombent pas en des points exceptionnels fixes S_i), et il est le même pour tous les points du plan, à la seule exception des points fixes communs du système des courbes C_s. Or nous connaissons ce nombre pour le cas où z est situé sur $f = 0$, car alors il est égal, d'après (12), à $\gamma + \alpha$ [1]. Chacune des $\gamma + \alpha$

---

[1] La méthode employée ici est d'une grande utilité pour les recherches de ce genre. M. Zeuthen s'en est beaucoup servi dans le Mémoire cité. Elle consiste, rela-

courbes correspondantes C_s coupe γ fois f en *un* point déterminé, et, en ce dernier, *une* courbe déterminée $C_{s'}$ (celle qui lui répond en vertu de $\varphi' = 0$) a une intersection γ'^{iple} avec f. A un point quelconque z sur une droite fixe correspondent donc aussi $\gamma + \alpha$ courbes $C_{s'}$, et celles-ci coupent la droite en $s'(\gamma + \alpha)$ points z' correspondant au point z. Ainsi prend naissance une correspondance $[s'(\gamma + \alpha), s(\gamma' + \alpha')]$. Les points de coïncidence de celle-ci sont les points de la droite fixe où se coupent deux *courbes homologues* C_s et $C_{s'}$ (c'est-à-dire deux courbes répondant, en vertu de (3), à un même point de $f = 0$ dans lequel elles ont avec cette courbe des contacts des ordres $\gamma - 1$ et $\gamma' - 1$ respectivement); ce sont donc les points d'intersection de la droite fixe avec $\mathfrak{M}_y = 0$, et, en outre, ses n points de rencontre avec f. Par suite, *l'ordre de la courbe* $\mathfrak{M}_y = 0$ *est finalement égal à*

$$(13) \quad \begin{cases} \mu_y = s'(\gamma + \alpha) + s(\gamma' + \alpha') - \Gamma n \\ \quad = n(rs' + sr') - s'\sum \alpha_i \tau_i - s\sum \alpha'_i \tau'_i - \Gamma n, \end{cases}$$

Γ *désignant un nombre qui reste à déterminer* [1].

Nous rechercherons ensuite comment se comporte la courbe $\mathfrak{M}_y = 0$ aux points S_i et S'_i (p. 80 et p. 83). Nous avons ici à distinguer les cas suivants :

a. Le point S *est en même temps un point* S'.

b. Le point S *n'est pas en même temps un point* S'.

Dans le cas *a*, nous déterminerons le nombre ν_y au moyen d'une correspondance qui est établie entre les rayons du faisceau ayant pour sommet S_i par les deux systèmes (3), comme elle l'était dans l'exemple précédent par les deux faisceaux de courbes (p. 80).

---

tivement au nombre des solutions, à déterminer le résultat général par des cas particuliers et facilement saisissables. Elle a été désignée récemment sous le nom de *Principe de la situation spéciale*, et employée sur une grande échelle par Schubert, dans son Ouvrage intitulé : *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig, 1879; *voir* aussi *Göttinger Nachrichten*, 1874, p. 274, et *Math. Annalen*, t. X.

[1] Il sera montré incessamment que Γ est le nombre des points d'intersection situés en $x = y$ sur $f = 0$ de deux courbes *homologues* φ, φ', en sorte que le lieu des points d'intersection de semblables couples de courbes est donné par la courbe $\mathfrak{M}_y = 0$, conjointement avec $[f(x)]^\Gamma = 0$.

Ce sera là une correspondance

$$[t'_i(\gamma+\alpha),\quad t_i(\gamma'+\alpha')].$$

Parmi les coïncidences, Γa_i se produisent par confusion avec les tangentes du point a_i^{iple} que f possède en S_i. Les coïncidences de cette correspondance se rapportent effectivement, en général, au lieu des points d'intersection des deux courbes homologues C_s, $C_{s'}$ de nos deux systèmes simplement infinis; mais ce lieu se compose de la courbe $\mathfrak{M}_y$ *et* de la courbe f, cette dernière devant être comptée Γ fois *si* Γ *intersections mobiles de deux courbes homologues des correspondances* (3) *sont situées au point de* f, *qui donne précisément lieu à la dépendance respective des deux courbes* [1]. Par là est également rendu visible le sens du nombre Γ dans (13). D'autre part, la correspondance obtenue en dernier lieu nous donne ce théorème :

En un point S_i (*ou* S'_i), *qui est un point commun* t_i^{iple} *des courbes* C_s, *un point commun* $t_i'^{\text{iple}}$ *des courbes* $C_{s'}$ *et un point* a_i^{iple} *de* f, *la courbe* $\mathfrak{M}_y$ *possède un point singulier dont la multiplicité est donnée par le nombre*

$$\nu_y^{(i)} = t'_i(\gamma+\alpha) + t_i(\gamma'+\alpha') - \Gamma a_i. \tag{14}$$

Pour le cas b, c'est-à-dire si l'un des nombres t, t' est égal à zéro, *ce même résultat reste exact,* mais il doit être démontré de nouveau. Il existe $\alpha'+\gamma'$ courbes $C_{s'}$ déterminées qui passent par S et entre lesquelles figure, comptant γ' fois, la courbe $C_{s'}$ qui répond au point S lui-même. Il y a donc aussi $\alpha'+\gamma'$ courbes C_s homologues de celles-ci (p. 85). Pour tout couple de pareilles courbes homologues [2], t points d'intersection sont situés au point S, tandis que cela n'a pas lieu pour un couple quelconque de courbes

---

[1] On suppose ici, comme dans ce qui suit, que deux courbes $\varphi(x,y)=0$, $\varphi'(x,y)=0$, répondant à un même point x de f, ne se coupent plus en dehors du point x lui-même en aucun *point mobile avec* x et situé sur $f=0$. Le cas où les deux systèmes de courbes ont une courbe mobile commune est d'ailleurs toujours exclu.

[2] La courbe C_s, homologue de la courbe C_s' qui répond au point S lui-même, est, il est vrai, indéterminée; il faut la remplacer par la courbe C_s qui répond à un point voisin; pour le couple de courbes qui a cette origine, Γ autres intersections se trouvent voisines de S, circonstance qui correspond au fait que $f=0$, compté Γ fois, fait aussi partie du lieu considéré.

homologues C_s, $C_{s'}$, de telle sorte que ces t points d'intersection doivent, en toute hypothèse, être comptés parmi les points mobiles qui décrivent la courbe $\mathfrak{M}_y = 0$. Donc, tandis que pour un couple voisin ils ont encore sur $\mathfrak{M}_y = 0$ une situation séparée, ici, pour le couple considéré, ils se réunissent tous vers S. Mais, du nombre total $t(\alpha' + \gamma')$ d'intersections de tels couples de courbes qui se trouvent ainsi situées en S, il faut retrancher, comme dans le cas a, le nombre Γa_i, si la courbe $f = 0$ a un point a_i^{iple} en S.

D'une manière absolument analogue, on déduit de (13) et (14), pour la courbe $\mathfrak{M}_x = 0$ (p. 78 et suiv.) les nombres

$$(15)\quad \begin{cases} \mu_x = r'(\gamma + \beta) + r(\gamma' + \beta') - \Gamma n \\ \quad\; = n(rs' + sr') - r'\Sigma a_i t_i - r\Sigma a'_i t'_i - \Gamma n, \end{cases}$$

$$(16)\quad \nu_x^{(i)} = \tau'_i(\gamma + \beta) + \tau_i(\gamma' + \beta') - \Gamma \alpha_i.$$

Les autres recherches que nous nous proposons de rattacher à ces calculs (et en particulier la détermination du nombre Γ) prennent une tournure différente, suivant que le point de γ ou γ' valeurs des correspondances (3) en $x = y$ prend naissance ou non par contact avec la courbe primitive. (*Voir* t. II, p. 148.) Nous distinguerons les trois cas fondamentaux suivants :

1° Le point en question est produit dans φ et φ' par un point multiple des courbes C_s et $C_{s'}$ en $x = y$.

2° Il est produit dans φ et φ' par contact avec f.

3° Il est produit dans φ et φ' par des circonstances différentes.

Il est certain que si l'on n'attribuait d'importance qu'aux résultats numériques (c'est-à-dire au nombre des solutions des problèmes qui se présentent), il suffirait de traiter le second cas, puisque tous les autres peuvent se réduire à celui-là. Mais si l'on veut se rendre compte un peu à fond des circonstances algébriques qui s'offrent dans les problèmes d'élimination, il est très-utile de prêter d'abord quelque attention au premier cas. La réduction énoncée se fait de la manière suivante :

Soient p, q deux nombres choisis de telle sorte que l'on ait

$$p + r \geqq n, \quad q + s \geqq n, \quad p \geqq 0, \quad q \geqq 0;$$

introduisons deux fonctions arbitraires $\psi(x)$ et $\chi(y)$ des ordres

p, q respectivement, soit de plus A une fonction arbitraire du degré $r+p-n$ en x et du degré $s+q$ en y; nous pouvons alors prendre pour base de nos considérations, au lieu de la correspondance $\varphi(x,y)=0$, la correspondance

$$\varphi(x,y).\psi(x).\chi(y)+A.f(x)=0,$$

laquelle fait répondre à tout point x les mêmes points mobiles y, et à tout point y les mêmes points mobiles x que l'équation $\varphi(x,y)=0$; les points fixes de la correspondance sont seuls en plus grand nombre, et *le point de γ valeurs en $x=y$* prend naissance par contact, comme dans le cas n° 2.

La courbe $f=0$ sera supposée ne posséder que des points doubles ordinaires, et non des points de rebroussement ou des points multiples d'ordre élevé; *les nombres a_i, α_i ne peuvent alors prendre que la valeur* 1 *ou* 2.

1° Nous considérerons donc d'abord le cas où *le point de plusieurs valeurs en $x=y$, dans les deux correspondances, est produit par un point multiple des courbes qui répondent à x ou à y.* Nous désignerons encore les premières par C_s, $C_{s'}$; les secondes par C_r, $C_{r'}$. En tout point x de f sont dans ce cas situées $\gamma\gamma'$ intersections des deux courbes C_s, $C_{s'}$ répondant à x, si nous admettons que les γ tangentes de la première en x soient distinctes des γ' tangentes de la seconde. D'après une observation précédente (p. 86), *nous devons donc poser dans les formules* (13) *à* (16) $\Gamma=\gamma\gamma'$.

Parmi les couples de points x-y qui satisfont en même temps aux deux correspondances (3), les points y seront manifestement déterminés sur $f=0$ par les points d'intersection de $\mathfrak{M}_y=0$ (*voir* aussi p. 78) et les points x correspondants par la courbe $\mathfrak{M}_x=0$, car, pour chaque point semblable x, une autre intersection de deux courbes homologues C_s, $C_{s'}$ est située sur f. L'équation $\mathfrak{M}_y=0$ est donc le résultat de l'élimination des x_i entre les équations (3) et entre $f(x)=0$, en supposant qu'on supprime préalablement dans ce résultat certains facteurs étrangers; car, considéré en lui-même, il serait de l'ordre $n(rs'+sr')$ par rapport aux y. Parmi ces facteurs, la courbe f elle-même est comprise $\gamma\gamma'$ fois, puisque $\Gamma=\gamma\gamma'$ (p. 86). *La détermination des autres facteurs* exige l'étude spéciale de nombreux cas particuliers auxquels

il faut avoir égard, et dont l'examen complet nous entraînerait trop loin. On effectuera, au surplus, aisément cette détermination dans chaque hypothèse en s'attachant aux réflexions suivantes :

Les facteurs en question ne peuvent dépendre que des points exceptionnels des correspondances (3), car c'est là la condition de leur présence. L'exemple suivant pourra servir à expliquer comment les choses se passent dans le détail.

La courbe C_s, répondant à un point *simple* S_i de f, qui est un point commun t^{iple} des courbes C_s et un point τ^{iple} des courbes C_r, sans être en même temps un point S′, est indéterminée. A S_i appartient, au contraire, une courbe complètement déterminée $C_{s'}$, dont l'équation sera désignée par $\varphi'_s = 0$, et conséquemment *tout* point de cette courbe $\varphi_{s'} = 0$ peut être considéré comme point d'intersection de φ'_s avec la courbe C_s répondant à φ'_s; autrement dit, la courbe φ'_s est une partie du lieu des autres intersections (non situées sur f) des deux courbes homologues φ, φ', et comme telle elle doit être comptée τ_i fois, d'après l'équation (13) (α_i étant égal à 1). Nous avons donc cette proposition que, dans le résultat de l'élimination des x_i entre les équations (3) et entre $f(x) = 0$, se trouve compris le facteur $(\varphi'_s)^{\tau_i}$. Les intersections de $\varphi'_s = 0$ avec $\mathfrak{M}_y = 0$ sont alors les points de rencontre de $\varphi'_s = 0$ avec la courbe C_s qui correspond à un point de f infiniment voisin de S. On traitera de la même manière le cas où S est en même temps un point S′, etc. Si, au contraire, S est un point double de f_i, il existe deux points différents voisins de S, et, par conséquent aussi, deux courbes voisines différentes C_s; φ'_s doit donc être compté $2\tau_i$ fois, comme le demande l'équation (13).

Il faudrait encore distinguer les cas où les points S ne sont pas en même temps des points R (p. 84), et réciproquement, etc. Nous laisserons toutefois là ces développements, et nous nous contenterons, dans ce qui suit, de jeter un coup d'œil sommaire sur l'application des résultats obtenus [1].

Si parmi les points d'intersection y de deux courbes C_s, $C_{s'}$ répondant à un même point x il en est un situé sur f, ce dernier forme ensemble avec x un couple de points satisfaisant simultané-

---

[1] Nous revenons plus tard sur un de ces cas (p. 99).

ment aux correspondances (3); nous ne compterons pas, d'ailleurs, un tel couple parmi ceux cherchés si y s'est rapproché de x lui-même. Le nombre des couples dont il s'agit est donc égal au nombre des points de rencontre de f avec $\mathfrak{M}_y$ (non situés aux points fixes des courbes φ, φ' ou aux points doubles de f) *diminué du nombre des points où une branche de la courbe* C_s *qui répond à x touche une branche de la courbe* $C_{s'}$ *qui répond de même à x*. Nous imaginerons que ces derniers points sont découpés sur $f = 0$ par une courbe $\mathfrak{X}_y = 0$, dont l'ordre est aisé à déterminer. Admettons d'abord qu'il ne se rencontre aucun point exceptionnel dans les correspondances et aucun point double de f; on aura

$$(17) \qquad \mathfrak{M}_y = \mathfrak{X}_y . \mathfrak{K}_y + \mathfrak{A} f,$$

$\mathfrak{K}_y$ *étant actuellement la courbe qui découpe sur f les points y des couples cherchés x-y*. Or le nombre des points d'intersection de cette courbe avec f nous est connu (t. II, p. 153); car il est égal à $(\varphi\varphi')$, et, puisque l'ordre de $\mathfrak{M}_y$ est donné par (13), on obtient en conséquence pour l'ordre de $\mathfrak{X}_y$ le nombre

$$(18) \qquad \chi_y = \mu_y - \frac{1}{n}(\varphi\varphi') = \gamma'(r+s) + \gamma(r'+s') - 3\gamma\gamma' \quad [1].$$

Pour l'ordre de $\mathfrak{K}_y = 0$, nous avons donc le nombre

$$(19) \qquad k_y = n(rs' + sr') - \gamma(r'+s') - \gamma'(r+s) - \gamma\gamma'(n-3),$$

et il vient

$$(20) \qquad (\varphi\varphi') = n k_y = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p,$$

p étant égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Les expressions $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{X}_y$, $\mathfrak{K}_y$ et A sont des invariants fonction-

---

[1] On peut aisément aussi trouver ce nombre directement. Que l'on pose, en effet,

$$\varphi(x,y) = \alpha_x^r \beta_y^s, \quad \varphi'(x,y) = a_x^{r'} b_y^{s'},$$

la courbe $\mathfrak{X}_y = 0$ s'obtiendra par élimination des dx_i entre les équations

$$\alpha_x^r \beta^{s-\gamma} \beta_{dx}^{\gamma} = 0, \quad a_x^{r'} b_x^{s'-\gamma'} b_{dx}^{\gamma'} = 0, \quad k_{dx} = 0,$$

k_x étant égal à 1. Du résultat, qui doit être indépendant des quantités k_i, on peut séparer un facteur $k_x^{\gamma\gamma'}$; il reste alors, en fait, une expression de l'ordre (18). On peut donc aussi, à l'inverse, obtenir directement le nombre $(\varphi\varphi')$.

nels simultanés des formes fondamentales $f, \varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$, et l'équation (17) donne une relation qui existe entre elles ([1]). Mais une telle relation ne peut être modifiée, de quelque façon que puissent varier les coefficients de ces formes fondamentales; elle doit, en particulier, persister si sur la courbe f les variations dont nous parlons donnent naissance à des points doubles, cas que nous considérerons d'abord. Nous nous proposons d'ailleurs de déterminer précisément les intersections de $\mathcal{K}_y = 0$ avec $f = 0$ qui ne tombent pas aux points doubles.

Comme nous n'attribuons plus aux correspondances φ, φ' aucun point exceptionnel, deux courbes complètement déterminées C_s, $C_{s'}$ répondent au point double en question; et, parmi les intersections de celles-ci, $\gamma\gamma'$ sont situées au point double lui-même, comme en un point quelconque de f. La courbe $\mathfrak{M}_y$ ne passe donc pas par le point double, et il en est conséquemment de même, en vertu de (17), des courbes $\mathfrak{X}_y$ et $\mathcal{K}_y$. Le nombre des couples cherchés est par suite encore égal à nk_y, c'est-à-dire à

$$\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p - 2\gamma\gamma' d, \tag{21}$$

si f possède d points doubles et que $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$ désigne le genre de f. *Si donc les courbes C_s, $C_{s'}$ ne passent pas par les d points doubles de f, la valeur trouvée* (t. II, p. 153) *pour* $(\varphi\varphi')$ *doit être abaissée de* $2d\gamma\gamma'$.

Nous ferons maintenant varier les constantes des correspondances φ et φ' de manière à produire sur f des points exceptionnels. Toutefois nous ne considérerons que des cas particuliers nécessaires pour les applications ultérieures. Nous supposerons qu'un point simple x de f soit en même temps un point S et un point S′, et qu'il soit caractérisé par les nombres t, τ, t', τ' de la manière convenue. Nous déformerons d'abord la correspondance φ', de telle sorte que le point multiple d'ordre t' des courbes $C_{s'}$ (et d'ordre τ' des courbes $C_{r'}$) soit séparé de x, mais se trouve encore sur f, en y, par exemple. Alors $\varphi(x, x)$ s'évanouit au degré $t + \tau$

([1]) Le fait que, dans (17), il ne peut plus se présenter d'invariant simultané, proprement dit, comme coefficient de $\mathfrak{M}_y$ ou $\mathcal{K}_y$ se reconnaît par des raisonnements semblables à ceux établis t. II, p. 183.

de multiplicité, c'est-à-dire que la courbe φ, répondant à un point voisin de x, a en x un point multiple d'ordre $t+\tau$; par conséquent, $(t+\tau)\gamma'$ intersections de cette dernière avec la courbe φ' qui répond à x tombent en x. De même $(t'+\tau')\gamma$ intersections d'une courbe φ' répondant à un point voisin de y, avec la courbe φ qui répond à y se trouvent réunies en y. Si maintenant x coïncide avec y, il se trouvera en x

$$(t+\tau)\gamma'+(t'+\tau')\gamma$$

points d'intersection des deux courbes φ, φ' qui répondent à $x+dx$. Mais comme, pour chaque couple de deux courbes homologues φ, φ', $\gamma\gamma'$ intersections sont situées en x, le nombre des intersections qui se présentent à nouveau, *ou, en d'autres termes, le nombre qui exprime la multiplicité de $\mathcal{X}_y = 0$ en un point commun t^{iple} pour les φ et t'^{iple} pour les φ' est égal à*

$$(t+\tau)\gamma'+(t'+\tau')\gamma-\gamma\gamma'. \tag{22}$$

Ce résultat reste vrai si l'un des nombres t, t' est égal à zéro.

Dans (17), à la place de $\mathfrak{M}_y$ figure maintenant, si $t'=0$, d'après des développements précédents (p. 89), le produit $\mathfrak{M}_y(\varphi'_s)^\tau$, de telle sorte que l'équation (17) doit être remplacée par

$$\mathfrak{M}_y(\varphi'_s)^\tau = \mathcal{X}_y.\mathcal{K}_y + \mathrm{A}f. \tag{23}$$

Si t et t' sont différents de zéro, nous obtenons

$$\mathfrak{M}_y.(\varphi'_s)^\tau(\varphi_s)^{\tau'} = \mathcal{X}_y.\mathcal{K}_y + \mathrm{A}f, \tag{24}$$

$\varphi_s = 0$, $\varphi'_s = 0$ étant les deux courbes C_s, $C_{s'}$ qui répondent à un point de f voisin de S. De même, s'il se présente plusieurs points S de cette espèce, figurera avec $\mathfrak{M}_y$, dans le premier membre de (17), un produit Π_y, dont les facteurs individuels sont de la forme $(\varphi'_s)^\tau$, ... Les points cherchés y ne sont donc plus les seules intersections de la courbe $\mathcal{K}_y = 0$, mais cette courbe passe aussi par les points de rencontre de $\Pi_y = 0$ avec $f=0$. *Actuellement, les points d'évanouissement du quotient*

$$\mathfrak{L}_y = \frac{\mathcal{K}_y}{\Pi_y} = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathcal{X}_y}, \tag{25}$$

non situés aux points exceptionnels, nous donnent seuls les

points y des couples cherchés x-y. Les points correspondants x sont les points d'évanouissement d'un quotient formé corrélativement :

$$\mathfrak{L}_x = \frac{\mathfrak{H}_x}{\Pi_x} = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{X}_x}. \tag{26}$$

Nous allons déterminer le nombre de ces points d'évanouissement pour le cas considéré dans (22).

Le quotient $\mathfrak{L}_y$ s'évanouit en S, en vertu de (14), (22) et (25), à l'ordre de multiplicité

$$\left\{\begin{aligned} & t'(\alpha+\gamma)+t(\alpha'+\gamma')-\gamma\gamma'-(t+\tau)\gamma'-(t'+\tau')\gamma+\gamma\gamma' \\ & \quad = t\alpha'+t'\alpha-\tau\gamma'-\tau'\gamma \quad (^1), \end{aligned}\right. \tag{27}$$

et *le nombre des intersections simples de $\mathfrak{L}_y = 0$ avec $f = 0$ sera égal à*

$$\left\{\begin{aligned} & n(\mu_y-\chi_y)-t\alpha'-t'\alpha+\tau\gamma'+\tau'\gamma \\ & \quad = \alpha\beta'+\beta\alpha'-\gamma\gamma'(n-1)(n-2), \end{aligned}\right. \tag{28}$$

en posant maintenant

$$\alpha = nr-\tau-\gamma, \quad \beta = ns-t-\gamma,$$
$$\alpha' = nr'-\tau'-\gamma', \quad \beta' = ns'-t'-\gamma'.$$

Le nombre résultant n'est donc pas influencé par le point fixe des correspondances.

On peut, au surplus, démontrer d'une manière tout à fait analogue que, pour les points doubles de f, par lesquels passent les courbes C_s, $C_{s'}$, le nombre $(\varphi\varphi')$ apparaît sous la forme

$$(\varphi\varphi') = \alpha\beta'+\beta\alpha'-2\gamma\gamma'(p+d'),$$

si l'on entend par p le genre de f et par d' le nombre des points doubles de f qui ne sont pas des points exceptionnels des correspondances. Nous résumerons en un théorème le résultat obtenu, après de courtes explications, sur les deux autres cas mentionnés encore page 87.

2° Nous admettrons, en second lieu, que *le point de γ ou γ'*

---

(1) Ce nombre concorde avec celui qui a été obtenu d'une autre manière par Brill (*Math. Annalen*, t. VI, p. 46).

valeurs respectivement en $x = y$ pour les deux correspondances prend naissance par contact. Ce cas présente de l'intérêt, en ce sens que, d'après les considérations précédentes sur la nature de semblables correspondances, nous pouvons préciser beaucoup plus que dans le cas précédent. On peut, en effet, admettre que les deux correspondances soient données sous la forme suivante (comparer, t. II, p. 185) :

$$(29) \begin{cases} \varphi(x,y) \equiv \Phi_0(x).\varphi_0(y) + \Phi_1(x).\varphi_1(y) + \ldots + \Phi_\gamma(x).\varphi_\gamma(y) = 0, \\ \varphi'(x,y) \equiv \Phi'_0(x).\varphi'_0(y) + \Phi'_1(x).\varphi'_1(y) + \ldots + \Phi'_\gamma(x).\varphi'_\gamma(y) = 0, \end{cases}$$

$\Phi_0 = 0$ étant la courbe qui détermine sur $f = 0$ les points de contact des courbes du $s^{\text{ième}}$ ordre ayant un contact d'ordre $\gamma - 1$ qui font partie du système

$$\lambda_1 \varphi_1(y) + \lambda_2 \varphi_2(y) + \ldots + \lambda_\gamma \varphi_\gamma(y) = 0,$$

et les autres courbes $\Phi_i = 0$, $\Phi^i = 0$ étant définies de la manière correspondante. Ici, l'ordre r des courbes Φ, ainsi que leur multiplicité aux points communs des courbes φ et aux points doubles de f, est complètement donné par le mode d'existence des courbes φ. En fait, la détermination de r par s peut s'effectuer de la manière suivante ([1]). La courbe de coïncidence d'une correspondance $\varphi(x,y) = 0$ est (t. II, p. 161) de l'ordre

$$r + s + \gamma(n - 3).$$

Donc, en particulier pour $\gamma = 1$, $r = s$, la courbe de coïncidence de la correspondance

$$\varphi_0(x)\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\varphi_0(y) = 0$$

est de l'ordre $2s + n - 3$. Par suite, pour $\gamma = 2$, dans la correspondance

$$\Phi_0(x).\varphi_0(y) + \Phi_1(x).\varphi_1(y) + \Phi_2(x).\varphi_2(y) = 0 \quad \text{(t. II, p. 165)},$$

l'ordre r des Φ est égal à $2s + n - 3$, et l'ordre de la courbe de coïncidence égal en conséquence à $3(s + n - 3)$; on trouve ainsi

---

([1]) *Voir* aussi la note de la p. 183, t. II.

de même par là l'ordre de la courbe de coïncidence dans le cas de $\gamma = 3$ égal à $4\left[s + \frac{3}{2}(n-3)\right]$, et ainsi de suite. *En général, l'ordre de la courbe de coïncidence sera égal à*

$$(\gamma+1)\left[s + \frac{1}{2}(n-3)\gamma\right]. \tag{30}$$

Or les courbes du $r^{\text{ième}}$ ordre $\Phi_i = 0$ dans (29) sont des courbes de coïncidence d'une correspondance à point de $\gamma - 1$ valeurs en $x = y$; d'où

$$r = \gamma\left[s + \frac{1}{2}(n-3)(\gamma-1)\right] \quad (^1). \tag{30*}$$

Nous avons, du reste, vu (t. II, p. 164) qu'en tout point simple de f, où sont situées σ intersections fixes des courbes φ_i, se trouvent $\gamma\sigma$ intersections des courbes Φ_i, sans d'ailleurs qu'il y ait lieu de se préoccuper de savoir si les courbes φ ont à cette place un point commun multiple d'ordre σ, ou si elles y ont un contact d'ordre $\sigma - 1$ avec f, tandis que pour l'établissement du nombre $\nu_\gamma^{(i)}$ dans (14) nous avons admis expressément la première circonstance. Mais le nombre (14) est également exact pour la seconde. Supposons, en effet, que pour un point simple S_i de f (c'est-à-dire pour $a_i = 1$) on ait $t_i = 1$ et que les φ' aient en ce point un point commun multiple d'ordre t'_i : il faut alors employer une correspondance $[t'_i(\gamma+\alpha), (\gamma'+\alpha')]$ dont le nombre des coïncidences est égal à

$$t'_i(\gamma+\alpha) + (\gamma'+\alpha').$$

Si maintenant les courbes φ passent toutes ensemble par $t_i - 1$ points de f voisins de S_i, il y a $\gamma' + \alpha'$ intersections de deux courbes homologues φ, φ' qui se confondent en chacun d'eux. Par conséquent, le nombre des intersections de pareils couples de courbes qui se trouvent réunies en S_i devient égal à

$$t'_i(\gamma+\alpha) + (\gamma'+\alpha') + (t_i - 1)(\gamma'-\alpha') = t'_i(\gamma+\alpha) + t_i(\gamma'+\alpha').$$

---

(1) Le nombre β de la correspondance se trouve donc être déjà déterminé par α et γ. Ce même résultat peut être obtenu par l'application de la théorie des intégrales abéliennes de seconde espèce. (*Voir* LINDEMANN, Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 310.)

Il en faut encore retrancher le nombre Γ pour retrouver pour la multiplicité de $\mathfrak{M}_\gamma = 0$ en S_i le résultat exprimé par (14).

Un fait analogue a lieu si les φ' ont simultanément en S_i un contact d'ordre $t'_i - 1$ avec la courbe primitive, et la question se résout de même pour un point double de f (c'est-à-dire pour $a_i = 2$). Il suffit, dans ce dernier cas, de remplacer σ par $2t_i$; le nombre $\gamma(\sigma + \gamma - 1)$ donne alors encore le nombre des intersections fixes des Φ situées en un point fixe comme celui dont nous parlons.

Les nombres τ_i, τ'_i qui figurent dans les formules précédentes (12), (13), (16), (22), (27) *sont donc, pour un point simple de f,*

$$\tau_i = t_i\gamma, \quad \tau'_i = t'_i\gamma'; \tag{31}$$

pour un point double de f,

$$\tau_i = \gamma t_i + \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1), \quad \tau'_i = \gamma' t'_i + \frac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1) \tag{32}$$ [1].

Actuellement, supposons d'abord $\gamma' > \gamma$. Parmi les points d'intersection de deux courbes quelconques tangentes respectivement d'ordre $\gamma - 1$ et $\gamma' - 1$ au même point x de f, γ sont voisins de x; *il faut donc* (p. 86) *prendre $\Gamma = \gamma$ dans les formules* (13) *à* (16).

La détermination des facteurs qui, dans le résultat de l'élimination des x entre (34) et entre $f(x) = 0$, se présentent conjointement avec $\mathfrak{M}_\gamma$ et f^γ, s'effectue absolument comme dans le cas précédent, et n'a pas besoin d'être expliquée à nouveau.

On doit au contraire remarquer la manière spéciale dont se comporte ici la courbe $\mathfrak{X}_\gamma = 0$, très-importante pour l'établissement de l'équation (17), et qui détermine sur f par ses intersections les points x pour lesquels un $(\gamma + 1)^{\text{ième}}$ point d'intersection de deux courbes homologues C_s, $C_{s'}$ retombe sur x. Mais, comme nous

---

[1] Toute correspondance à point de γ valeurs en $x = y$ pouvant être réduite, à l'aide de $f = 0$ (*voir* p. 87 et suiv.), à une correspondance comme celle envisagée plus haut, les résultats énoncés dans les formules (30), (31), (32) s'appliquent encore au cas que nous avons traité en premier lieu. M. Krey suppose, dans ses recherches relatives à ce sujet (*Mathematische Annalen*, t. XII, p. 476), que toutes les courbes C_s, $C_{s'}$, C_r, $C_{r'}$ passent une seule fois *au plus* par les points exceptionnels qui sont des points doubles de f. Cependant on reconnaît par (32) que cette hypothèse ne peut jamais être admise que pour les cas de $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$.

supposons $\gamma' > \gamma$, ce $(\gamma+1)^{\text{ième}}$ point d'intersection est nécessairement situé aussi sur la courbe f, et le fait n'a lieu que dans deux cas : 1° si une courbe C_s a un contact d'ordre γ (cas où $\gamma+1$ points consécutifs sont communs), ce qui se produit aux points de coïncidence de la première correspondance (29); 2° si une courbe φ' a en x un point double, hypothèse où il y a γ points communs consécutifs seulement, mais où l'un d'eux compte double comme point de rencontre de φ et φ'. Les points de la première espèce, *dont chacun doit être compté γ' fois* ([1]), sont, d'après (30), déterminés sur f par les points de rencontre d'une courbe de coïncidence $L_\gamma = 0$ de l'ordre $(\gamma+1)\left[s+\frac{1}{2}(n-3)\gamma\right]$; les points de la seconde espèce, *dont chacun compte γ fois*, par une courbe qui se détermine de la manière suivante ([2]) :

Du premier membre de la deuxième équation (29) doit, pour $x = y$, se séparer un facteur f, en sorte que l'on a

$$\Phi'_0(x)\cdot\varphi'_0(x)+\ldots+\Phi'_\gamma(x)\cdot\varphi'_\gamma(x)=\Psi'\cdot f. \tag{33}$$

Pour les points d'intersection de Ψ' avec f, le premier membre de cette équation s'annule doublement, c'est-à-dire que la courbe φ', répondant à l'un de ces points d'intersection, y possède un point double. Par suite, les points mentionnés de la seconde espèce sont découpés par la courbe $\Psi' = 0$, relativement à l'ordre de laquelle on déduit de (33) le nombre

$$\psi' = r' + s' - n = (\gamma'+1)s' + \frac{1}{2}\gamma'(\gamma'-1)(n-3) - n. \tag{34}$$

Commençons par admettre encore que f n'ait pas de point double, et qu'aucun point fixe commun de C_s et $C_{s'}$ ne soit situé sur f; alors intervient, à la place de (17), l'équation

$$\mathfrak{M}_y = (\Psi')^\gamma (L_\gamma)^{\gamma'}\cdot\mathfrak{X}_y + A\cdot f. \tag{35}$$

On trouve par là, comme dans le cas précédent, que *l'ordre de $\mathfrak{X}_y$*

([1]) On le reconnaît immédiatement par ce qui a été dit t. II, p. 151.

([2]) Le cas de $\gamma' = \gamma$ est toujours excepté. Comparer l'exemple $\gamma' = 2$, p. 165 et 189 (note), t. II, où Ψ' devient la jacobienne des trois courbes φ'_0, φ'_1, φ'_2.

est égal, en vertu de (13), (30), (30)* et (34), à

$$(36)\quad \begin{cases} \mu_y - \gamma\psi' - \gamma'(\gamma+1)\left[s + \frac{1}{2}\gamma(n-3)\right] \\ \quad = n(rs'+sr') - \gamma(r'+s') - \gamma'(r+s) - \gamma\gamma'(n-3). \end{cases}$$

Le reste de la recherche s'effectue comme au cas précédent; il faut seulement remplacer toujours l'expression $\mathfrak{X}$ par le produit $(\Psi')^\gamma(L_\gamma)^{\gamma'}$. La manière dont se comporte ce produit aux points exceptionnels de la courbe f ou des correspondances (29) est également facile à déterminer, parce que, d'après ce qui précède, on connaît la manière dont se comporte L_γ, et qu'il est aisé de tirer de (33) ce qui est relatif à Ψ'. Les points cherchés y se trouveront finalement au moyen des points d'évanouissement simples des quotients $\mathfrak{L}_y$ de la forme (25), et les points correspondants x par ceux des quotients $\mathfrak{L}_x$ de la forme (26). A l'égard de ces quotients, le nombre (27) reste également exact; il suffit d'y exprimer, d'après (31) et (32), les nombres τ, τ' par t, t'.

Il est d'ailleurs à observer que le cas où C_s, $C_{s'}$ ni C_r, $C_{r'}$ ne passent par un point double de f ne peut pas se présenter ici. Car bien qu'on ait en un tel point $t = t' = 0$, nous avons néanmoins, d'après (32),

$$\tau_i = \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1), \quad \tau'_i = \frac{1}{2}\gamma'(\gamma'-1).$$

Or, si nous admettons la survenance d'un point de cette espèce S, il lui correspond deux courbes C_s différentes $\varphi_s = 0$, $\varphi_{s'} = 0$, et deux courbes $C_{s'}$ différentes $\varphi'_s = 0$, $\varphi'_{s'} = 0$, et à la place de (35), s'il ne se présente pas d'autres points exceptionnels, intervient l'équation

$$\mathfrak{M}_y(\varphi_s\varphi_{s'})^{\frac{1}{2}\gamma'(\gamma'-1)}(\varphi'_s\varphi'_{s'})^{\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)} = (\Psi')^\gamma(L_\gamma)^{\gamma'}\mathfrak{X}_y + Af.$$

Or de cette identité nous ne pouvons ici rien conclure, car nous ne connaissons pas encore le mode d'existence de $\mathfrak{M}_y$ en S. Mais le nombre des points cherchés y est égal au nombre des points x, qui forment un couple avec chacun d'eux. Nous pouvons donc, au lieu de $\mathfrak{M}_y$, employer l'expression $\mathfrak{M}_x$. La multiplicité de cette

dernière est, d'après (16), eu égard à (32),

$$\begin{aligned}\pi &= \pi'_i(\gamma+\beta)+\pi_i(\gamma'+\beta')-2\gamma\\ &= \frac{1}{2}\gamma'(\gamma'-1)(\gamma+\beta)+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)(\gamma'+\beta')-2\gamma,\end{aligned}$$

β étant égal à $ns-\gamma$, β' à $ns'-\gamma'$. On a d'ailleurs, d'après (35),

$$\mathfrak{M}_x = (\Psi')^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}\mathfrak{K}_x + Af. \tag{37}$$

Mais nous ne savons pas non plus comment se comporte la courbe $\Psi' = 0$ au point double S, de sorte que cette équation ne nous sert à rien. Pour résoudre la question, il nous faut recourir au résultat obtenu sous l'hypothèse étudiée en premier lieu (p. 91). Ce résultat doit en effet rester exact pour le cas actuel, comme nous l'avons fait voir au commencement de nos recherches (p. 87). *Le nombre des couples cherchés sera donc encore donné par* (21).

Le cas de $\gamma = \gamma'$ mérite une mention spéciale. On aperçoit aisément qu'il faut prendre encore ici $\Gamma = \gamma$, mais qu'il n'y a plus décomposition de la courbe $\mathfrak{X} = 0$ en courbes $(\Psi')^{\gamma} = 0$ et $(L_\ell)^{\gamma'} = 0$ et que tout demeure symétrique.

3° Enfin, quelques mots peuvent trouver place ici relativement au troisième cas cité plus haut (p. 87), *cas dans lequel le point de γ valeurs de $\varphi(x,y)$ en $x=y$ est produit par un point γ^{iple} des courbes φ, tandis que le point de γ' valeurs de $\varphi'(x,y)$ en $x=y$ est au contraire produit par un contact d'ordre $\gamma'-1$ des courbes φ'*. On doit ici prendre $\Gamma = \gamma$, indépendamment de la circonstance que γ' est plus grand ou plus petit que γ. D'ailleurs, un autre point d'intersection des deux courbes φ, φ' qui appartiennent à x se réunit à x, en premier lieu s'il intervient en x une coïncidence de $\varphi(x,y)$, en second lieu si la courbe φ' tangente en x a en x un point double. A la place de l'équation fondamentale (17) se présente alors la suivante :

$$\mathfrak{M}_y = \Psi'^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}.\mathfrak{K}_y + Af,$$

où $L_\gamma = 0$ désigne la courbe de coïncidence de $\varphi(x,y) = 0$, tandis que Ψ' est défini par l'équation (33). La détermination du mode d'existence des courbes qui se présentent ici aux points excep-

tionnels des correspondances se fait encore comme précédemment.

Nous résumerons enfin dans la proposition suivante les résultats obtenus, dans la mesure au moins où nous devons plus tard en faire usage.

Lorsque deux correspondances $(\alpha, \beta)_\gamma$ *et* $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$, *pouvant posséder des points exceptionnels (fixes) quelconques, sont données par deux équations* $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi'(x, y) = 0$, *le nombre des couples x-y qui satisfont à toutes les deux et sont formés chacun par deux points séparés est égal à*

$$(38) \qquad (\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma'(p + D).$$

s'il existe D *points doubles de f par lesquels ne passent pas toutes ensemble les courbes* φ, φ' *répondant à x* [1]. *Les points y sont ici les points racines simples, non situés en des points exceptionnels, du quotient* $\mathfrak{L}_y = \frac{\mathfrak{K}_y}{\Pi}$, Π *désignant le produit connu déterminé par les points exceptionnels et qui se présente dans* (23), (24) *comme facteur de* $\mathfrak{M}_y$. *La multiplicité de* $\mathfrak{L}_y$, *pour un point exceptionnel d'ordre t ou t' des courbes répondant à x en vertu de* $\varphi = 0$ *ou* $\varphi' = 0$, *si ce point est un point simple de f, est donnée par le nombre* (27), *lequel devient, en vertu de* (31), $t\alpha + t'\alpha - \gamma\gamma'(t + t')$, (*quelques-uns des nombres* t, τ, t', τ' *pouvant être individuellement nuls*). *De même les points correspondants x sont les points racines simples, non situés aux points exceptionnels, d'un quotient* $\mathfrak{L}_x$.

---

[1] Il faudrait distinguer au premier abord trois cas différents, savoir :

1° $s < r$ et $s' < r'$, r et r' étant donnés en toute hypothèse par (30)*; c'est à ce cas que nous nous sommes bornés dans les remarques précédentes, en partant des équations (29). Les courbes qui répondent à y passent toujours par les points doubles de f. (*Voir* p. 98 et la note de la p. 96.)

2° $s < r$ et $s' > r'$; r s'exprime par s, d'après (30)*, mais s' est déterminé par r', en vertu d'une relation analogue.

3° $s > r$ et $s' > r$.

Néanmoins, il n'est pas nécessaire d'étudier plus à fond les deux derniers cas, car on peut les ramener au premier en se servant de la loi de réciprocité qui existe entre les courbes φ, φ' et Φ, Φ' figurant dans (29). (*Voir* t. II, p. 175 et suiv.)

Toutefois, au cas où chacune des correspondances φ et φ' reste invariable par permutation de x avec y, le nombre des couples de points est égal à $\frac{1}{2}(\varphi\varphi')$, les courbes $\mathfrak{L}_x = 0$ et $\mathfrak{L}_y = 0$ coïncidant alors l'une avec l'autre (¹).

Une circonstance où il y a ainsi symétrie se rencontre dans l'exemple d'où nous sommes partis, et dans lequel la courbe $\mathfrak{M}_y \equiv \mathfrak{M}_x = 0$ doit être remplacée par la courbe $M = 0$ (p. 77 et suiv.). Ici, nous obtenons une équation de la forme

$$M.\Pi = (\psi_1 \psi_2 \psi_3).\mathfrak{X}_y + Af,$$

dans laquelle la jacobienne du réseau considéré a pris la place de la courbe $\mathfrak{X}_y = 0$, et Π est une expression dépendant des points fixes des courbes du réseau. Du nombre $\frac{1}{2}(\varphi\varphi')$ il faut ici retrancher encore le nombre $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ des couples de points x-y, situés sur $\psi_1 = 0$, qui satisfont aussi aux deux correspondances (2) (ν désignant le nombre des points d'intersection mobiles des courbes du réseau avec f). Le nombre des couples de points cherchés est donc, en tenant compte de $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = \nu - 1$,

$$(39)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi\varphi') - \frac{1}{2}\nu(\nu-1) = (\nu-1)^2 - p - \frac{1}{2}\nu(\nu-1) - D \\ \quad = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + d'', \end{cases}$$

si toutes les courbes ψ passent par d'' points doubles de f, et ce nombre concorde en fait avec celui qui a été trouvé pour γ (p. 16).

(¹) Une symétrie de cette nature se présente, par exemple, si le point γ^{iple} des courbes en $x = y$ prend naissance par le fait que la courbe répondant à x se décompose en γ courbes séparées, de telle manière qu'on ait à considérer, par exemple, un système simplement infini de courbes parmi lesquelles γ passent par tout point du plan. Les cas non encore examinés dans le texte, et où des branches particulières du point multiple des courbes φ touchent la courbe f, etc., se résolvent par combinaison des méthodes employées pour les hypothèses séparées. D'ailleurs, le résultat numérique reste toujours le même. (*Voir* p. 87.)

Nous nous proposons de faire usage de la formule établie relativement à ($\varphi\varphi'$) pour traiter quelques exemples dont plusieurs nous seront utiles incessamment; nous passerons ensuite à l'établissement d'une formule similaire pour trois correspondances. Ces exemples se référeront à la considération *d'une famille linéaire de courbes dépendant de trois paramètres* [1], savoir :

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \lambda_4\varphi_4(x) = 0. \tag{40}$$

Nous admettons, pour plus de simplicité, que toutes les courbes de la famille soient adjointes à f (c'est-à-dire qu'elles passent par les points doubles de f) et qu'elles rencontrent en outre f en M points mobiles. Les diverses propositions que nous allons établir ont été choisies, pour partie, en tenant compte de problèmes que nous traiterons plus tard et qui montreront clairement la connexion, mentionnée en commençant, de ces explications avec la théorie des systèmes spéciaux. Nous distinguerons les différents exemples par des lettres majuscules.

A. Par tout point de f passe un réseau de courbes du système (40) à $M - 1$ points d'intersection mobiles; *on peut donc pour tout point de f trouver, d'après* (39),

$$N = \frac{1}{2}(M-2)(M-3) - p \tag{41}$$

couples de points tels que par chaque groupe ternaire ainsi formé passe un nombre simplement infini de courbes du système (40).

B. *On demande de déterminer le nombre de ceux des faisceaux de courbes compris dans* (40) *dont les courbes se touchent toutes en un point et y ont en même temps un contact du premier ordre avec $f = 0$, tandis qu'un autre point de base (lequel est mobile)*

---

[1] Les exemples dont il s'agit présentent un intérêt particulier pour la théorie des courbes de l'espace. (*Voir* Brill, *Math. Annalen*, t. IV, p. 522, et t. VI, p. 50.)

est situé sur f [1]. Nous extrairons d'abord du système (40) l'ensemble des courbes, en nombre doublement infini, qui touchent f, et de cet ensemble doublement infini les deux systèmes simplement infinis qui passent respectivement par deux points fixes A et B non situés sur f. Par A et par un point quelconque de f passent alors, d'après la formule de la p. 171, t. II, encore $2(M+p-2)$ courbes tangentes. Les deux systèmes simplement infinis nous donnent donc sur f deux correspondances

$$[M-2,\ 2(M+p-2)]_2$$

et le nombre de leurs couples communs est égal à

$$4(M-2)(M+p-2)-8p.$$

Or par A et B passent encore $2(M+p-1)$ courbes tangentes qui sont communes aux deux correspondances; et le point de contact de chacune d'elles forme avec chacun de leurs autres $M-2$ points d'intersection un couple de l'espèce cherchée. *Le nombre demandé est par conséquent égal à*

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &4(M-2)(M+p-2)-8p-2(M-2)(M+p-1)\\ &\quad =2(M-2)(M-3)+2p(M-6). \end{aligned}\right.$$

C. *On demande de trouver sur* f *le nombre des groupes ternaires de points par lesquels passent les courbes en nombre simplement infini et formant un faisceau du système* (40) *dans lequel se rencontre dans un faisceau de cette nature une courbe qui touche* f *en deux des trois points du groupe ternaire.*

A tout point z de f répondent, d'après (41),

$$N=\frac{1}{2}(M-2)(M-3)-p$$

couples de points x-y, en sorte que par z, x et y passe encore un faisceau de courbes du système (40). Ces $2N$ points (les points x et

(1) Ce nombre est égal au nombre des tangentes d'une courbe gauche d'ordre M et de genre p qui rencontrent encore une fois la courbe dont il s'agit, tandis que (41) donne le nombre des cordes triplement sécantes qui passent par un point quelconque de cette même courbe.

les points y à cause de la symétrie) sont, d'après ce qui précède (p. 92), les zéros simples d'un quotient $\mathfrak{L}_y = \frac{\mathfrak{K}_y}{\Pi}$ dans lequel $\mathfrak{K}_y$ et Π dépendent rationnellement des coordonnées du point z; car l'équation $\mathfrak{L}_y = 0$ prend ici naissance par élimination de x entre $f(x) = 0$ et entre le système d'équations

$$(43) \qquad \begin{Vmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette observation permet en même temps de reconnaître que $\mathfrak{L}_y$ est *symétrique en y et z*. Eu égard à ce fait, nous écrirons $\mathfrak{L}_{yz}$ au lieu de $\mathfrak{L}_y$, $\mathfrak{L}_{yz} = 0$ nous donnant ainsi entre y et z une correspondance en vertu de laquelle à tout point y répondent $2N$ points z et à tout point z $2N$ points y, *correspondance dont la multiplicité de valeur en $y = z$ est donnée par le nombre*

$$(44) \qquad 2(M-2) - 2 - (M-2) = M - 4.$$

C'est là une conséquence de ce que, dans (27), on a à poser

$$t = t' = \tau = \tau' = \gamma = \gamma' = 1, \quad \alpha = \alpha' = M - 2;$$

il faut alors retrancher, du nombre résultant, $M - 2$, à cause de la courbe qui passe par A, B et z, A, B étant deux points quelconques du plan introduits, comme précédemment dans un réseau, pour l'établissement des correspondances (p. 79). Or, nous pouvons employer la correspondance à laquelle nous avons affaire, bien qu'elle ne soit pas représentée par l'évanouissement d'une fonction entière de z, y, de la même manière qu'une correspondance ordinaire, *tant que les nombres caractéristiques α, β, γ (ici les nombres respectifs,* $2N$, $2N$, $M - 4$) *ne figurent que linéairement*. Si nous désignons en effet ces nombres pour $\mathfrak{K}_{yz}$ par a, b, c, pour Π par a', b', c', on a

$$\alpha = a - a', \quad \beta = b - b', \quad \gamma = c - c'$$

et puisque $\mathfrak{K}_{yz}$ passe par tous les points de rencontre de Π avec f, le nombre des coïncidences devient égal à

$$a + b + 2cp - (a' + b' + 2c'p) = \alpha + \beta + 2\gamma p;$$

enfin le nombre des couples de points qui lui sont communs avec une autre correspondance $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ [1] est égal à

$$a\beta' + b\alpha' - 2c\gamma' p - a'\beta' - b'\alpha' + 2c'\gamma' p = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p.$$

Nous ferons plusieurs fois usage de cette remarque.

Il existe d'ailleurs dans le système (40) $2(M + p - 3)$ courbes qui touchent f en z et en un autre point y, ce qui nous donne une correspondance

$$[2(M + p - 3),\ 2(M + p - 3)]_4.$$

Comme, d'autre part, nous avons trouvé une correspondance $(2N, 2N)_{M-4}$ représentée par $\mathfrak{L}_{yz} = 0$, le nombre des groupes ternaires cherchés devrait être d'abord égal à

$$\begin{aligned} &8N(M + p - 3) - 8(M - 4)p \\ &= 8N(M + p - 1) - 8(M - 2)(M - 3) - 8(M - 6)p. \end{aligned}$$

Mais dans ce nombre sont compris, chacun comptant deux fois, les groupes ternaires déterminés par (42); car, s'il existe un nombre simplement infini de courbes tangentes en z et passant en outre par x et y, il y a parmi elles, en toute hypothèse, une courbe qui est tangente à la courbe primitive en x et une autre qui lui est tangente en y. Si donc nous retranchons du nombre trouvé le double du nombre (42), le *nombre cherché ici sera égal à*

$$(45) \quad 8N(M + p - 1) - 12(M - 2)(M - 3) - 12(M - 6)p.$$

Ce nombre donne en même temps, comme il est aisé de le voir, *le nombre des points x de f pour lesquels deux des* N *couples de points correspondants* (41) *sont situés infiniment près les uns des autres*. Si en effet une courbe du système triplement infini passe par x et est tangente en y et z, elle appartient en même temps au faisceau déterminé par y et à celui déterminé par $z + dz$ qui fait

---

[1] Il n'est pas non plus nécessaire que cette autre correspondance soit représentable par l'évanouissement d'une fonction entière. (*Voir* la note de la p. 110.)

Dans la circonstance que nous avons reconnu la représentabilité des correspondances qui se rencontrent ici, sous la forme $\mathfrak{L}_{yz} = 0$, se trouve précisément la grande utilité des explications qui précèdent pour les questions qui s'offrent actuellement; car c'est par là seulement que la formule de correspondance devient applicable. (*Voir* la note de la page 153, t. II.)

partie du réseau passant par x. Mais ce dernier faisceau a un autre point de base dans le voisinage de y, et ce point doit en même temps être situé sur f, puisque la courbe de ce faisceau de laquelle il a été parlé passe par le point $y+dy$ voisin de y sur f. Donc les points y, z d'une part et les points $y+dy$, $z+dz$ d'autre part forment un des N couples de points qui répondent à x.

D. *On demande d'obtenir sur f le nombre des groupes quaternaires par lesquels passe un nombre simplement infini de courbes du système (40), c'est-à-dire le nombre des solutions communes du système d'équations*

$$f(x)=0,\quad f(y)=0,\quad f(z)=0,\quad f(\xi)=0,$$

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(y) & \varphi_1(z) & \varphi_1(\xi) & X_1 \\ \varphi_2(x) & \varphi_2(y) & \varphi_2(z) & \varphi_2(\xi) & X_2 \\ \varphi_3(x) & \varphi_3(y) & \varphi_3(z) & \varphi_3(\xi) & X_3 \\ \varphi_4(x) & \varphi_4(y) & \varphi_4(z) & \varphi_4(\xi) & X_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

les quantités X_i étant des grandeurs arbitraires, de telle façon que l'on puisse remplacer cette dernière relation par l'évanouissement de tous les déterminants mineurs du déterminant $\Sigma \pm \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)\varphi_4(\xi)$.

Par tout point z de f passe une courbe $\mathfrak{L}_{yz}=0$, qui possède, d'après (44), en $y=z$ un point de $M-4$ valeurs et qui, d'après (41), détermine sur f 2N autres points $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(2N)}$. Ces points se rangent en N couples, tout point $y^{(i)}$ formant avec un autre point, que nous désignerons par $y^{(N+i)}=x^{(i)}$, un couple tel que par $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ et z passe encore un nombre simplement infini de courbes du système (40). Construisons maintenant pour chaque point $y^{(i)}$ la courbe correspondante $\mathfrak{L}_{y^{(i)}\eta}=0$, qui est à l'égard de $y^{(i)}$ ce qu'est $\mathfrak{L}_{zy}=0$ par rapport à z. Cette courbe s'évanouit $M-4$ fois en $y^{(i)}=\eta$, passe une fois par $x^{(i)}$ et par z et détermine en outre sur f par ses intersections $2N-2$ points η (non situés sur $\mathfrak{L}_{zy}=0$) qui se rangent de nouveau en couples η, ξ. Désignons par $\Pi_{z\eta}$ le produit de toutes les expressions $\mathfrak{L}_{y^{(i)}\eta}$; alors l'équation

$$\Pi_{z\eta} \equiv \mathfrak{L}_{y^{(1)}\eta}\cdot\mathfrak{L}_{y^{(2)}\eta}\cdots\mathfrak{L}_{y^{(N)}\eta}\,\mathfrak{L}_{x^{(1)}\eta}\,\mathfrak{L}_{x^{(2)}\eta}\cdots\mathfrak{L}_{x^{(N)}\eta}=0$$

représente une courbe correspondant à z qui s'évanouit $M-4+1$

fois en tout point $y^{(i)}$ et $2N$ fois en z, et qui de plus détermine sur f par ses intersections $2N(2N-2)$ points η, chacun comptant une fois. Si l'on prend parmi ces derniers un point η et le correspondant ξ, on a, en partant d'un point $y^{(i)}$, les relations suivantes. Les points z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ forment un groupe ternaire de l'espèce considérée dans l'hypothèse A; les points $y^{(i)}$, η, ξ forment un second groupe ternaire ainsi défini : toute courbe du système triplement infini qui passe par $y^{(i)}$ et z passe aussi par $x^{(i)}$, et toute courbe qui passe par $y^{(i)}$ et η passe aussi par ξ.

Actuellement, pour des positions particulières de z, il peut arriver que η coïncide avec z, et alors chaque courbe menée par $y^{(i)}$ et z passe aussi bien par $x^{(i)}$ que par ξ, c'est-à-dire que les points z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$, ξ forment un groupe quaternaire de l'espèce cherchée. Toutefois η ne doit pas ici se confondre avec $y^{(i)}$, c'est-à-dire se trouver parmi les points découpés sur f par $\mathfrak{L}_{z\eta}=0$, points par chacun desquels, d'après ce qui précède, $\Pi_{z\eta}$ passe $M-3$ fois. Les points cherchés z sont donc les points de coïncidence de la correspondance représentée par l'équation

$$\frac{\Pi_{z\eta}}{(\mathfrak{L}_{z\eta})^{M-3}}=0,$$

correspondance qui, d'après les remarques ci-dessus sur $\Pi_{z\eta}$, possède en $z=\eta$ un point de la valeur

$$2N-(M-3)(M-4)=2(M-3)-2p.$$

Le nombre de ses points de coïncidence est, d'après les explications données dans l'hypothèse C, égal à

$$\begin{aligned}&2N(2N-2)+2N(2N-2)+2p[2(M-3)-2p]\\&=2(M-1)(M-2)(M-3)(M-4)-4p(2M^2-11M+13)+4p^2.\end{aligned}$$

Mais si η coïncide avec z, il peut arriver en même temps que le point correspondant ξ coïncide avec $x^{(i)}$, cas où les deux groupes ternaires z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ et $y^{(i)}$, η, ξ deviennent identiques; $y^{(i)}$ est donc alors un des points considérés dans l'hypothèse C, pour lequel deux des N couples correspondants (41) se confondent. Nous avons par suite encore à soustraire du nombre trouvé le nombre (45). Comme d'ailleurs les points z, y, x, ξ entrent symétriquement dans chacun des groupes quaternaires restants, il

nous faut encore diviser le reste par 2. 3. 4 = 24. *Le nombre des groupes quaternaires cherché se trouve finalement, d'après cela, être égal à*

$$(46)\quad \frac{1}{12}(M-2)(M-3)^2(M-4)-\frac{1}{2}p[(M-3)(M-4)-p+1].$$

Ces résultats étant ainsi obtenus à l'égard de deux correspondances simultanées et du nombre de leurs coïncidences, nous en ferons actuellement usage pour la considération simultanée de trois correspondances entre trois points x, y, z de la courbe primitive (p. 77). A ce sujet se rattachera l'examen d'un exemple très instructif pour la théorie des systèmes spéciaux.

Soient donc données les trois équations

$$(47)\qquad \varphi_1(x,y,z)=0,\quad \varphi_2(x,y,z)=0,\quad \varphi_3(x,y,z)=0$$

et

$$f(x)=0,\quad f(y)=0,\quad f(z)=0;$$

trouver le nombre des groupes ternaires composés de trois points situés séparément qui satisfont simultanément à ce système d'équations. Supposons que, en vertu des conditions $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, à tout couple de points x, y respondent respectivement μ_1, μ_2, μ_3 points z de f non situés en x ou y, qu'à tout couple y, z répondent de même respectivement $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ points x, et à tout couple z, x respectivement λ_1, λ_2, λ_3 points y. Admettons ensuite qu'une équation $\varphi_i=0$ s'évanouisse à l'ordre α_i pour $y=z$, à l'ordre β_i pour $z=x$, à l'ordre γ_i pour $x=y$. Supposons en outre, pour plus de simplicité, que les courbes répondant à y-z, z-x ou x-y en vertu des équations (47) passent par *tous* les points doubles de $f=0$ [1].

L'élimination de x, y ou z entre $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ et $f=0$ nous donne d'abord les équations [2]

$$(48)\qquad \mathfrak{L}_{12}(y,z)=0,\quad \mathfrak{L}_{12}(z,x)=0,\quad \mathfrak{L}_{12}(x,y)=0,$$

---

[1] Les modifications qu'il sera nécessaire d'apporter dans le cas contraire, principalement aux nombres $(\varphi_i\varphi_k)_{xy}$, etc., sont faciles à déterminer, d'après ce qui a été dit p. 91.

[2] Sur l'emploi de semblables correspondances représentées par des fonctions fractionnaires, *voir* ce qui a été dit plus haut, problème C.

où les fonctions $\mathfrak{L}_{ik}$ (comme à la page 92) ne sont pas nécessairement des fonctions entières. Le nombre des points x qui sont associés à un point z en vertu de $\mathfrak{L}_{12}(z, x) = 0$ est alors égal à $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$, ce dernier nombre désignant le nombre des couples de points x, y qui, dans l'hypothèse de z fixe, satisfont simultanément aux correspondances $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, en sorte que l'on ait

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{xy} = \varkappa_1 \lambda_2 + \varkappa_2 \lambda_1 - 2\gamma_1 \gamma_2 p.$$

C'est également là la mesure du nombre des points y qui répondent à z en vertu de $\mathfrak{L}_{12}(y, z) = 0$, et la signification correspondante se retrouvera dans les nombres suivants :

$$(49) \quad \begin{cases} (\varphi_i \varphi_k)_{yz} = \lambda_i \mu_k + \lambda_k \mu_i - 2\alpha_i \alpha_k p, \\ (\varphi_i \varphi_k)_{zx} = \mu_i \varkappa_k + \mu_k \varkappa_i - 2\beta_i \beta_k p, \\ (\varphi_i \varphi_k)_{xy} = \varkappa_i \lambda_k + \varkappa_k \lambda_i - 2\gamma_i \gamma_k p. \end{cases}$$

Désignons ensuite par $[yz]_{ik}$ la multiplicité de valeur du point $y = z$ dans l'équation $\mathfrak{L}_{ik}(y, z) = 0$, c'est-à-dire dans le résultat de l'élimination de x entre les équations $\varphi_i = 0$, $\varphi_k = 0$; nous aurons alors, d'après (27),

$$(50) \quad \begin{cases} [yz]_{ik} = \alpha_i \varkappa_k + \alpha_k \varkappa_i - \beta_i \gamma_k - \beta_k \gamma_i, \\ [zx]_{ik} = \beta_i \lambda_k + \beta_k \lambda_i - \gamma_i \alpha_k - \gamma_k \alpha_i, \\ [xy]_{ik} = \gamma_i \mu_k + \gamma_k \mu_i - \alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i. \end{cases}$$

Par le point z et par chacun des $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ points x associés à z en vertu de $\mathfrak{L}_{12}(x, z) = 0$, faisons passer la courbe $\varphi_3(x, y, z) = 0$ qui correspond à ce point x et à z. Toute courbe de cette espèce a encore λ_3 autres points d'intersection y, tandis qu'en outre γ_3 sont situés en x et α_3 en z. Le produit de toutes ces courbes égalé à zéro, ou autrement dit le résultat de l'élimination de x entre $\mathfrak{L}_{12}(x, y) = 0$, $\varphi_3 = 0$ et $f(x) = 0$,

$$\Pi_{yz} \equiv \varphi_3(x^{(1)}, y, z) \cdot \varphi_3(x^{(2)}, y, z) \ldots \varphi_3(x^{(\rho)}, y, z) = 0,$$

ρ étant égal à $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$, représente alors une correspondance entre y et z, en vertu de laquelle à un point z de la courbe primitive sont associés $(\lambda_3 + \gamma_3)(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ points y. Parmi ces derniers, $\gamma_3(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ sont situés aux points de rencontre x de la courbe $\mathfrak{L}_{12}(x, z) = 0$ avec f; *à cause de ces points qui tombent en $x = y$, nous aurons donc plus tard à opérer une réduction.* En

$y = z$ la correspondance $\Pi_{yz} = 0$ a d'ailleurs un point de la multiplicité de valeurs $\alpha_3(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$. Le nombre des points z qui, inversement, répondent à y ne doit pas être immédiatement tiré de l'expression choisie pour Π_{yz}, parce que les quantités $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\rho)}$ dépendent encore de z, mais ce nombre doit être égal au nombre des couples de points x-z qui, en vertu des équations $\mathfrak{L}_{12}(y, z) = 0$, $\varphi_3 = 0$, répondent à un point y donné, et dont les points z ne sont pas situés en y (les points homologues x ne pouvant d'ailleurs se confondre avec z, mais le pouvant avec y), c'est-à-dire que le nombre en question sera égal au nombre

$$(\varphi_1\varphi_2)_{yz}(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\beta_3[xz]_{12}.$$

La correspondance $\Pi_{yz} = 0$ doit nécessairement être satisfaite pour qu'il existe par rapport à y, z un troisième point x tel que le groupe ternaire x, y, z satisfasse aux trois équations $\varphi_i = 0$. Une seconde correspondance nécessaire de cette espèce entre y, z est donnée par la condition $\mathfrak{L}_{12}(y, z) = 0$, et cette correspondance est de la forme

$$[(\varphi_1\varphi_2)_{xy}, (\varphi_1\varphi_2)_{xz}]_{[yz]_{12}}.$$

Nous trouverons par suite le nombre de leurs couples communs à toutes les deux égal à [1]

$$\begin{aligned}(\varphi_1\varphi_2)_{xy}\big\{(\varphi_1\varphi_2)_{yz}(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\beta_3[xz]_{12}\big\}\\ + (\varphi_1\varphi_2)_{xz}(\varphi_1\varphi_2)_{xy}(\lambda_3 + \gamma_3) - 2p[yz]_{12}\alpha_3(\varphi_1\varphi_2)_{xy}.\end{aligned}$$

---

(1) On peut aussi, en fait, employer directement la formule relative à $(\varphi\varphi')$ pour la détermination des couples communs de deux correspondances données sous la forme

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)} = 0, \quad \varphi'(x, y) \equiv \frac{\Phi'(x, y)}{\Psi'(x, y)} = 0,$$

Φ, Φ' passant respectivement par tous les points de rencontre de Ψ, Ψ' avec f, tandis que la réalisation de la division n'est pas possible, à cause des circonstances qui se présentent aux points fixes, etc.

Soient, en effet, les correspondances Φ, Ψ, Φ', Ψ' respectivement caractérisées par les nombres

$$(a + \alpha, b + \beta)_{c+\gamma}, \quad (a, b)_c, \quad (a' + \alpha', b' + \beta')_{c'+\gamma'}, \quad (a', b')_{c'};$$

il faudra retrancher du nombre des couples communs des correspondances Φ, Φ', c'est-à-dire du nombre

$$(a + \alpha)(b' + \beta') + (a' + \alpha')(b + \beta) - 2(c + \gamma)(c' + \gamma')p:$$

Ce nombre indique combien de couples de points x-z en $\mathfrak{L}_{12}(x, z)$ forment conjointement avec un couple y-z en $\mathfrak{L}_{12}(y, z)$ un groupe ternaire x-y-z de $\varphi_3 = 0$. Mais, pour chacun des $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ couples x-z répondant à z [en vertu de $\mathfrak{L}_{12}(x, z) = 0$], il n'y en a qu'un seul, parmi les $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ couples y-z, qui satisfasse aussi à la troisième équation (48), savoir $\mathfrak{L}_{12}(x, y) = 0$, c'est-à-dire qui puisse donner lieu à un groupe ternaire commun des trois équations $\varphi_i = 0$. Or, comme nous avons considéré toujours uniformément tous les $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ couples, il nous faut conséquemment diviser encore le nombre trouvé par $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$; ce nombre devient alors égal à

$$\begin{aligned}(\varphi_1\varphi_2)_{yz}(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1\varphi_2)_{xz}(\lambda_3 + \gamma_3)\\ + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\{[yz]_{12}\alpha_3 + [xz]_{12}\beta_3\}.\end{aligned}$$

Mais, d'après ce qui précède (p. 109), sont encore compris dans ce total les groupes ternaires pour lesquels x coïncide avec y. Cette circonstance ne peut se présenter qu'aux points de coïncidence de l'équation $\mathfrak{L}_{12}(x, y) = 0$, puisque tous les groupes ternaires trouvés doivent satisfaire à cette dernière, et pareillement aussi *chacun* de ces

$$(\varphi_1\varphi_2)_{xz} + (\varphi_1\varphi_2)_{yz} + 2[xy]_{12}p$$

points de coïncidence donnera lieu à un groupe ternaire improprement dit de la nature dont il s'agit, groupe comptant γ_3 fois à cause du point de γ_3 valeurs de φ_3 en $x = y$. On obtient donc le nombre

$$\begin{aligned}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = (\varphi_1\varphi_2)_{yz}\varkappa_3 + (\varphi_1\varphi_2)_{zx}\lambda_3\\ + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\{[yz]_{12}\alpha_3 + [zx]_{12}\beta_3 + [xy]_{12}\lambda_3\},\end{aligned}$$

et enfin, comme ce nombre doit dépendre symétriquement de φ_1, φ_2, φ_3 [ce dont on s'assure facilement aussi par le calcul en ayant égard à (49) et (50)], on a la proposition suivante :

Le nombre des groupes ternaires qui satisfont simultanément

1° le nombre $ab' + ba' - 2cc'p$ des couples communs de Ψ et Ψ';

2° le nombre $a\beta' + b\alpha' - 2c\gamma'p$ des couples communs de Φ' et Ψ;

3° le nombre $\alpha'\beta + b'\alpha - 2c'\gamma p$ des couples communs de Φ et Ψ'.

Il reste alors de nouveau le nombre $\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma'p$, ce qu'il fallait démontrer.

aux trois correspondances (47) *et se composent chacun de trois points de f séparés les uns des autres, est donné par l'une des trois formules* $(r, s, t = 1, 2, 3)$:

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) &= (\varphi_r\varphi_s)_{yz}\varkappa_t + (\varphi_r\varphi_s)_{zx}\lambda_t \\ &\quad + (\varphi_r\varphi_s)_{xy}\mu_t - 2p\{[yz]_{rs}\alpha_t + [zx]_{rs}\beta_t + [xy]_{rs}\lambda_t\},\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $\varkappa_i$, λ_i, μ_i *ont les significations précédentes, et en outre* $(\varphi_i\varphi_k)_{yz}$, ..., *sont définis par* (49), $[yz]_{ik}$, ..., *par* (50). *Si en particulier chacune des correspondances est formée symétriquement par rapport à chaque variable, cas où l'on a nécessairement*

$$\varkappa_i = \lambda_i = \mu_i, \quad \alpha_i = \beta_i = \gamma_i,$$

le nombre des groupes ternaires communs devient [1]

$$(52)\quad \frac{1}{6}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - p(\varkappa_1\alpha_2\alpha_3 + \varkappa_2\alpha_3\alpha_1 + \varkappa_3\alpha_1\alpha_2) + 2p\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Faisons encore observer que la formule (51) ne cesse pas d'être vraie lorsque les correspondances φ_1, φ_2 ne sont pas représentées par deux équations particulières, mais par la coexistence simultanée de trois équations de la forme (48)

$$\Phi(y, z) = 0, \quad \Phi'(z, x) = 0, \quad \Phi''(x, y) = 0,$$

ayant respectivement pour nombres caractéristiques

$$(l, m)_a, \quad (m, k)_b, \quad (k, l)_c,$$

sans qu'il soit nécessaire de les considérer comme le résultat de l'élimination de x, y, z respectivement entre $f = 0$ et deux des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, ainsi que nous l'avons fait auparavant. Actuellement, à chaque point z correspondent m couples x-y qui sont déterminés par $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, et les deux points de chaque couple sont liés l'un à l'autre par l'équation $\Phi'' = 0$, etc. Dans l'établissement de la formule (51), nous n'avons effectivement fait nulle part usage des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, mais seulement des équations (48). Si donc on adjoint à $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$,

---

(1) Ces formules ont été obtenues par une autre voie, ainsi que les formules correspondantes relatives aux groupes quaternaires communs de quatre correspondances, par Brill, *Math. Annalen*, t. VI, p. 56.

$\Phi'' = 0$ une correspondance $\varphi = 0$ (au lieu de φ_3 dans la démonstration précédente) possédant les nombres $\varkappa$, λ, μ, α, β, γ, *on obtient encore pour le nombre des groupes ternaires communs la formule*

$$(53)\qquad (\Phi\Phi'\Phi'', \varphi) = k\varkappa + l\lambda + m\mu - 2p(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

en posant dans (51)

$$(\varphi_1\varphi_2)_{yz} = k,\quad (\varphi_1\varphi_2)_{zx} = l,\quad (\varphi_1\varphi_2)_{xy} = m,\quad [yz]_{12} = a,\quad [zx]_{12} = b,$$
$$[xy]_{12} = c,$$
$$\varkappa_3 = \varkappa,\quad \lambda_3 = \lambda,\quad \mu_3 = \mu,\quad \alpha_3 = \alpha,\quad \beta_3 = \beta,\quad \gamma_3 = \gamma,$$

et dans le cas de la *symétrie* on déduit de (53) la formule

$$(54)\qquad \frac{1}{6}(\Phi\Phi'\Phi'', \varphi) = \frac{1}{2}k\varkappa - pa\alpha.$$

Cette dernière remarque nous sera précisément utile pour la solution du problème suivant :

Étant donné un système linéaire quadruplement infini de courbes,

$$(55)\qquad \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 + \alpha_5\varphi_5 = 0,$$

qui rencontrent f en M *points mobiles et sont adjointes à f, on demande de déterminer sur f le nombre des groupes ternaires par lesquels passe un système doublement infini de ces courbes, c'est-à-dire de trouver le nombre des systèmes de valeurs x, y, z satisfaisant au système d'équations qui suit* [1] :

$$(56)\qquad S(12345)_3 = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z) \end{matrix} \right\| = 0.$$

$$(57)\qquad f(x) = 0,\quad f(y) = 0,\quad f(z) = 0.$$

[1] En fait, la solution de ce problème est généralement possible (comp. p. 117). A l'aide des formules correspondantes, relatives à quatre correspondances, on trouve traité dans Brill, *loc. cit.*, le problème qui consiste *à déterminer le nombre des groupes quaternaires situés sur f, par lesquels passent des courbes en nombre triplement infini, faisant partie d'un ensemble linéaire sextuplement infini adjoint à f.* Une formule générale, pour le nombre des solutions d'une matrice à R lignes horizontales et $R + i$ lignes verticales, dans le cas où existent en outre R équations de la forme (57), a été donnée dans le Mémoire de Brill et Nöther. (*Voir* la note de la p. 58.)

Nous désignons par $(12345)_3$ le nombre cherché et d'une manière analogue par $(1234)_3$ le nombre des couples de points y-z qui, dans l'hypothèse de x fixe, satisfont au système

$$(58) \qquad S(1234)_3 \equiv \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

par $[(1234)_3(345)_3]$ le nombre des groupes ternaires qui satisfont en même temps aux équations (58) et à l'équation unique

$$(59) \qquad \left| \begin{matrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z) \end{matrix} \right| = 0,$$

par $[(123)_3(34)_3]$ le nombre des groupes ternaires qui satisfont aux systèmes d'équations

$$(60) \qquad \left| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) \end{matrix} \right| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

enfin par $(3)_3$ le nombre des groupes ternaires de valeurs déterminés par le système

$$(61) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_3(x) \\ \varphi_3(y) \\ \varphi_3(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire par $\varphi_3(x) = 0$, $\varphi_3(y) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$.

A chacun de ces systèmes d'équations, il faut naturellement adjoindre encore les équations (57), ce que nous ne rappellerons plus expressément par la suite.

Actuellement les solutions du système (56) sont, en toute hypothèse, comprises parmi les $[(1234)_3(345)_3]$ solutions communes des équations (58) et (59), car, d'après une proposition mentionnée plus haut (p. 54), toutes les solutions communes d'une matrice à q lignes verticales et k lignes horizontales $(q > k)$ sont comprises parmi les solutions communes de $q - k + 1$ déterminants mineurs d'ordre k de la matrice, indépendants les uns des autres. Or, dans notre cas, nous avons $q = 5$, $k = 3$, d'où $q - k + 1 = 3$,

et le système (58) représente précisément, d'après le même théorème, deux équations indépendantes l'une de l'autre. Parmi les $[(1234)_3(345)_3]$ solutions précitées, se trouvent encore celles qui satisfont au système (60) sans satisfaire en même temps à *toutes* les équations (56), ainsi qu'on l'établit à l'aide de la proposition en question. Dans les solutions de (60), sont également englobées celles de (61), bien que ces dernières ne satisfassent pas aux équations (58) et (59). Il faut donc retrancher du nombre $[(1234)_3(345)_3]$ le nombre $[(123)_3(34)_3] - (3)_3$ pour obtenir le nombre $(12345)_3$, c'est-à-dire que nous avons la formule [1]

$$(62)\qquad (12345)_3 = [(1234)_3(345)_3] - [(123)_3(34)_3] + (3)_3.$$

Nous avons maintenant à exprimer les nombres qui figurent dans le second membre au moyen des nombres M et p. En premier lieu, $(3)_3$ est égal au nombre des groupes ternaires que l'on peut former avec les M points d'intersection de $\varphi_3 = 0$ avec f, d'où

$$(3)_3 = \frac{1}{6} M(M-1)(M-2).$$

Dans (60), l'évanouissement du déterminant ternaire nous représente une correspondance symétrique $\varphi(x, y, z) = 0$, à l'égard de laquelle, d'après le mode de notation employé dans la formule (54), on a

$$\varkappa = M - 2, \quad \alpha = 1.$$

D'un autre côté, l'évanouissement de la matrice est équivalent à deux correspondances qui sont représentées par *trois* équations $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$, savoir

$$\left\{\begin{vmatrix} \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0, \quad \left\{\begin{vmatrix} \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \\ \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0,$$

$$\left\{\begin{vmatrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0.$$

A z, par exemple, répondent, en effet, tous les $M-1$ points

---

[1] *Voir*, pour l'établissement de pareilles formules, SALMON, *Geometry of three dimensions*. Une formule plus générale a été donnée par BRILL, *Math. Annalen*, t. V, p. 378 et suiv. Nous avons déjà traité un exemple très-simple, t. II, p. 113.

d'intersection de $\varphi_3(z)\varphi_4(y) - \varphi_4(z)\varphi_3(y) = 0$ non situés en z, chacun comptant $M - 2$ fois, puisque chacun de ces points forme avec chacun des autres un couple x-y répondant à z; il faut donc, dans (54), poser

$$k = (M-1)(M-2), \quad a = M-2,$$

et il vient, en conséquence [1],

$$[(123)_3(34)_3] = \frac{1}{2}(M-1)(M-2)^2 - p(M-2).$$

Nous avons de même, pour la détermination du nombre

$$[(1234)_3(345)_3],$$

la correspondance particulière (59) possédant les nombres

$$\varkappa = M-2, \quad \alpha = 1,$$

et deux correspondances représentées par les trois équations

$$\mathfrak{L}(y,z) = 0, \quad \mathfrak{L}(z,x) = 0, \quad \mathfrak{L}(x,y) = 0,$$

$\mathfrak{L}(y, z) = 0$, par exemple, étant la courbe qui, d'après ce qui a été dit sous les rubriques A et C (p. 102 et suiv.), détermine sur $f = 0$ les couples de points x-y qui répondent à z, en vertu du système (58), en sorte que l'on a respectivement, d'après (41) et (44),

$$k = (M-2)(M-3) - 2p, \quad a = M-4,$$

d'où, suivant (54),

$$[(1234)_3(345)_3] = \left[\frac{1}{2}(M-2)(M-3) - p\right](M-2) - p(M-4).$$

En ayant égard à (62), il vient finalement, *pour le nombre des*

---

[1] Nous n'avons pas encore considéré de correspondances appartenant à l'espèce qui se présente ici, où dans le premier membre figurent des puissances parfaites; mais nos formules demeurent exactes, parce qu'on peut faire dériver ces correspondances d'autres correspondances par passage à la limite. On pourrait, du reste, dans le cas du texte, considérer d'abord exclusivement les correspondances données par l'évanouissement de déterminants simples. Il suffit alors, à cause de la complète symétrie qui existe, de multiplier le résultat par $M - 2$.

groupes ternaires cherchés,

$$(63)\qquad (12345)_3 = \frac{1}{6}(M-2)(M-3)(M-4) - p(M-4).$$

Le problème traité en dernier lieu est un cas particulier du problème plus général formulé plus haut : sur la courbe primitive déterminer R points G^R, tels que les courbes qui passent par eux dans une famille t fois infinie forment une famille q fois infinie (p. 56). Nous avons trouvé comme condition nécessaire pour la résolubilité du problème

$$R \geqq (q+1)(R-t+q),$$

et cette inégalité est ici satisfaite en réalité, car nous avons à poser

$$R=3,\quad q=2,\quad t=4.$$

Le problème en question présentait un intérêt particulier pour les systèmes de courbes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre, et cela comme conséquence de l'applicabilité du théorème de Riemann et Roch aux systèmes d'intersections de ces courbes. De leurs $2p-2$ points de rencontre, $p-1$ sont déterminés par les $p-1$ autres; nous avons donc à prendre

$$M = p-1+4 = p+3,$$

au moins dans la supposition que l'ensemble quadruplement infini donné de courbes C_{n-3} ne soit pas en relation spéciale avec la courbe primitive; et cet ensemble est fixé par $p-5$ points quelconques de f. Ces derniers forment avec chaque groupe ternaire de l'espèce déterminée par nous un groupe spécial G_R de points, par lesquels passe un nombre doublement infini de courbes adjointes C_{n-3}, c'est-à-dire que nous avons

$$R = p-2,\quad q=2.$$

Les équations du théorème de Riemann et Roch (p. 52)

$$Q+R = 2(p-1),\quad Q-R = 2(q-r)$$

donnent ensuite

$$Q=p,\quad r=1.$$

Par les p autres intersections de ce système doublement infini

passe donc un nombre simplement infini de courbes adjointes C_{n-3}, et les groupes $G_R = G_{p-2}$ forment eux-mêmes un système simplement infini $g^{(1)}_{p-2}$; mais il existe un nombre τ fois infini de systèmes de cette dernière espèce, τ étant égal à

$$p-(q+1)(r+1)=p-6.$$

Inversement, on peut aussi partir du problème où il s'agit de trouver des groupes G_p, par lesquels passe un nombre simplement infini de courbes adjointes C_{n-3}, et *ce dernier problème dérive précisément de celui traité* (*problème* D), *pour* $M = p+2$ (p. 106 et suiv.). Le système triplement infini donné est ici fixé par $p-4$ points *quelconques* de f, et ceux-ci forment avec chacun des groupes quaternaires cherchés un semblable groupe spécial G_p, tandis que, par les autres $p-2$ points, peuvent être menées des courbes C_{n-3} en nombre doublement infini. Nous avons traité déjà avec détail cette relation (p. 47), et nous avons montré que le nombre des groupes ternaires (63), répondant à $p-5$ points fixes, c'est-à-dire (à cause de $M = p+3$)

$$p(p-1)\left[\frac{1}{6}(p+1)-1\right],$$

doit se confondre avec le nombre (46) des groupes quaternaires répondant à $p-4$ points, c'est-à-dire (à cause de $M = p+2$) avec le nombre

$$\frac{1}{2}p(p-1)\left[\frac{1}{6}(p-1)(p-2)-(p-3)\right],$$

pour $\tau = 0$. En effet, p étant égal à 6 si $\tau = 0$, les deux nombres deviennent alors tous deux égaux à 5; *et pour* $p = 6$, *s'il s'agit de systèmes d'adjointes* C_{n-3}, *les deux problèmes peuvent, en outre, être ramenés l'un à l'autre.*

Pour $p = 5$, les deux nombres deviennent égaux à zéro; il n'existe donc plus de groupes spéciaux de l'espèce en question, ce qui concorde avec les résultats obtenus antérieurement.

V. — Sur les systèmes de points d'intersection des courbes algébriques.

La base essentielle de nos recherches relatives aux systèmes de points sur une courbe donnée a été le théorème énoncé t. II,

p. 131, et d'après lequel, *parmi les points d'intersection d'une courbe donnée du $n^{ième}$ ordre $f = 0$ avec une courbe du $m^{ième}$ ordre qui doit passer par δ points doubles de la première sans y avoir elle-même de points multiples, il y en a*

1° *dans le cas de* $m \geqq n-2$, $\quad \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$ *au plus,*

2° *dans le cas de* $m < n-2$, $\quad mn - \frac{1}{2}m(m+3) - \delta$ *au plus,*

qui sont déterminés par les autres.

Si C_m devait passer par tous les points doubles, on en déduisait les propositions relatives aux courbes *adjointes,* propositions où le genre de la courbe $f = 0$ jouait un rôle important. Si nous nous sommes d'une manière générale borné à ces dernières, c'était d'abord parce que beaucoup de questions prennent une tournure plus simple à l'égard des courbes adjointes, mais surtout parce que les systèmes de points d'intersection des courbes de cette espèce présentent le caractère de l'invariance vis-à-vis des transformations uni-déterminatives de la courbe primitive (p. 20), tandis que, à l'égard des courbes non adjointes, la même chose n'a pas lieu sans restriction. Si, en effet, dans l'ensemble des groupes de points déterminés par de semblables courbes, un groupe renferme l'un des points doubles de la courbe primitive n'appartenant pas aux points fixes du système, en ce point se confondent immédiatement *deux* points du groupe. Si donc nous résolvons le point double, par une transformation uni-déterminative, en deux points séparés ξ, η d'une nouvelle courbe, à chaque ensemble de groupes de points sur cette nouvelle courbe correspond un ensemble qui présente, par rapport à ξ, η, cette particularité que chacun de ses groupes comprenant ξ comprend aussi nécessairement η et réciproquement. Un système de cette espèce ne peut donc plus être défini qu'à l'aide de nouveaux points fixes (ξ et η précisément).

Nous nous proposons maintenant d'utiliser, dans un autre ordre d'idées, le théorème précité, sans nous restreindre aux courbes adjointes. Nous examinerons en particulier de plus près les relations qui existent entre les points d'un système d'intersections, et

nous énoncerons le théorème ci-dessus sous une forme plus générale. A ce sujet se rattacheront différentes applications qui nous ramèneront, entre autres choses, au tracé des courbes par des faisceaux projectifs qui a été donné par Chasles. Nous aurons en même temps l'occasion de formuler d'autres questions connexes à nos précédentes recherches.

Nous ferons d'abord observer que *le théorème précédent, d'après la manière dont il a été établi, a lieu indépendamment de la question de savoir si la courbe primitive est ou non réductible.* Ainsi on peut, sur toute conique, choisir complètement arbitrairement huit points pour intersections de cette courbe avec une courbe du quatrième ordre; au contraire, sur une courbe du quatrième ordre, se décomposant en deux coniques, trois points d'intersection avec une autre courbe du quatrième ordre sont déterminés par les treize autres. Si donc, dans ce dernier cas, on a pris arbitrairement sur l'une des coniques huit points d'une courbe C_4, on ne peut plus choisir arbitrairement que cinq points sur l'autre conique. D'un autre côté, si C_4 passe par 1, 2, 3 ou 4 points de rencontre des deux coniques, il y aura respectivement 12, 11, 10, 8 points d'intersection arbitraires, et 2, 1, 0, 0 déterminés respectivement par les autres [1].

Notre théorème fondamental peut d'ailleurs s'énoncer sous une forme plus générale, si nous ne supposons pas, comme auparavant, qu'*une courbe* $C_n(f=0)$ *soit donnée comme fixe*, ainsi que nous l'avons fait déjà pour $m=n$ dans la proposition d'après laquelle *toutes les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre qui ont en commun* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *points passent par* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *autres points déterminés* (t. II, p. 133). Si, en général, mn points (m étant plus grand que n) doivent être situés sur une courbe C_n, il existera nécessairement entre leurs coordonnées $mn - \frac{1}{2}n(n+3)$ équations, car la courbe C_n

---

[1] Lorsque la courbe primitive se réduit à des droites, le contenu de ces propositions sur les points d'intersection peut se formuler dans ce qu'on appelle le *théorème de Carnot*. (*Voir* SALMON, *Higher plane curves*, art. 124, ainsi qu'une remarque dans la Section suivante, sur le *théorème d'Abel*.)

est déjà déterminée par $\frac{1}{2}n(n+3)$ points. Si, de plus, les mn points doivent être situés sur une courbe d'ordre m, on peut toujours remplacer cette dernière, la courbe C_n étant actuellement donnée, par une courbe (t. II, p. 130) dépendant seulement de

$$mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ constantes.}$$

Entre les mn points existent donc encore $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres relations, en sorte que l'ensemble de ces dernières devient égal à

$$mn - \frac{1}{2}n(n+3) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = mn - 3n + 1.$$

Pour $m = n$, au contraire, nous avons un ensemble infini de courbes C_n passant par les n^2 points, et conséquemment $(n-1)(n-2)$ relations seulement entre les $2n^2$ coordonnées des n^2 points; alors, en effet, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sont encore déterminés par les autres, comme cela doit être. Nous avons donc le théorème suivant [1] :

Si mn points sont situés sur deux courbes, l'une d'ordre m, l'autre d'ordre n, ces points n'étant d'ailleurs assujettis à aucune autre condition et étant des points simples des deux courbes, il existera, pour le cas de $m > n$, entre les $2mn$ coordonnées des mn points $mn - 3n + 1$ relations; mais, pour $m = n$, ce dernier nombre est égal à $n^2 - 3n + 2$.

Si actuellement la courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre est donnée comme fixe, $mn - \frac{1}{2}n(n+3)$ équations seront absorbées par l'effet de cette circonstance, et il ne reste plus que les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ relations mentionnées en dernier lieu; en même temps chacun des mn points ne dépend plus que d'un seul paramètre. Il suit encore de là que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points sont déterminés par les autres.

---

[1] *Voir* JACOBI : *De relationibus quæ locum habere debent*, etc. (*Journal de Crelle* t. 15, p. 285.)

Il est, au surplus, facile d'établir effectivement les $mn - 3n + 1$ relations entre les mn points

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \ldots, \quad x^{(\mu)} \quad (\mu \text{ étant égal à } mn),$$

car, si nous désignons par

$$\Psi_1(x) = 0, \quad \Psi_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad \Psi_{\nu+1}(x) = 0 \quad \left[\nu \text{ étant égal à } \frac{1}{2}n(n+3)\right],$$

les équations de $\nu + 1$ courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre linéairement indépendantes les unes des autres, en sorte que, par exemple,

$$\Psi_1(x) = x_1^n, \quad \Psi_2(x) = x_1^{n-1}x_2, \quad \ldots, \quad \Psi_{n+1}(x) = x_2^n, \quad \ldots, \quad \Psi_{\nu+1}(x) = x_3^n,$$

l'ensemble des courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre est représenté dans le système infini d'ordre ν

$$(1) \qquad \alpha_1\Psi_1(x) + \alpha_2\Psi_2(x) + \ldots + \alpha_{\nu+1}\Psi_{\nu+1}(x) = 0.$$

Par conséquent, les conditions pour que $\mu = mn$ points $x^{(i)}$ soient situés sur une courbe C_n sont données par le système surabondant d'équations

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Psi_1(x^{(\mu)}) & \Psi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\mu)}) \end{matrix} \right\| = 0,$$

où, dans le premier membre, figure une matrice à $\nu + 1$ lignes verticales et μ lignes horizontales. Ce système comprend, en effet, d'après une proposition précédente (p. 54), seulement

$$\mu - \nu = mn - \frac{1}{2}n(n+3),$$

équations indépendantes les unes des autres, comme celles, par exemple, qui proviennent de la condition

$$(3) \qquad \Psi(x^{(\iota)}) \equiv \left| \begin{matrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Psi_1(x^{(\nu)}) & \Psi_2(x^{(\nu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\nu)}) \\ \Psi_1(x^{(\iota)}) & \Psi_2(x^{(\iota)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\iota)}) \end{matrix} \right| = 0,$$

si l'on attribue successivement à l'indice i toutes les valeurs depuis $i = \nu + 1$ jusqu'à $i = \mu$. Or ces dernières équations veulent simplement dire que les points $x^{(\nu+1)}, \ldots, x^{(\mu)}$ doivent être situés sur la courbe C_n déterminée par les points $x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)}$. Soient encore

$$\chi_1(x) = 0, \; \chi_2(x) = 0, \; \ldots, \; \chi_{\mu-\pi+1}(x) = 0 \quad \left[\pi \text{ étant égal à } \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\right]$$

les équations de $\mu - \pi + 1$ courbes quelconques C_m linéairement indépendantes les unes des autres. Alors l'ensemble des courbes C_m est représenté par le système

$$(4) \quad \alpha_1 \chi_1(x) + \alpha_2 \chi_2(x) + \ldots + \alpha_{\mu-\pi+1} \chi_{\mu-\pi+1}(x) + \mathrm{A}\Psi(x) = 0,$$

A étant du $(m-n)^{\text{ième}}$ ordre en x; et les autres $\pi = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ relations apparaissent sous la forme

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} \chi_1(x^{(1)}) & \chi_2(x^{(1)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(1)}) \\ \chi_1(x^{(2)}) & \chi_2(x^{(2)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \chi_1(x^{(\mu)}) & \chi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(\mu)}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

D'après un théorème plusieurs fois cité, le nombre des équations indépendantes les unes des autres est, en fait, égal à π. *Nos $mn - 3n + 1$ relations sont donc données par les équations* (3) *et* (5).

Lorsque $m = n$, ce résultat prend une tournure un peu différente. Si, en effet, n^2 points doivent être situés sur deux courbes d'ordre n, ils se trouvent avec un $(n^2 + 1)^{\text{ième}}$ point quelconque du plan sur une certaine courbe C_n. D*onc, pour $m = n$, nous avons les relations* (voir les équations du problème D, p. 106) :

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Psi_1(x^{(\mu)}) & \Psi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\mu)}) \\ \mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 & \ldots & \mathrm{X}_{\nu+1} \end{matrix} \right\| = 0,$$

où les X_i désignent des quantités quelconques, et où $\mu = n^2$. Le

nombre des équations indépendantes les unes des autres est, en conformité avec ce qui précède, égal à $(n-1)(n-2)=n^2-3n+2$.

On est conduit à un système d'équations analogue à celui du cas traité en dernier lieu (en tant que celui-ci exigeait l'évanouissement de tous les déterminants mineurs d'une matrice) par l'examen du problème suivant :

Étant donné un ensemble linéaire t fois infini de courbes du $n^{ième}$ ordre

$$\alpha_1\Psi_1(x)+\alpha_2\Psi_2(x)+\ldots+\alpha_{t+1}\Psi_{t+1}(x)=0,$$

on demande de déterminer dans le plan des groupes de R *points, tels que par ces points passe un système q fois infini de courbes* C_n *du système donné* (q *étant plus grand que* $t-R$). Ce problème est exactement analogue à celui qui a été traité page 53, si ce n'est qu'alors les R points étaient soumis à la condition restrictive de se trouver sur une courbe C_n donnée, et il conduit de même à la condition que tous les déterminants mineurs d'ordre $t-q+1$ du tableau

$$(7)\qquad \begin{Vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Psi_1(x^{(R)}) & \Psi_2(x^{(R)}) & \ldots & \Psi_{t+1}(x^{(R)}) \end{Vmatrix}$$

soient nuls. Cela fournit $(q+1)(R-t+q)$ équations indépendantes les unes des autres entre $2R$ inconnues, les $2R$ coordonnées des R points. Pour que la solution soit possible, il est donc nécessaire que l'on ait

$$2R \geqq (q+1)(R-t+q).$$

Il n'a pas encore été fait d'étude détaillée sur le nombre des solutions dans les divers cas particuliers; ces cas devraient d'ailleurs être traités à peu près comme l'exemple de la page 113 [1].

Les modifications que subissent ces considérations lorsque l'une des courbes étudiées passe par des points doubles de l'autre ne

---

[1] Nous apprendrons incessamment à connaître un exemple concernant la solution du problème posé dans le texte; nous parlerons aussi encore du cas où les m^2 points de base d'un faisceau de courbes C_m doivent se trouver sur une courbe fixe C_n ($n > m$).

sont pas difficiles à indiquer. Si un point déterminé doit être un point double d'une courbe, cela équivaut, comme on sait, à trois conditions (t. II, p. 46). Ainsi, par exemple, si y doit être un point double du système (1), on aura nécessairement les trois équations

$$(8)\quad \left[\alpha_1 \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x_i} + \ldots + \alpha_{\nu+1} \frac{\partial \Psi_{\nu+1}(x)}{\partial x_i}\right]_{x=y} = 0,$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Donc, pour $y = x^{(1)}$, figurent dans la matrice (2), au lieu de la première ligne horizontale, trois lignes horizontales provenant des premiers membres des équations (8). En même temps, parmi les μ points du système d'intersections, deux tombent en $x^{(1)}$, en sorte que nous n'avons plus à considérer que $\mu - 1$ points séparés. De même nous n'avons plus, en cas de survenance de δ points doubles de C_n, que $\mu - \delta$ points séparés $x^{(i)}$. A la place de la matrice (2) se présente donc alors une matrice à $\mu + \delta$ lignes horizontales et $\nu + 1$ lignes verticales, matrice dont l'évanouissement est par suite équivalent à $\mu - \nu + \delta$ conditions. Si, en outre, il doit se rencontrer dans le système d'intersections δ' points doubles de C_m dont aucun n'est situé en un point double de C_n, le système en question ne se compose plus que de $\mu - \delta - \delta'$ points séparés. La matrice qui figure dans (2) ne renferme donc alors que $\mu + \delta - \delta'$ lignes horizontales, et le nombre des conditions représentées par son évanouissement sera égal à

$$\mu - \nu + \delta - \delta' = mn - \frac{1}{2} n(n+3) + \delta - \delta'.$$

De même à la place de (5) se présente une matrice à $\mu + \delta - \delta'$ lignes horizontales et $\mu - \pi + 1$ lignes verticales.

Le nombre des conditions figurées par l'évanouissement de cette dernière matrice sera donc égal à

$$\pi - \delta + \delta' = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$$

Par conséquent, dans le cas considéré ici, le nombre total des conditions qui existent entre les $mn - \delta - \delta'$ points est encore égal à $mn - 3n + 1$. Si la courbe C_n est de nouveau donnée comme

courbe fixe, $mn - \frac{1}{2}n(n+3) + \delta$ conditions sont considérées comme satisfaites par là même ; il reste donc encore

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$$

relations; ce qui redonne le théorème cité en commençant.

Corrélativement aux théorèmes concernant les intersections de *deux* courbes algébriques, et par déduction de ceux-ci, on peut établir de nombreuses propositions relatives aux intersections de *trois* courbes *ou plus*. Nous donnons dans ce qui suit quelques exemples présentant un intérêt particulier à cause de leurs applications. Ces dernières se réfèrent au problème d'engendrer une courbe algébrique donnée par des faisceaux d'ordre inférieur, d'après le procédé de Chasles que nous avons déjà abordé pour les courbes du troisième ordre. (*Voir* t. II, p. 95 et 269.) Nous démontrerons d'abord le théorème suivant [1]:

Une courbe du $n^{ième}$ ordre dans laquelle on a $n > p$ et $n > q$, mais $n < p + q$, et qui passe par

$$pq - \frac{1}{2}(p+q-n-1)(p+q-n-2)$$

intersections de deux courbes C_p et C_q d'ordre p et d'ordre q comprend aussi les autres $\frac{1}{2}(p+q-n-1)(p-q-n-2)$ intersections de ces dernières [2].

Pour le démontrer, nous prendrons sur C_p $\frac{1}{2}(n-q)(n-q+3)$ points arbitraires, et nous ferons passer par ces points une courbe C_{n-q} d'ordre $n-q$, ce qui est toujours possible si l'on a $n-q < p$; nous ferons également passer par $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$ points de

---

(1) Ici, comme en général dans ce qui suit, nous excluons le cas où aux points d'intersection se trouvent des points doubles des courbes considérées; ces dernières pouvant d'ailleurs avoir *autre part* un nombre quelconque de points doubles ou multiples, et même se décomposer en courbes d'ordre moins élevé.

(2) *Voir* Cayley, *Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. III, 1843, p. 211.

C_q une courbe C_{n-p} d'ordre $n-p$. Nous avons ainsi deux courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre se composant l'une de C_q et C_{n-q} l'autre de C_p et C_{n-p} courbes par les n^2 intersections desquelles doit passer toute courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre qui comprend $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ de ces intersections. Mais on a

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}n(n+3)-1 \\ \qquad = \alpha + \frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)+\frac{1}{2}(n-q)(n-q+3) \\ \alpha \text{ étant égal à } pq-\frac{1}{2}(p+q-n-1)(p+q-n-2). \end{array}\right.$$

Toutes les courbes d'ordre n qui passent par α des pq points donnés et par les points arbitrairement choisis sur C_p et C_q respectivement, passent donc aussi par les $pq-\alpha$ intersections restantes de C_p et C_q. Mais ce sont là *toutes* les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre qui passent par les α points en question, car le nombre des paramètres linéaires pour l'ensemble complet de ces courbes est égal à

$$\beta = \frac{1}{2}n(n+3)-\alpha,$$

et notre construction précédente nous fournit un nombre γ fois infini de faisceaux différents de courbes C_n,

$$\left[\gamma \text{ étant égal à } \frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)+\frac{1}{2}(n-q)(n-q+3)\right],$$

et conséquemment en tout un système $\gamma+1$ fois infini de courbes C_n; on a en effet, en vertu de la relation (9), $\gamma+1=\beta$. *Toutes* les courbes C_n menées par les α points passent donc bien par les $pq-\alpha$ points restants, ce qu'il fallait démontrer. Nous avons supposé dans cette démonstration $n-q<p$, d'où aussi $n-p<q$ ou $n<p+q$, ainsi qu'il a été indiqué plus haut. Au surplus, pour $n=p+q-1$ ou $n=p+q-2$, notre théorème n'énonce rien. Pour $n<q$ ou $n<p$, la construction des courbes C_{n-q} ou C_{n-p} cesserait d'être possible.

Il résulte de là en particulier, au cas de $p=q=m$, que :

Si, parmi les m^2 points de base d'un faisceau de courbes

d'ordre m,

$$\alpha = m^2 - \frac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2)$$

sont situés sur une courbe d'ordre n, n étant plus grand que m, mais égal ou inférieur à 2m, les autres $m^2 - \alpha$ points de base de ce faisceau sont aussi sur la courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Avant de faire usage de ce dernier résultat pour des applications subséquentes, faisons observer que dans ce qui précède se trouve renfermée une solution spéciale du problème précédemment posé : déterminer dans le plan Q points tels que par ces points passe un nombre r fois infini de courbes d'un système linéaire t fois infini donné. Nous avons en effet ici

$$t = \frac{1}{2}n(n+3), \quad Q = pq, \quad r = \frac{1}{2}n(n+3) - \alpha.$$

Un groupe ainsi composé de Q points sera précisément donné par tout système complet d'intersections de deux courbes du $p^{\text{ième}}$ et du $q^{\text{ième}}$ ordre, sous les conditions $n > q$, $n > p$, $n \leqq p + q$; au contraire, par un système quelconque de pq points passerait un nombre moindre, et seulement $\left[\frac{1}{2}n(n+3) - pq\right]$ fois infini, de courbes C_n.

La proposition énoncée en dernier lieu pour le cas de $p = q = m$ est importante pour la question de savoir s'il est toujours possible, dans le cas de $m < n$, de déterminer sur une courbe donnée C_n m^2 points tels que par eux passe un nombre simplement infini de courbes C_m, question particulièrement intéressante pour l'étude du tracé des courbes donné par Chasles (t. II, p. 96). En effet, pour $n \leqq 2m$, il suffit, d'après cette proposition, de se demander s'il est possible de placer $\alpha = m^2 - \frac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2)$ points de base d'un faisceau de courbes C_m sur une courbe C_n donnée, les autres points de base étant nécessairement alors sur cette même courbe. Or les conditions nécessaires à remplir pour cet objet sont données par l'évanouissement des déterminants mineurs à t dimensions du Tableau (7), si l'on fait

$$t = \frac{1}{2}m(m+3), \quad R = \alpha, \quad q = 1,$$

ce qui donne $2(\alpha - t + 1)$ relations entre α inconnues (les α points étant assujettis à se trouver tous ensemble sur C_n). Parmi ces derniers,

$$\begin{aligned} &\alpha - 2(\alpha - t + 1) \\ &\quad = m(m+3) - m^2 - 2 + \frac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2) \\ &\quad = \frac{1}{2}[(2m - n)^2 + 3n - 2] \end{aligned}$$

restent donc arbitraires, et l'on peut choisir à volonté un pareil nombre des points α sur la courbe C_n.

Si, au contraire, n est plus grand que $2m$, nous avons dans le Tableau (7)

$$R = m^2, \quad t = \frac{1}{2}m(m+3), \quad q = 1,$$

et, par conséquent, $m^2 - 3m + 2$ relations, c'est-à-dire que le nombre des points qui restent arbitraires est égal à

$$m^2 - (m^2 - 3m + 2) = 3m - 2.$$

Si donc on demande de déterminer sur une courbe du $n^{ième}$ ordre m^2 points $(m < n)$ tels que ces points forment les points de base d'un faisceau du $m^{ième}$ ordre, on peut en prendre arbitrairement sur C_n $\frac{1}{2}[(2m - n)^2 + 3n - 2]$ au cas de $n \leqq 2m$, et $3m - 2$ au cas de $n > 2m$ (1).

Après avoir trouvé, conformément à ce théorème, un faisceau de courbes C_m, on peut toujours obtenir un second faisceau de courbes C_{n-m} dont les $(n-m)^2$ points de base sont de même situés sur C_n et qui est lié projectivement au faisceau de courbes C_m, de telle sorte que les intersections des courbes correspondantes des deux faisceaux engendrent C_n suivant le procédé de Chasles. Les courbes du faisceau du $m^{ième}$ ordre coupent en effet C_n en

(1) *Voir* Chasles, *Détermination du nombre des points*, etc. (*Comptes rendus*, 21 septembre 1857); Cremona, *Theorie der ebenen Curven*, p. 77 et suiv., dans l'édition allemande de Curtze. Pour $n = 2m - 1$ et $n = 2m - 2$, les deux nombres sont identiques; en sorte que les indications du texte concordent avec celles de Chasles.

$m(n-m)$ points mobiles. Si nous faisons actuellement passer par $m(n-m)-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ de ces points d'intersection d'une courbe déterminée C_m du faisceau une courbe C_{n-m}, *celle-ci passe aussi, par là même, par les* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *points restants.* Car si C'_m est une seconde courbe de notre faisceau, et que l'on décrive par $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ des $(n-m)m$ autres intersections de C_n et C'_m (lesquelles ne sont conséquemment pas situées sur C_m) une courbe C_{n-m}, nous avons deux courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre : C_n et $C_m + C_{n-m}$. Or la courbe C'_m comprend

$$m^2 - \frac{1}{2}(2m-n-1)(2m-n-2) + \frac{1}{2}(n-m)(n-m+3) = nm - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

points de rencontre des deux courbes; elle comprend par suite encore $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ autres intersections, et, comme C'_m passe par tous les m^2 points de base de l'un des faisceaux, il se trouvera parmi ces dernières

$$\frac{1}{2}(2m-n-1)(2m-n-2)$$

points communs à C_n et C_m, et conséquemment

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}(2m-n-1)(2m-n-2) = (n-m)m - \frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$$

points qui doivent être communs à C_n et C_{n-m}. La courbe C_{n-m} passe donc, en fait, par toutes les $m(n-m)$ intersections de C'_m avec C_n [1] qui ne sont pas des points de base pour notre faisceau de

---

[1] C'est aussi ce qui résulte directement du théorème plus général de Cayley :

Si, parmi les intersections de deux courbes C_m *et* C_n (*m étant* $< n$),

$$mp - \frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$$

courbes C_m. Par là il est démontré que l'on peut mener une courbe C_{n-m} par les $m(n-m)$ points où C_n rencontre C'_m. Cette courbe C_{n-m} coupe C_n encore en

$$(n-m)n - m(n-m) = (n-m)^2 \text{ points.}$$

D'ailleurs $C_n = 0$, $C'_m = 0$, $C_{n-m} = 0$ étant les équations des courbes considérées et $C_m = 0$ l'équation d'une autre courbe d'ordre m, comprenant les m^2 points de base choisis, on pourra déterminer une courbe $C'_{n-m} = 0$ et une constante μ telles que l'on ait identiquement

$$C'_m C'_{n-m} \equiv C_m C_{n-m} + \mu C_n,$$

car nous n'avons affaire qu'à des intersections simples. Mais alors C'_{n-m} passe également par les $(n-m)^2$ points qui sont situés sur C_n et C_{n-m}, et non sur C'_m (¹); en d'autres termes, le faisceau $C_{n-m} + \lambda C_{n-m} = 0$ est projectif par rapport au faisceau

$$C'_m + \lambda C_m = 0$$

et engendre C_m de la manière demandée. Dans la démonstration précédente, nous n'avons eu égard qu'au cas de $n \leqq 2m$; il est facile d'y ajouter des considérations analogues pour l'hypothèse contraire. Nous nous bornerons à énoncer les résultats ainsi obtenus dans la proposition suivante :

Si les m^2 points de base d'un faisceau de courbes C_m se trouvent sur une courbe C_n, il existe toujours un faisceau de courbes C_{n-m} projectif par rapport au premier faisceau dont les $(n-m)^2$ points de base sont situés de même sur C_n et engendrant avec

---

sont situées sur une courbe C_p (p étant $< n$), il y en a encore

$$\frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$$

autres qui se trouvent sur cette courbe, et les $m(n-p)$ points restants sont situés sur une courbe d'ordre $n-m$.

(¹) Ce fait est aussi une conséquence immédiate de notre théorème sur les groupes résiduels. (*Voir* t. II, p. 138.)

le premier, par les points de rencontre de deux courbes correspondantes, la courbe C_n (¹).

Par les considérations précédentes se trouve en même temps fournie la démonstration complète du fait que *toute* courbe C_n peut être engendrée par deux faisceaux projectifs du $m^{\text{ième}}$ et du $(n-m)^{\text{ième}}$ ordre n'ayant aucun de leurs points de base en un point double de C_n; m peut d'ailleurs prendre toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $n-1$.

Le théorème démontré en dernier lieu est évidemment vrai aussi pour une courbe décomposable. Nous nous proposons, pour finir, d'en faire une autre application qui nous conduira à des cas particuliers intéressants.

Soient $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ deux courbes d'ordre n. Ces courbes déterminent un faisceau $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ de courbes ayant $n^2 = p + q$ points de base. Nous choisirons le nombre q de telle sorte que par q des n^2 points de base soit précisément déterminée une courbe $K_3 = 0$ du $(n-r)^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire que nous prendrons

$$q = \frac{1}{2}(n-r)(n-r+3), \tag{10}$$

et, par suite,

$$p = n^2 - q = \frac{1}{2}n(n+2r-3) - \frac{1}{2}r(r-3). \tag{11}$$

Faisons passer par les p autres intersections de C_1 avec C_2 une troisième courbe quelconque du $n^{\text{ième}}$ ordre $C_3 = 0$. Les deux courbes C_3 et K_3 formeront ensemble une courbe $C_3 K_3 = 0$ d'ordre $2n - r$, sur laquelle sont répartis les points de base du faisceau $C_1 + \varkappa C_2 = 0$. D'après le théorème démontré en dernier lieu, il doit donc exister un faisceau du $(n-r)^{\text{ième}}$ ordre projectif par rapport au faisceau $C_1 + \varkappa C_2 = 0$, ayant de même ses $(n-r)^2$ points de base répartis sur $C_3 . K_3 = 0$, et engendrant avec le faisceau $C_1 + \varkappa C_2 = 0$, par les points de rencontre des courbes correspondantes, la courbe $C_3 . K_3 = 0$. Soient maintenant $K_1 = 0$, $K_2 = 0$

(¹) *Voir* Chasles, *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 28 décembre 1857).

les courbes du second faisceau qui correspondent respectivement aux courbes [1] $C_2 = 0$, $C_1 = 0$ du premier; s'élève ici la question de savoir combien parmi les $(n-r)^2$ points de base du second faisceau se trouvent sur C_3 et combien sur K_3.

Or, le faisceau $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ coupe C_3 en $n^2 - p = q$ points mobiles; il en est donc de même aussi du faisceau $K_2 + \varkappa K_1 = 0$. Les courbes de ce dernier rencontrent en conséquence C_3 encore en $\lambda = n(n-r) - q$ points *fixes,* et par suite $\mu = (n-r)^2 - \lambda$ points de base du faisceau sont situés sur K_3; on a d'ailleurs ici en vertu de (10) et (11)

$$(12) \quad \begin{cases} \lambda = p - rn \qquad = \frac{1}{2} n(n-3) - \frac{1}{2} r(r-3), \\ \mu = (n-r)^2 - \lambda = \frac{1}{2}(n-r)(n-3r+3). \end{cases}$$

En outre, comme l'équation de la courbe $C_3.K_3 = 0$ doit résulter de l'élimination de $\varkappa$ entre les équations

$$C_1 + \varkappa C_2 = 0, \quad K_2 + \varkappa K_1 = 0,$$

il existe entre C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 une identité de la forme

$$(13) \qquad \alpha_1 C_1 K_1 + \alpha_2 C_2 K_2 + \alpha_3 C_3 K_3 \equiv 0,$$

les α_i désignant des constantes. Entre les trois courbes C_i et les trois courbes K_i règne, d'après cela, une complète symétrie, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si trois courbes d'ordre n C_1, C_2, C_3 *se coupent aux mêmes*

$$p = \frac{1}{2} n(n+2r-3) - \frac{1}{2} r(r-3)$$

points, elles se coupent encore deux à deux en

$$q = \frac{1}{2}(n-r)(n-r+3)$$

points et déterminent par là trois courbes K_1, K_2, K_3 *d'ordre*

[1] Les indices 1, 2 sont choisis de telle sorte que l'équation de la courbe $K_3 C_3 = 0$ apparaisse sous la forme $C_1 K_1 - C_2 K_2$, et que, par suite, entre C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 existe une identité de la forme (13).

$n - r$. Ces dernières, en supposant λ et μ déterminés comme dans (12), passent par μ mêmes points du plan, tandis que les autres λ intersections de ces trois courbes, prises deux à deux, sont situées respectivement sur les courbes C_1, C_2, C_3 (1).

Pour $n = 2$, $r = 1$, on déduit de là cette proposition connue :

Si trois coniques se coupent en deux mêmes points du plan, elle se coupent encore deux à deux en deux autres points ; les trois droites déterminées par ces couples passent par un même point du plan (2).

De là encore cette conséquence pour $n = 3$, $r = 2$, par exemple :

Si trois courbes du troisième ordre se coupent en sept mêmes points, elles se coupent encore deux à deux en deux points; les trois droites ainsi déterminées forment un triangle dont les trois sommets arrivent à reposer respectivement sur les trois courbes du troisième ordre.

Ces applications et ces exemples suffiront pour caractériser les puissantes ressources que nous possédons dans les propositions sur les points d'intersection en tant que ces propositions s'étendent à tout le plan, tandis que dans nos recherches antérieures nous raisonnions toujours sur une courbe fixe. Nous passons maintenant à des recherches d'une autre nature, où la notion des courbes adjointes présente de nouveau une importance particulière.

VI. — Les intégrales qui appartiennent à une courbe algébrique.

Nous avons déjà plusieurs fois mentionné la connexion intime qui existe entre la géométrie sur une courbe et entre la théorie de

---

(1) Pour $r = 1$ et $r = 2$, ce théorème a été donné par Olivier, *Journal de Crelle*, t. 70, p. 156.

(2) Ce théorème n'est autre chose que la généralisation projective de la proposition connue, que les axes radicaux de trois cercles passent par un même point (t. I, p. 193).

certaines intégrales appartenant à cette courbe; nous avons en particulier suivi cette connexion dans ses détails à l'égard des courbes du troisième ordre : l'intégrale elliptique de première espèce, dont le module était lié d'une certaine façon au rapport anharmonique de la courbe, s'est présentée à nous comme se rattachant très étroitement à la théorie des systèmes de points d'intersection (t. II, p. 355 et suiv.). Le développement général des circonstances qui se présentent dans ces questions va nous occuper maintenant, et pour préciser nous traiterons d'abord les points suivants :

1° *Introduction d'une forme déterminée pour les intégrales algébriques les plus générales;*

2° *Réduction de ces dernières à certaines formes normales;*

3° *Recherche des infinis de ces formes normales,*

Les formes normales obtenues seront ensuite réduites à des types encore plus simples, et il nous restera à établir à l'égard de ces derniers le théorème d'Abel, ainsi qu'à traiter ce qu'on appelle le problème de l'inversion des intégrales abéliennes [1], pour avoir

---

[1] La théorie des intégrales et des fonctions abéliennes doit être ici, en général, supposée connue. Les considérations purement algébriques sur les différentielles des intégrales abéliennes et le théorème d'Abel seront seuls donnés avec plus de détail dans le texte. Pour le surplus, nous résumerons toujours brièvement les théorèmes employés, et nous renverrons pour des détails plus approfondis aux travaux originaux sur la même matière et en particulier aux écrits suivants :

B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 64, et *OEuvres*, p. 81); A. Clebsch et P. Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen*, Leipzig, 1866; Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*. Paris, 1879.

Pour les intégrales *hyperelliptiques*, voir surtout Weierstrass, *Journal de Crelle*, t. 47 et 52; C. Neumann, *Theorie der Abel'schen Integrale*, Leipzig, 1865; Prym, *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen* (*Denkschriften der math. phys. Classe der Wiener Academie*, t. XXIV, 1864) et *Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche* (*Denkschriften der Schweizerischen Gesellschaft*, t. XXII. Zürich, 1866). D'autres cas particuliers ont été traités par Thomae (*Ueber eine specielle Klasse Abelscher Functionen*, Halle a/S 1877, et *Ueber eine specielle Klasse Abelscher Functionen vom Geschlecht* 3, Halle a/S 1879), par H. Weber (*Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht* 3, Berlin, 1876), et par Schottky (*Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln*, Leipzig, 1880).

Les travaux ultérieurs de Weierstrass sur cette théorie ne sont pas jusqu'ici connus d'une manière générale.

à notre disposition tous les moyens nécessaires aux applications géométriques. Observons immédiatement que les propriétés des intégrales qui se présentent ici conservent le caractère invariant vis-à-vis de toutes les transformations uni-déterminatives de la courbe, ainsi qu'il sera montré plus tard; on verra de nouveau par là le motif qui nous a autorisé à placer la théorie de ces transformations avant les présentes recherches.

Par intégrale *algébrique* ou intégrale *abélienne,* on entend une intégrale dans laquelle la fonction sous le signe d'intégration dépend irrationnellement de la variable x, et cela de telle manière qu'elle soit représentable comme fonction rationnelle de *deux* variables x, y entre lesquelles existe une équation algébrique déterminée (la même pour toutes les valeurs de x)

$$F(x, y) = 0.$$

Cette dernière est précisément l'équation de la courbe fondamentale à laquelle appartient l'intégrale. Quant à l'intégrale elle-même, on peut toujours, après Riemann, la supposer sous la forme ([1])

$$\int \frac{\Psi\, dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \tag{1}$$

où Ψ désigne une fonction algébrique rationnelle fractionnaire en x, y tandis qu'entre x, y existe l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre $F = 0$, où, en d'autres termes, x, y désignent les coordonnées d'un point de la courbe fondamentale d'ordre n. Néanmoins nous supposons toujours l'intégrale sous une forme un peu différente qui a été donnée par Aronhold; nous introduirons à cette fin des coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 au lieu de x, y, et ainsi il sera tenu compte à un certain degré, aussi bien des exigences de la symétrie que de la nature projective (ou caractère invariant) de la différentielle. En même temps se trouve indiquée par là une connexion avec l'algèbre des formes ternaires, qui peut être importante pour

---

([1]) *Voir* Riemann, *loc. cit.*, § 9. Lorsque l'intégale n'est pas donnée sous la forme (1), on peut toujours parvenir à cette forme en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fonction, sous le signe d'intégration, par $\frac{\partial F}{\partial y}$.

l'étude des intégrales. Pour préciser, nous écrirons toujours l'intégrale sous la forme

$$(2)\qquad V = \int \frac{\Psi \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}} = \int \frac{\Psi(cx\,dx)}{n a_x^{n-1} a_c},$$

où c_1, c_2, c_3 désignent les coordonnées d'un point quelconque du plan, et x_1, x_2, x_3 sont liés entre eux par l'équation d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre $f \equiv a_x^n = 0$, tandis que Ψ désigne maintenant une fonction homogène fractionnaire du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux quantités x_i. Toutefois, avant d'entrer dans l'examen approfondi de cette représentation, il sera bon de la développer sur un exemple très simple (cas de $n = 2$) [1] : les généralisations ultérieures s'obtiendront alors d'elles-mêmes.

Nous traiterons l'intégrale

$$(3)\qquad V = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}$$

que l'on ramène habituellement à un logarithme au moyen de substitutions répétées; ici, en partant de la notation homogène, nous l'évaluerons de suite directement sous une forme plus générale. Nous la mettrons d'abord sous la forme des intégrales (1) et (2). Nous pouvons, en effet, faire disparaître le radical en liant x à une nouvelle variable y par une équation du second degré. Soit

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

cette dernière; on trouve, en la résolvant par rapport à y,

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = \frac{1}{2} f'(y)$$

$$= \sqrt{2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x^2 - (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}.$$

Si donc nous introduisons les désignations suivantes :

$$A = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2),\quad B = 2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),\quad C = -(a_{22}a_{33} - a_{23}^2),$$

---

[1] *Voir* Aronhold, *Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form* $\Pi(x, y)dx$, *in welcher* $\Pi(x, y)$ *eine beliebige rationale Function ist, und zwischen* x *und* y *eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht.* (*Journal de Crelle*, t. 61). Nous renvoyons instamment à ce travail comme introduction aux idées développées dans le texte.

il vient

$$V = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = 2 \int \frac{dx}{f'(y)}. \tag{4}$$

Actuellement nous transformerons toutes les fonctions par la substitution

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

en fonctions homogènes. Notre équation de condition devient alors

$$f \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k \equiv a_x^2 = 0,$$

et dans V nous devons poser

$$dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2}, \quad f'(y) = \frac{1}{x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2 a_x a_2}{x_3},$$

en sorte que

$$V = 2 \int \frac{dx}{f'(y)} = \int \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3 . a_x a_2}. \tag{5}$$

Dans le dénominateur figure donc encore une fonction linéaire, ce qui était à prévoir, car l'intégrale (3), pour $x = \infty$, $y = \infty$, c'est-à-dire pour un point de rencontre de la conique $f = 0$ avec la droite de l'infini, devient elle-même infinie; la même chose doit donc se présenter dans la forme homogène pour le point de rencontre de la ligne $x_3 = 0$ avec la conique $a_x^2 = 0$. Maintenant, pour être indépendants de la situation du triangle des coordonnées, nous prendrons pour base de nos considérations, au lieu de V, l'intégrale

$$W = 2 \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{u_x . a_x a_2}, \tag{6}$$

où

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3.$$

Les intégrales V et W ne sont pas différentes l'une de l'autre dans le sens projectif. Nous arriverons ici à leur évaluation par une même voie, tandis que, dans le procédé employé habituellement dans le calcul intégral, les deux cas exigent chacun un examen spécial.

L'intégrale W peut se mettre d'une manière remarquable sous

une forme plus *symétrique*. Nous avons en effet, par suite de l'équation de condition $f = 0$, en posant $f_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \equiv f = 0, \\ dx_1 f_1 + dx_2 f_2 + dx_3 f_3 = 0, \end{cases}$$

et de là résulte

$$(8)\quad f_1 : f_2 : f_3 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1.$$

Nous avons d'ailleurs, en vertu de (6),

$$dW . f_2 . u_x = x_3 dx_1 - x_1 dx_3,$$

d'où aussi, en faisant $(x\,dx)_1 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2, \ldots$, et en vertu de la symétrie par rapport aux trois coordonnées suivant (8),

$$dW . f_i . u_x = (x\,dx)_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si l'on multiplie respectivement ces trois équations par les grandeurs arbitraires c_i et qu'on forme la somme des produits, il vient

$$dW(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3) . u_x = \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3 = (c\,x\,dx).$$

Nous obtenons donc pour l'intégrale (6) *la représentation homogène suivante :*

$$(9)\quad W = 2\int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{(c\,x\,dx)}{u_x . \Sigma c_i f_i} = \int \frac{(c\,x\,dx)}{u_x . a_c a_x}.$$

Pour l'évaluation de W, dont la valeur est complètement indépendante des quantités c_i, nous devons à présent déterminer d'une manière convenable ces grandeurs arbitraires. Dans ce but, nous ferons usage du théorème général suivant :

Le déterminant $(c\,x\,dx)$, *divisé par le produit de deux formes ternaires algébriques* φ, ψ, *est proportionnel à une différentielle exacte si l'on fait les quantités* c_i *proportionnelles aux déterminants binaires formés avec les premières dérivées partielles de* φ *et* ψ *par rapport à* x_1, x_2, x_3, c'est-à-dire si l'on fait

$$\rho c_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \quad \rho c_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$

$$\rho c_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}.$$

La démonstration est excessivement simple. Soit en effet

$$\varphi = a_x^m, \quad \psi = \alpha_x^n;$$

il vient

$$\rho c_i = mn.(a\alpha)_i a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1},$$

d'où, suivant une identité connue (p. 352, t. I, équation V),

$$\rho(cx\,dx) = mn(a_x \alpha_{dx} - \alpha_x a_{dx}) a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} = m\varphi.d\psi - n\psi.d\varphi,$$

et par conséquent

$$(10) \qquad \rho \frac{(cx\,dx)}{\varphi.\psi} = m\frac{d\psi}{\psi} - n\frac{d\varphi}{\varphi}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour notre cas, posons maintenant

$$(11) \qquad \varphi = u_x, \quad \psi = a_x a_c, \quad \rho c_i = (ua)_i a_c,$$

il vient alors, d'après (10),

$$(12) \quad \mathrm{W} = \int \frac{(cx\,dx)}{u_x . a_x a_c} = \frac{1}{\rho} \int \left[\frac{d(a_x a_c)}{a_x a_c} - \frac{d(u_x)}{u_x} \right] = \frac{1}{\rho} \log \frac{a_x a_c}{u_x},$$

ρ étant un facteur à déterminer. La considération suivante conduit à cette détermination. De (11) résultent

$$(13) \qquad u_c = 0 \quad \text{et} \quad a_c^2 = 0;$$

nous avons donc, par l'effet de la substitution (11), *choisi pour le point c un des points de rencontre de la droite* $u_x = 0$ *avec la conique* $f = 0$. Or il nous suffit de connaître les rapports des c_i, car la modification simultanée que ces quantités recevraient de la multiplication par un même facteur n'influencerait que la constante arbitraire de l'intégrale. Toutefois nous devons assigner une valeur déterminée à la grandeur ρ dans (11), parce que dans les deux membres des équations (11) figurent les mêmes rapports proportionnels c_1, c_2, c_3. En effet, de la multiplication respective des quantités c_i par des grandeurs arbitraires v_i et de l'addition des produits résulte l'identité

$$(14) \qquad \rho v_c = (avu) a_c;$$

ρ doit donc être une expression du premier ordre par rapport aux

u_i et aux a_{ik}. Actuellement, nous désignerons par c'_i les coordonnées du second point de rencontre de la ligne u avec $f=0$, de telle sorte que

$$\sigma u_1 = c_2 c'_3 - c_3 c'_2, \quad \sigma u_2 = c_3 c'_1 - c_1 c'_3, \quad \sigma u_3 = c_1 c'_2 - c_2 c'_1;$$

il résulte alors de (14) pour $v_i = b_i b_{c'} (f = a_x^2 = b_x^2)$

$$(15) \qquad \rho b_c b_{c'} = (abu) a_c b_{c'} = \frac{1}{2}(abu)(a_c b_{c'} - b_c a_{c'}) = \frac{\sigma}{2}(abu)^2.$$

D'un autre côté, nous avons, à cause de $a_c^2 = 0$,

$$\sigma\rho v_c = \sigma(avu) a_c = (a_c v_{c'} - v_c a_{c'}) a_c = -v_c . a_c a_{c'} = -v_c . b_c b_{c'},$$

et par conséquent

$$\sigma = -\frac{1}{\rho} b_c b_{c'}.$$

Si l'on porte ce résultat dans (15), il vient finalement

$$\rho^2 = -\frac{1}{2}(abu)^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{F},$$

F désignant comme plus haut (t. I, p. 354) la forme adjointe de f,

$$\mathrm{F} = (abu)^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Par là se trouve démontré le théorème qui suit :

Si, dans la supposition que $f(x,y) \equiv f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_x^2 \equiv b_x^2$ soit égal à zéro, on doit évaluer l'intégrale

$$\mathrm{W} = 2\int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{(cx\,dx)}{u_x . a_x a_c},$$

on prendra pour les quantités c_i un système de valeurs satisfaisant aux équations

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u_x = 0,$$

ce qui peut se faire par résolution des équations linéaires (¹)

$$\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{F}}\,c_1 = (ua)_1 a_c, \quad \sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{F}}\,c_2 = (ua)_2 a_c, \quad \sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{F}}\,c_3 = (ua)_3 a_c,$$

dans lesquelles F *désigne la forme adjointe* $(abu)^2$ *de* f; *on a alors*

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{W} = -\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{F}}} \log \frac{a_x a_c}{u_x} + \mathrm{C}.$$

Le signe de $\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{F}}$ *doit concorder avec celui employé dans les équations linéaires et la racine de l'équation* $f(x, y) = 0$ *à introduire dans l'expression différentielle concorder avec celle choisie pour l'expression de l'intégrale.*

Pour donner un exemple de l'applicabilité de la formule (16) dans les cas qui se présentent habituellement, soit

$$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = (x^2 + y^2 - 1),$$

d'où

$$-\frac{1}{2}\mathrm{F} = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2, \quad y = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} f'(y);$$

il vient

$$\mathrm{W} = \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2\sqrt{1 - x^2} + u_3)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}} \log \frac{c_1 x + c_2 y - c_3}{u_1 x + u_2 y + u_3},$$

les quantités c_i devant se déterminer par deux des équations suivantes $\left(\rho = \sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{F}}\right)$,

$$\text{(17)} \quad \rho c_1 = -u_2 c_3 - u_3 c_2, \quad \rho c_2 = u_3 c_1 + u_1 c_3, \quad \rho c_3 = u_1 c_2 - u_2 c_1.$$

Si l'on pose encore $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 0$, il vient $\rho = \sqrt{-1} = i$

(¹) Sur la détermination des quantités c_i, comparez ce qui a été dit t. I, p. 107 et 116.

et, depuis (17), $c_3 = 0$, $c_1 = i = ic_2$ si $c_2 = 1$; d'où

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i}\log(xi + y) = \arc\sin x.$$

Posant ensuite $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = 1$, on aura $\rho = 1$, $c_2 = 0$, $c_1 = -c_3$, d'où $c_1 = 1$, si $c_3 = -1$, et, par conséquent,

$$\int y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

En faisant enfin $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$, d'où $\rho = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = -1$, on obtient

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Cet exemple suffira pour expliquer l'usage de la forme homogène d'une intégrale algébrique et mettre en évidence ses avantages pour certaines vues générales.

L'exemple précédent a déjà mis en relief le caractère invariant de la différentielle dW. En fait, on peut considérer toute différentielle dV de la forme (2) comme un invariant fonctionnel simultané de la courbe primitive $f = 0$ et des zéros et des infinis de la fonction Ψ situés sur $f = 0$. Car il est clair, en premier lieu, que l'expression différentielle, étant une fonction homogène d'ordre zéro des x_i, ne change pas si les x_i varient simultanément d'un même facteur, et que cette expression, absolument comme pour $n = 2$ dans le précédent exemple, est, en vertu des équations (7), *complètement indépendante du point c*, et est déterminée uniquement par la fonction Ψ. Mais, à l'égard d'une transformation linéaire quelconque, on a cette proposition que *la différentielle dV n'éprouve d'autre changement que l'adjonction, comme facteur, du déterminant de la substitution* [1]. Si

---

[1] Un fait analogue a lieu pour toute différentielle binaire de la forme

$$\frac{\alpha_x^{n-2}(x\,dx)}{\sqrt[m]{a_x^{mn}}}.$$

Une telle expression est un covariant simultané des formes a_x^{mn}, α_x^{n-2}. Pour $m = 2$, ce sont là les différentielles hyperelliptiques; pour $m = 2$, $n = 2$, on a la différentielle elliptique, qui doit être considérée comme un covariant fractionnaire de la forme primitive.

nous posons, en effet,

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3,$$

nous aurons, en désignant par k_i les coordonnées du point correspondant au point c (t. I, p. 331),

$$(cxdx) = r.(kydy),$$

et si nous posons

$$f(x) = \mathrm{F}(y), \quad \Psi(x) = \Phi(y),$$

il vient

$$d\mathrm{V} = \frac{\Psi(cxdx)}{\Sigma c_i f_i} = r.\frac{\Phi(kydy)}{\Sigma k_i \mathrm{F}_i}.$$

Entre autres choses, on peut utiliser ce résultat pour amener l'intégrale V à la forme (1). Dans ce but, posons

$$x_i = a_i t + b_i x + c_i y,$$

x, y, t désignant les nouvelles coordonnées. Il vient alors

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{F}(t, x, y), \quad \Psi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(t, x, y),$$

$$\Sigma c_i f_i = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial x_2}{\partial y} + f_3 \frac{\partial x_3}{\partial y} = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y},$$

et enfin

$$(cxdx) = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 t + b_1 x + c_1 y & a_1 dt + b_1 dx + c_1 dy \\ c_2 & a_2 t + b_2 x + c_2 y & a_2 dt + b_2 dx + c_2 dy \\ c_3 & a_3 t + b_3 x + c_3 y & a_3 dt + b_3 dx + c_3 dy \end{vmatrix}$$

$$= (abc).(tdx - xdt),$$

d'où, faisant entrer (abc) dans Φ et posant $t = 1$,

$$d\mathrm{V} = n \frac{\quad}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\quad}};$$

ici y est défini comme fonction de x, au moyen de $\mathrm{F} = 0$.

En vertu de $f = 0$, la différentielle $d\mathrm{V}$ dépend naturellement d'une variable *unique*. Toutefois, pour introduire explicitement cette dernière, il faut en général résoudre des équations d'ordre élevé. Celles-ci ne sont du *second* degré que pour les courbes hyperelliptiques, comme on va le voir dans ce qui suit.

Nous allons d'abord, pour le cas de $n = 3$, où Ψ peut être supposé égal à 1, mettre la différentielle dV sous la forme précédemment employée de la différentielle elliptique (t. II, p. 419), ainsi que l'a fait le premier Aronhold [1]. Nous placerons le point c sur la courbe $f = 0$, et nous entendrons par $u_x = 0$, $v_x = 0$ deux droites passant par c. Chaque rayon du faisceau

$$\varkappa u_x - \lambda v_x = 0 \tag{18}$$

coupe C_3 en deux points mobiles; les coordonnées de ces derniers peuvent donc s'exprimer en $\varkappa$, λ au moyen d'un radical du second degré. Mais il n'est pas nécessaire de les calculer d'une manière effective, et l'on peut arriver au but ainsi qu'il suit. Dans le faisceau (18) sont comprises, comme l'on sait, quatre tangentes de C_3, tangentes dont les points de contact ne sont pas situés en c. Les valeurs correspondantes des paramètres $\varkappa$, λ seront données par une équation du quatrième degré, telle que $\varphi(\varkappa, \lambda) = 0$, en sorte que $\varphi(v_x, u_x) = 0$ représentera le produit de ces quatre tangentes. La courbe $\varphi = 0$ rencontre C_3 quatre fois en c et deux fois en chacun des quatre points de contact; mais C_3 est rencontrée de la même manière par la courbe $[a_x^2 a_c]^2 = 0$. On a donc, en choisissant convenablement les constantes qui entrent dans φ,

$$[a_x^2 a_c]^2 = \varphi(v_x, u_x) + Af. \tag{19}$$

Il vient ensuite, puisque ρc_i peut être fait égal à $(uv)_i$, et que $\sigma\lambda = u_x$, $\sigma\varkappa = v_x$,

$$\rho(c\,x\,dx) = u_x v_{dx} - v_x u_{dx} = \sigma^2(\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda), \quad \varphi(v_x, u_x) = \sigma^4 \varphi(x, \lambda), \tag{20}$$

d'où [2]

$$dV = \frac{(c\,x\,dx)}{a_x^2 a_c} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda}{\sqrt{\varphi(\varkappa, \lambda)}}.$$

On obtient d'ailleurs immédiatement l'expression écrite en dernier lieu sous la forme demandée, dans laquelle figurent les invariants S, T, si l'on place en particulier le point c en un *point d'in-*

---

(1) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 25 avril 1861.

(2) Les points de contact des quatre tangentes sont donc les points de ramification de la surface de Riemann qui répond à l'intégrale.

flexion de C_3, de manière à avoir simultanément

$$f(c) \equiv a_c^3 = 0, \quad \Delta(c) \equiv \alpha_c^3 = 0.$$

Actuellement, le produit des quatre tangentes menées de c à C_3 est donné par l'équation (t. II, p. 226)

$$3(Df)^2 - 4f D^2 f = 0, \tag{21}$$

où

$$Df = a_x^2 a_c, \quad D^2 f = a_x a_c^2.$$

Parmi ces tangentes est nécessairement comprise aussi la tangente d'inflexion de c, et du premier membre de l'équation (21) doit pouvoir se séparer un facteur $D^2 f$. Pour effectuer cette séparation, il faut faire usage des propositions d'après lesquelles la courbe $f = 0$ peut être considérée comme la hessienne de trois autres courbes du faisceau $\varkappa f - \lambda\Delta = 0$ déterminées par l'équation (t. II, p. 258 et 300)

$$G_1(\varkappa, -\lambda) \equiv \varkappa^3 - \frac{1}{2} S \varkappa \lambda^2 + \frac{1}{3} T \lambda^3 = 0, \tag{22}$$

et la hessienne est toujours touchée par les tangentes d'inflexion de la courbe primitive ([1]). Il ressort de cette dernière remarque que les trois tangentes menées de c à $f = 0$ en dehors de $D^2 f = 0$ sont précisément les tangentes d'inflexion de c par rapport aux trois courbes primitives correspondant à $f = 0$, en vertu de (22). Ces tangentes sont donc déterminées par (22), si en même temps

$$\varkappa D^2 f - \lambda D^2 \Delta = 0,$$

$D^2 \Delta$ étant égal à $\alpha_x \alpha_c^2$; le produit de leur équation est, par suite,

$$G_1(D^2\Delta, -D^2 f) \equiv (D^2\Delta)^3 - \frac{1}{2} S . D^2\Delta . (D^2 f)^2 + \frac{1}{3} T (D^2 f)^3 = 0. \tag{23}$$

Or le produit de l'expression qui figure au premier membre dans $D^2 f$ doit se confondre avec l'expression qui figure au premier

---

[1] C'est là une conséquence immédiate du fait que la polaire linéaire d'un point de la hessienne, relativement à la courbe primitive, touche la hessienne en un certain point (t. II, p. 225), car la tangente d'inflexion de la courbe primitive est précisément la polaire du point d'inflexion (*voir* aussi la note 3 de la p. 416, t. II).

membre de (21), sauf un facteur constant (M) à déterminer, c'est-à-dire que nous avons, en vertu de $f = 0$ [1],

$$(24) \qquad M.3(Df)^2 = D^2 f . G_1(D^2\Delta, -D^2 f),$$

ce qui concorde encore avec l'équation (19), car le faisceau (18) est ici remplacé par le faisceau $\varkappa D^2 f - \lambda D^2 \Delta$. On voit sur cette équation que M doit être du huitième degré, par rapport aux coefficients de f, et du sixième par rapport aux quantités c_i. Mais, comme tout covariant du sixième ordre de f peut s'exprimer par un *seul* covariant de cette espèce et par f, Δ (t. II, p. 314), nous pouvons, en vertu de $a_c^3 = 0$, $\alpha_c^3 = 0$, poser

$$M = \varphi(c) C,$$

φ étant le covariant unique dont nous avons parlé (t. II, p. 319),

$$\varphi(x) = (ab\alpha)(ab\beta) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2,$$

et C désignant un facteur numérique. La détermination de ce dernier se fait très simplement à l'aide de la forme canonique. Pour plus de simplicité, nous prendrons pour f une courbe à invariant S évanouissant (ce qui est indifférent pour la question présente); il vient alors (t. II, p. 311 et 313)

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3, \quad \Delta = 6 x_1 x_2 x_3,$$
$$Df = x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3, \quad D^2 f = x_1 c_1^2 + x_2 c_2^2 + x_3 c_3^2,$$
$$\varphi(c) = 8(c_2^3 c_3^3 + c_3^3 c_1^3 + c_1^3 c_2^3), \quad S = 0, \quad T = -6,$$

ou, si nous choisissons pour c le point d'inflexion ayant pour coordonnées 0, 1, —1,

$$Df = x_2^2 - x_3^2, \quad D^2 f = x_2 + x_3, \quad \varphi(c) = -8, \quad D^2\Delta = -2x_1.$$

De là résulte, par un calcul simple,

$$3(Df)^2 = 4f . D^2 f - \frac{1}{2} D^2 f [2(D^2 f)^3 - (D^2\Delta)^3].$$

---

[1] Cette équation subsiste d'ailleurs encore si c est un point quelconque de f. Alors, en effet, le sommet du faisceau $\varkappa D^2 f - \lambda D^2\Delta = 0$ est situé au point tangentiel de c, et les tangentes issues du sommet sont $D^2 f = 0$, et $C_1(D^2 f, -D^2\Delta) = 0$ (*voir* t. II, p. 415). Seulement, il faut alors déterminer M d'une autre manière.

D'un autre côté, il vient, d'après (23), pour notre cas,

$$G_1(D^2\Delta, -D^2f) = (D^2\Delta)^3 - 2(D^2f)^3.$$

A cause de $M = \varphi(c)$, $C = -8C$ et, en vertu de $f = 0$, il résulte donc de (24) $C = -\frac{1}{4}$, et l'on obtient

$$(25)\qquad M = -\frac{1}{4}\varphi(c).$$

En conséquence, si c est un point d'inflexion, existe, en vertu de $f(c) = 0$, $\Delta(c) = 0$, $f(x) = 0$, *l'identité*

$$(26)\qquad -\frac{3}{4}\varphi(c).(Df)^2 = D^2f.G_1(D^2\Delta, -D^2f).$$

Par là se trouve calculé le dénominateur de notre différentielle en fonction de $\varkappa = D^2\Delta$ et $\lambda = D^2f$. Pour le calcul du numérateur, observons que

$$(27)\qquad \rho c_i = (\alpha a)_i \alpha_c^2 a_c^2,$$

parce que c est le point d'intersection de $a_c^2 a_x = 0$ et $\alpha_c^2 \alpha_x = 0$, d'où aussi

$$(28)\qquad \begin{cases} \rho(cxdx) = \alpha_c^2 a_c^2(\alpha_x a_{dx} - a_x \alpha_{dx}) \\ \qquad\qquad = D^2\Delta.d(D^2f) - D^2f.d(D^2\Delta) \\ \qquad\qquad = \varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa. \end{cases}$$

La détermination du facteur ρ s'opère d'une manière identique à la détermination du facteur correspondant dans les équations (11).

Soit c' un point quelconque de la ligne $D^2\Delta \equiv u_x = 0$; nous aurons

$$\sigma u_i = \sigma\alpha_i\alpha_c^2 = (cc')_i.$$

De (27) résulte ensuite

$$\rho v_c = (\alpha a v)\alpha_c^2 a_c^2 = (avu)a_c^2,$$

d'où, pour $v_i = a_i a_c a_{c'} = b_i b_c b_{c'}$,

$$\rho b_c^2 b_{c'} = (abu)a_c^2 b_c b_{c'} = \frac{1}{2}(abu)(a_c b_{c'} - b_c a_{c'})a_c b_c$$

$$= \frac{\sigma}{2}(abu)^2 a_c b_c = \frac{\sigma}{2}(abx)(ab\beta)a_c b_c \alpha_c^2 \beta_c^2.$$

D'autre part, nous avons, à cause de $a_c^3 = 0$,

$$\sigma\rho . v_c = \sigma(avu)a_c^2 = (a_c v_{c'} - v_c a_{c'})a_c^2$$
$$= - v_c . a_c^2 a_{c'} = - v_c . b_c^2 b_{c'},$$

et il s'ensuit, par combinaison de ces relations,

$$\rho^2 = -\frac{1}{2}(ab\alpha)(ab\beta)a_c b_c \alpha_c^2 \beta_c^2 = -\frac{1}{2}\varphi(c).$$

Finalement, l'équation (28) se transforme donc en

$$\sqrt{-\frac{1}{2}\varphi(c)}.(cxdx) = \varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa,$$

et nous obtenons ainsi, par suite de (26), *le résultat suivant :*

$$dV = \frac{(cxdx)}{Df} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa}{\sqrt{\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)}},$$

ou enfin, pour $\varkappa = \mu$, $\lambda = 1$,

$$dV = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3 - \frac{1}{2}S\mu + \frac{1}{3}T}};$$

nous avons conséquemment encore la forme trouvée ci-dessus (t. II, p. 419).

L'établissement de cette forme normale pour dV peut encore être effectuée d'une manière différente et fort élégante, d'après la marche indiquée par MM. Hermite et Brioschi, en faisant usage d'une substitution d'ordre élevé ([1]). Cette transformation repose sur une identité qui existe entre les formes Ω, ψ, f, Δ, et que nous avons précédemment établie [*voir* équation (42), t. II, p. 407], savoir

$$(24)^2\Omega^2 = 384\psi^3 - 12\psi S_{\Delta,-f} + 2T_{\Delta,-f}.$$

Pour $f = 0$, nous avons en particulier (t. II, p. 302)

$$S_{\Delta,-f} = S\Delta^4, \quad T_{\Delta,-f} = T\Delta^6,$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 63, p. 30.

et il vient, en conséquence,

$$(29)\qquad 24^2\Omega^2 = 384\psi^3 - 12S\psi\Delta^4 + 2T\Delta^6.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$\Omega u_c \equiv (a\alpha\psi)a_x^2\alpha_x^2\psi_x^5 . u_c$$
$$= [(a\alpha u)\psi_c - (a\psi u)\alpha_c + (\alpha\psi u)a_c]a_x^2\alpha_x^2\psi_x^5;$$

et de là résulte pour $u_i = (x\,dx)_i$, si nous supposons $a_x^3 = 0$, $a_x^2 a_{dx} = 0$,

$$\Omega(c\,x\,dx) = a_x^2 a_c(\alpha_x^3\psi_x^5\psi_{dx} - \psi_x^6\alpha_x^2\alpha_{dx})$$
$$= \frac{1}{3}a_x^2 a_c\left(\frac{1}{2}\Delta\,d\psi - \psi\,d\Delta\right).$$

En multipliant donc dV, numérateur et dénominateur, par Ω, il vient, en vertu de (29),

$$dV \equiv \frac{(c\,x\,dx)}{a_x^2 a_c} = \frac{1}{6}\,\frac{\Delta\,d\psi - 2\psi\,d\Delta}{\Omega}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\Delta\,d\psi - 2\psi\,d\Delta}{\sqrt{16\psi^3 - \frac{1}{2}S\Delta^4\psi + \frac{1}{12}T\Delta^6}}.$$

Il suffit enfin de poser $4\psi = \varkappa$, $\Delta^2 = \lambda$ *pour obtenir le résultat qui suit*

$$dV = \sqrt{\frac{1}{6}}\,\frac{\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda}{\sqrt{\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)}}.$$

Cette représentation se distingue d'ailleurs de celle d'Aronhold, par la circonstance qu'actuellement aux *dix-huit* points d'intersection de la courbe du sixième ordre $\varkappa\Delta^2 - 4\psi\lambda = 0$ avec $f = 0$ correspond une même valeur du paramètre $\varkappa : \lambda$, tandis que précédemment une même valeur du paramètre n'appartenait qu'à *deux* points mobiles du faisceau de rayons $\varkappa D^2 f - \lambda D^2\Delta = 0$.

Les intégrales qui appartiennent à des courbes *hyperelliptiques* peuvent se représenter d'une manière tout à fait semblable, comme fonctions d'un paramètre, au moyen d'un radical du second degré, à la condition d'avoir préalablement amené la courbe à la forme

normale, c'est-à-dire à la forme (p. 75 et suiv),

$$F(x,y) \equiv y^2\varphi(x) - \psi(x) = 0.$$

En effet, on a alors

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\varphi(x) = 2\sqrt{\varphi(x).\psi(x)},$$

d'où

$$\frac{\Psi(x,y).dx}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\Psi\left(x, \sqrt{\dfrac{\psi}{\varphi}}\right).dx}{2\sqrt{\varphi.\psi}}. \tag{30}$$

Dans le dénominateur figure donc la racine carrée d'une expression du $(2p+2)^{ième}$ *degré en* x. Par l'évanouissement de cette dernière sont représentées les tangentes que l'on peut mener du point multiple d'ordre p à la courbe C_{p+2}. Cette dernière remarque est encore exacte quand on suppose la courbe C_{p+2} donnée sous la forme

$$F(x,y) \equiv y^2\varphi_p(x) + 2y\varphi_{p+1}(x) + \varphi_{p+2}(x) = 0.$$

La polaire du point à l'infini sur l'axe Y

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} \equiv y\varphi_p(x) + \varphi_{p+1}(x) = 0$$

coupe en effet C_{p+2} aux $2p+2$ points de contact des tangentes issues du point multiple d'ordre p, tangentes dont l'équation sera donnée par une relation de la forme $X_{2p+2}(x) = 0$, et elle a elle-même au point multiple d'ordre p de f un point de même multiplicité dont les branches touchent celles de la courbe primitive, en sorte qu'il s'y trouve $p(p+1)$ points d'intersection. Les intersections de la courbe $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$ avec $F = 0$ sont donc les mêmes que celles de la courbe $X_{2p+2}(x) = 0$ avec $F = 0$, c'est-à-dire que l'on peut poser (C étant une constante)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = C.X_{2p+2}(x) + A.f, \tag{31}$$

relation analogue à l'équation (19) et ayant les mêmes applications.

Nous revenons à l'examen approfondi de notre différentielle générale

$$dV = \frac{\Psi(c\,x\,dx)}{a_x^{n-1}\,a_x},$$

dans laquelle Ψ désigne une fonction algébrique quelconque de l'ordre $n-3$ par rapport aux quantités x_i. En fixant d'une manière plus précise la nature de cette fonction, nous allons établir d'abord *certaines formes normales pour les expressions différentielles que nous considérerons exclusivement plus tard.* Suivant la manière dont se comporte la fonction Ψ aux points simples ou multiples de $f=0$, nous avons à traiter successivement différents cas; dans tous, nous montrerons qu'il est nécessaire, avant toute chose, de considérer des différentielles (et leurs intégrales) dans lesquelles Ψ est une fonction entière, ou celles dans lesquelles ne figure au dénominateur de Ψ qu'une puissance d'une fonction linéaire des x_i. Nous nous occuperons ensuite de la manière d'être des formes principales obtenues aux points doubles de $f=0$.

Soit maintenant

$$\Psi = \frac{M}{N},$$

le dénominateur étant supposé désigner une fonction entière d'ordre m, et le numérateur, qui sera également une fonction entière, s'élevant par conséquent à l'ordre $m+n-3$. Les courbes $f=0$, $N=0$ se coupent en mn points, dont l'ensemble peut être représenté par une équation [1]

$$u_\chi^{mn} = 0.$$

Nous désignerons les coordonnées de ces points d'intersection respectivement par

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ x^{(3)},\ \ldots,\ x^{(mn)},$$

en entendant toujours par $x^{(i)}$ les trois coordonnées $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$.

---

(1) Relativement à une méthode générale pour l'établissement de cette équation sous forme symbolique, *voir* t. I, p. 350. Si l'on prend en particulier $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, l'équation du faisceau de rayons sera obtenue par élimination de x_1 entre $f=0$ et $N=0$. (*Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 5 et suiv.). Alors $(\chi x \xi)^{mn}$ dépend uniquement de la seule variable binaire $x_2 : x_3$ (*voir* la suite du texte).

Joignons ces points à un point fixe quelconque ξ. L'ensemble des mn lignes de jonction sera représentée par $(\chi x \xi)^{mn} = 0$, et nous pouvons poser

$$(32) \qquad (\chi x \xi)^{mn} = \prod_{i=1}^{i=mn} (x^{(i)} x \xi).$$

Si d'ailleurs nous supposons, ainsi que cela doit arriver d'abord, que *les points $x^{(i)}$ soient tous distincts les uns des autres* (et conséquemment aussi ne soient pas situés en des points multiples de f) l'expression (32) doit, en toute hypothèse, pouvoir se représenter sous la forme

$$(33) \qquad (\chi x \xi)^{mn} = \mathfrak{A} f + \mathfrak{B} \mathrm{N},$$

$\mathfrak{B} = 0$ étant une courbe de l'ordre $m(n-1)$, qui passe par tous les points de rencontre des mn rayons avec $f = 0$ non situés sur $\mathrm{N} = 0$. En conséquence il vient, pour $f = 0$,

$$\Psi = \frac{\mathrm{M} . \mathfrak{B}}{(\chi x \xi)^{mn}},$$

expression où, en vertu de (32), figure au dénominateur un produit de fonctions purement linéaires. Mais les lignes représentées par l'évanouissement de ce dernier passent toutes par un même point ξ, en sorte que le dénominateur ne dépend, en réalité, que d'une seule variable binaire, savoir le paramètre du faisceau de rayons passant par ξ. On peut donc, suivant les lois de la décomposition des fractions rationnelles binaires, représenter la fonction Ψ comme une somme de termes particuliers dont chacun n'a au dénominateur qu'une fonction linéaire; la réduction annoncée de la différentielle $d\mathrm{V}$ aux formes normales de l'espèce précédente se trouve ainsi effectuée.

Mais on peut encore obtenir aisément le même résultat sans introduire explicitement la variable binaire du faisceau de rayons, et nous insistons d'autant plus volontiers sur ce sujet que plus tard nous obtiendrons aussi par une voie analogue des développements en série plus compliqués qui, autrement, se déduiraient à l'aide de décompositions répétées de fonctions rationnelles en fractions simples. En même temps nous ferons un pas de plus dans la régularisation de la différentielle, en ce sens que nous dis-

poserons le numérateur de telle sorte que deux seulement des zéros de la fonction linéaire du dénominateur donnent lieu à des infinis de l'intégrale.

Il est utile pour cet objet de *faire coïncider le point* ξ *avec un des points* $x^{(i)}$, *par exemple avec* $x^{(mn)}$, convention qui sera observée dans ce qui suit. L'équation des autres $mn-1$ points $x^{(i)}$ étant alors donnée par $u_\psi^{mn-1}=0$, nous pouvons poser

$$(\chi x\xi)^{mn}=(\psi x\xi)^{mn-1}a_\xi^{n-1}a_x,$$

et à la place de (32) et (33) se présentent les équations

$$(34)\qquad (\psi x\xi)^{mn-1}=\prod_{i=1}^{i=mn-1}(x^{(i)}x\xi),\quad (\psi x\xi)^{mn-1}=\mathrm{A}f+\mathrm{BN};$$

B est ici une courbe d'ordre $mn-m-1$ qui passe par tous ceux des points non situés sur $\mathrm{N}=0$ où les rayons issus de ξ rencontrent $f=0$, *et* $mn-2$ *de ses intersections avec* f *sont placées au point* ξ *lui-même.* On a aussi alors

$$\Psi=\frac{\mathrm{M}\mathfrak{B}}{(\chi x\xi)^{mn}}=\frac{\mathrm{MB}}{(\psi x\xi)^{mn-1}}.$$

Actuellement, pour simplifier la notation, posons

$$mn-1=\mu,\quad \mathrm{B}=\mathrm{B}_x^{\mu-m},\quad \mathrm{M}=\mathrm{M}_x^{m+n-3}.$$

Faisons ensuite passer une courbe C d'ordre $\mu+n-3$, $\mathrm{C}_x^{\mu+n-3}=0$ par l'ensemble des $n(\mu+n-3)$ points de rencontre de $\mathrm{M}=0$ et $\mathrm{B}=0$ avec $f=0$; cette courbe présentera également quelque chose de particulier à l'égard des intersections $x^{(i)}$ de $\mathrm{N}=0$ avec $f=0$. Nous avons d'abord, en toute hypothèse,

$$(35)\qquad \mathrm{C}_x^{\mu+n-3}=\mathrm{M}_x^{m+n-3}\mathrm{B}_x^{\mu-m}+\mathrm{D}.f.$$

Nous déterminerons d'une façon plus précise la courbe C, ainsi qu'il suit. La ligne joignant un point d'intersection $x^{(k)}$ au point ξ coupe la courbe primitive en $n-2$ autres points que nous désignerons par $x^{(k,1)}, x^{(k,2)}, \ldots, x^{(k,n-2)}$; nous faisons passer par tous ces points [1] la $(\mu-1)^{\text{ième}}$ polaire du point $x^{(k)}$ relativement à $\mathrm{C}=0$,

[1] Comme la polaire en question est d'ordre $n-2$, on peut précisément encore satisfaire à la condition dont il s'agit; la polaire ne pourrait comprendre plus de

en sorte que nous avons les équations

$$(36)\qquad C^{\mu-1}_{x^{(k)}} C^{n-2}_{x^{(k,1)}} = 0, \quad C^{\mu-1}_{x^{(k)}} C^{n-2}_{x^{(k,2)}} = 0, \ \ldots, \ C^{\mu-1}_{x^{(k)}} C^{n-2}_{x^{(k,n-2)}} = 0,$$

pour toutes les valeurs depuis $k = 1$ jusqu'à $k = \mu$. Cela donne $\mu(n-2)$ équations linéaires pour les coefficients de C. Parmi ces derniers, en vertu de (35), $\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+1$ seulement sont arbitraires, savoir les coefficients de l'expression D; et comme la condition

$$\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+1 \geqq \mu(n-2)$$

est toujours satisfaite pour $m > 1$, il est, en fait, possible, de disposer la courbe C conformément aux équations (35) et (36). Nous reviendrons encore, en finissant, sur le cas de $m = 1$.

Formons maintenant, à l'aide de la courbe C, l'expression suivante du $(\mu+n-3)^{\text{ième}}$ ordre

$$S = \mu M_x^{m+n-3} B_x^{\mu-m} \prod_{k=1}^{k=\mu} (\psi x^{(k)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi)$$
$$- C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\mu} \left[C^{\mu-1}_{x^{(k)}} (x^{(k)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_{k} (x^{(i)} x \xi)(\psi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi) \right].$$

Les η_i sont ici les coordonnées d'un point quelconque du plan, et l'indice k adjoint au second signe de produits indique que le produit correspondant multiplié par $C^{\mu-1}_{x^{(k)}}(x^{(k)}\eta\xi)$, c'est-à-dire celui qui se présente dans le $k^{\text{ième}}$ terme de la somme, doit être formé de $\mu - 1$ facteurs seulement, le facteur relatif à $i = k$ devant être omis; au contraire, dans le premier terme de la différence S, figure un produit de μ facteurs. *Cette fonction* S *s'évanouit d'abord pour tous les points d'intersection de* B *et* f. En effet, pour $x = x^{(r,s)}$, le premier terme s'annule en vertu de $f = 0$, et dans la somme, tous les termes qui renferment le facteur $(x^{(r)} x^{(r,s)} \xi)$ s'évanouissent, puisque $x^{(r,s)}$ désigne précisément un point de la ligne joignant $x^{(r)}$ à ξ. Il ne reste ainsi que le terme correspondant

---

$n-2$ points de la droite sans se décomposer en la droite elle-même et en une courbe C_{n-3}.

dans la somme à $k = r$; mais ce dernier disparaît également à cause de (36). *En outre*, S *s'évanouit pour chacune des* μ *intersections de* N *avec* f. En effet, pour $x = x^{(r)}$, tous les termes de la somme figurant dans S qui contiendraient un facteur $(x^{(r)} x^{(r)} \xi)$ disparaissent, et il reste seulement le terme correspondant à l'indice $k = r$:

$$- C_{x^{(r)}}^{\mu+n-3} (x^{(r)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_{r} (x^{(i)} x^{(r)} \xi) (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi).$$

Or de (35) résulte

$$C_{x^{(r)}}^{\mu+n-3} = M_{x^{(r)}}^{m+n-3} . B_{x^{(r)}}^{\mu-m},$$

et l'on déduit de la première équation (34), par formation polaire, en observant que les autres termes de la somme qui figure d'abord dans le premier membre deviennent nuls pour $x = x^{(r)}$,

$$(x^{(r)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_{r} (x^{(i)} x^{(r)} \xi) = \mu . (\psi x^{(r)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi).$$

Le terme ci-dessus mentionné qui reste de la somme figurant dans S devient donc égal à

$$- \mu M_{x^{(r)}}^{m+n-3} B_{x^{(r)}}^{\mu-n} \prod_{i=1}^{i=\mu} (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi),$$

c'est-à-dire égal, sauf le signe, au premier terme de S pour $x = x^{(r)}$; S lui-même est donc nul, ce qu'il fallait démontrer. L'équation $S = 0$ représente, d'après cela, une courbe qui passe par toutes les intersections simples de $f = 0$ et $(\psi x \xi)^{\mu} = 0$. Au point ξ, d'après notre détermination de $B = 0$, chacun des termes de S (et par conséquent S lui-même) s'évanouit au degré $\mu - 1$ de multiplicité. Mais, comme la courbe (pour $m > 1$) n'est pas encore complètement déterminée par les conditions (36), nous pouvons encore disposer de C de telle sorte qu'un $\mu^{\text{ième}}$ point d'intersection de $S = 0$ avec $f = 0$ tombe à ξ. *On peut, pour cette raison, poser*

$$S \equiv P . f + R . (\psi x \xi)^{\mu}, \tag{37}$$

$R = R_x^{n-3}$ désignant une fonction entière homogène du $(n-3)^{\text{ième}}$

ordre par rapport aux x_i. Si nous divisons enfin dans les deux membres de (37) par le produit

$$(\psi x\xi)^\mu \cdot \prod_{k=1}^{k=\mu} (\psi x^{(k)}\xi)^{\mu-1}(\psi\eta\xi) = (\psi x\xi)^\mu . \Pi,$$

nous obtenons, en vertu de (32) et (34), sous la condition $f = 0$, la décomposition suivante de Ψ en fractions simples :

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} \Psi &\equiv \frac{M}{N} = \frac{MB}{(\psi x\xi)^\mu} \\ &= \frac{1}{\mu}\frac{R_x^{n-3}}{\Pi} + \frac{C_r^{n-2}}{\mu}\sum_{k=1}^{k=\mu}\frac{C_{x^{(k)}}^{\mu-1}.(x^{(k)}\eta\xi)}{(\psi x^{(k)}\xi)^{\mu-1}(\psi\eta\xi).(x^{(k)}x\xi)}. \end{aligned}\right.$$

Toute fonction algébrique du $(n-3)^{ième}$ ordre qui ne devient infinie que pour un certain nombre de points de f distincts peut donc se décomposer, à l'aide de $f=0$, en une fonction entière d'ordre $n-3$ et en une somme de fonctions dont les dénominateurs sont linéaires et qui ne deviennent infinies qu'en deux des points d'évanouissement de ces derniers, le numérateur devenant nul en vertu de (36) pour les $n-2$ autres (¹).

Il nous reste encore à traiter le cas où $m=1$, où, par suite, dans le dénominateur de Ψ figure une fonction linéaire $u=u_x$, dans le numérateur une fonction M du $(n-2)^{ième}$ ordre, en sorte que $\Psi = \frac{M}{u}$. Supposons que les points d'intersection de u_x avec f soient désignés par $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, et soient $Q_2=0$, $Q_3=0, \ldots,$ $Q_n=0$ des courbes spéciales du $(n-2)^{ième}$ ordre comprenant tous les points de rencontre de la droite avec $f=0$, excepté pour Q_2 les points $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$, pour Q_3 les points $x^{(1)}$ et $x^{(3)}, \ldots,$ pour

(¹) La possibilité d'un tel développement résulte au surplus immédiatement des conceptions de Riemann; car une fonction algébrique est complètement définie (à une constante près) sur la surface de Riemann qui répond à $f=0$ par ses zéros et ses infinis; mais les deux systèmes se confondent pour les deux membres de (38). Au cas où plusieurs des intersections de f et N sont situées sur une droite passant par ξ, quelques modifications sont à apporter au texte, mais elles sont sans influence sur les résultats.

Q_n les points $x^{(1)}$ et $x^{(n)}$. On peut alors, dans l'équation [1]

$$M - k_2 Q_2 - k_3 Q_3 - \ldots - k_n Q_n = 0,$$

déterminer les $n-1$ constantes k_i de telle sorte que la courbe ainsi représentée passe par $n-1$ points d'intersection de la droite avec $f=0$, et conséquemment renferme cette droite tout entière. En effet, si l'on indique par des indices supérieurs que les coordonnées du point d'intersection en question ont été introduites dans les fonctions M et Q_i, il suffit de satisfaire aux équations

$$M^{(2)} - k_2 Q_2^{(2)} = 0, \quad M^{(3)} - k_3 Q_3^{(3)} = 0, \ldots, \quad M^{(n)} - k_n Q_n^{(n)} = 0,$$

pour que les points $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(n)}$ soient situés sur la courbe précédente. Si l'on détermine les constantes k_i par ce moyen, la courbe dont il s'agit se décompose en une courbe du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre $R=0$ et en la droite $u_x=0$, de sorte que l'on a identiquement

$$M = k_2 Q_2 + k_3 Q_3 + \ldots + k_n Q_n + u_x . R,$$

et il vient, par suite,

$$\Psi = \frac{M}{u_x} = R + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{k_i Q_i}{u_x},$$

expression dans laquelle chacun des termes de la somme ne devient infini qu'en deux points. *Le résultat précédent reste donc encore exact pour $m=1$.*

Nous mentionnerons encore les modifications que subissent les développements précédents lorsque, parmi les mn intersections, plusieurs coïncident (toutefois non en des points singuliers de f). Supposons qu'il n'y ait plus que ν de ces points $x^{(i)}$ ayant une situation distincte, et que chacun d'eux compte respectivement r_i fois, en sorte que

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = mn.$$

Faisons coïncider encore le point ξ avec un de ces points, $x^{(\nu)}$ par exemple, et posons, pour abréger,

$$\lambda = mn - r_\nu,$$

---

[1] *Voir* Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 18.

r_ν étant choisi de telle sorte que $mn - 2r_\nu$ soit égal ou supérieur à zéro [1]. L'équation des lignes qui joignent ξ aux λ autres points étant donnée par $(\psi x \xi)^\lambda = 0$, à la place de la seconde équation (34) intervient la suivante

$$(\psi x \xi)^\lambda = \mathrm{A}f + \mathrm{B}_x^{\lambda-m}\mathrm{N},$$

$\lambda - r_\nu$ intersections de $\mathrm{B} = 0$ avec $f = 0$ étant réunies en ξ. Nous déterminerons ensuite une courbe $\mathrm{C} = 0$ de l'ordre $\lambda + n - 3$ répondant aux équations (35) et (36), en sorte que la $k^{\text{ième}}$ polaire de $x^{(k)}$ s'évanouit r_k fois pour tout point $x^{(k,i)}$ [2]. A la place de S vient alors l'expression

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S}' = {} & \mathrm{M}_x^{m+n-3}\mathrm{B}_x^{\lambda-m}\prod_{i=1}^{i=\nu-1}(\psi x^{(i)}\xi)^{\lambda-r_i}(\psi \eta_i \xi)^{r_i} \\ & - \mathrm{C}_x^{n-2}\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\Bigg[\mathrm{Z}_k \mathrm{C}_{x^{(k)}}^{\lambda-1}(x^{(k)}\eta_i\xi)(x\eta_i\xi)^{r_k-1} \\ & \times \prod_{i=1}^{i=\nu-1}{}_k\,(x^{(i)}x\xi)^{r_i}(\psi x^{(i)}\xi)^{\lambda-r_i}(\psi\eta_i\xi)^{r_i}\Bigg], \end{aligned}\right.$$

où

$$\frac{1}{\mathrm{Z}_k} = \binom{\lambda}{r_k} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-r_k+1)}{1.2.3\ldots r_k}.$$

Actuellement, de l'équation qui se présente à la place de la première équation (34), savoir

$$(40)\qquad (\psi x \xi) = \prod_{i=1}^{i=\nu-1}(x^{(i)}x\xi)^{r_i},$$

---

[1]) Parmi les ν points est, en général, compris un point de cette espèce, car on ne peut pas disposer arbitrairement des nombres r, puisque, pour $m > n-3$, par exemple, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sont déterminés par les autres.

[2]) La condition nécessaire à la possibilité de cette détermination est ici (*voir* p. 155).

$$\lambda(\lambda-3) + 2 \geqq 2\lambda(n-2).$$

Pour $r_\nu = 1$, $m > 1$, elle est toujours satisfaite. Pour les cas exceptionnels, il faut entrer dans des considérations particulières, comme dans l'hypothèse précédente.

résulte par formation polaire

$$\binom{\lambda}{r_k}(\psi x^{(k)}\xi)^{\lambda-r_k}(\psi\eta\xi)^{r_k}=(x^{(k)}\eta\xi)^{r_k}\prod_{i=1}^{i=\nu-1}{}_{k}(x^{(i)}x^{(k)}\xi)^{r_i},$$

et, en ayant égard à ces relations et à (35), on reconnaît que S′ a un zéro simple en chacun des points $x^{(i)}$ et un zéro d'ordre $\lambda-r_\nu$ au point ξ (en vertu des propriétés de B); de plus, en disposant convenablement des constantes de C, on pourra obtenir qu'un $(\lambda-r_\nu+1)^{\text{ième}}$ point de rencontre de $S'=0$ avec $f=0$ tombe en ξ. D'ailleurs, S′ a un zéro multiple d'ordre r_k en toute intersection r_k-iple $x^{(k,i)}$ de B avec f. Si donc on entend par $R=0$ une courbe de l'ordre $\lambda+n-\nu-2$ qui comprend r_k-1 fois seulement tout point $x^{(k,i)}$ (comptant r_k fois), ne comprend au contraire pas les points $x^{(k)}$, et possède en ξ un zéro d'ordre $\lambda-r_\nu-\nu+2$, on a la relation analogue à l'équation (37)

$$S'=Pf+R\prod_{i=1}^{i=\nu-1}(x^{(i)}x\xi). \tag{41}$$

Substituant dans (39), divisant dans les deux membres par $(\psi x\xi)^\lambda$ et posant encore, pour abréger,

$$\mathfrak{N}=\prod_{i=1}^{i=\nu-1}(x^{(i)}x\xi)^{r_i-1},$$

il vient, à cause de (34) et (40) et en vertu de $f=0$,

$$\Psi=\frac{R}{\mathfrak{N}}+C_x^n\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{1}{\binom{\lambda}{r_k}}\left[\frac{C_y^{\lambda-1}(y\eta\xi)(x\eta\xi)^{r_k-1}}{(\psi y\xi)^{\lambda-r_k}(\psi\eta\xi)^{r_k}(yx\xi)^{r_k}}\right]_{y=x^{(k)}}. \tag{42}$$

En vertu des conventions faites relativement à R, le quotient $R:\mathfrak{N}$ devient infini seulement aux points d'intersection de N avec f et conséquemment aux mêmes points que Ψ, mais en chacun d'eux (en $\xi=x^{(\nu)}$ également) il devient infini d'un ordre moins élevé, et, pour préciser, de l'ordre r_k-1 en $x^{(k)}$. La fonction Ψ est donc ramenée à une fonction qui devient infinie d'un ordre moindre d'une unité aux mêmes points et peut par conséquent être traitée semblablement à Ψ, de manière à conduire à des fonctions

de l'espèce de celles qui se présentent dans la somme (42) et au dénominateur desquelles ne figurent que des puissances de fonctions linéaires. Or, pour ces dernières, on a

$$-\frac{(x\eta\xi)^{r_k-1}}{(yx\xi)^{r_k}} = \frac{1}{r_k-1}\sum_{i=1}^{i=3} \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{(x\eta\xi)^{r_k-2}}{(yx\xi)^{r_k-1}}\right].$$

Les termes de la somme (42) se déduisent donc, à des facteurs constants près, des termes de la somme qui figure dans (38) par application réitérée du procédé de formation polaire $\sum \frac{\partial}{\partial y_i}\eta_i$.

Pour finir, nous allons supposer en outre des circonstances précédentes que la courbe $N=0$ ait un point multiple d'ordre q en un point double P de f. Alors, généralement, en ce dernier sont situées $2q$ intersections des deux courbes; l'équation $(\chi x\xi)^{mn}=0$ renferme donc un rayon multiple d'ordre $2q$. Par suite, on peut, comme dans le cas précédemment considéré, employer pour la décomposition en fractions simples une fonction S' analogue à celle formée dans l'équation (39). La courbe $S'=0$ passe alors simplement par le point double, de même que la courbe $\Pi(x^{(i)}x\xi)=0$ composée de $mn-2q+1$ rayons. En conséquence, l'équation (41) a lieu de nouveau, et il en est de même de l'équation (42), qui se déduit de cette même équation et de (39).

Dans cette dernière apparaît comme premier terme du second membre une fonction qui a, au point double P, un zéro d'ordre $q-1$ seulement. Le résultat reste donc le même. On procédera enfin d'une manière semblable en cas de survenance de points multiples, en sorte que *toute fonction algébrique* Ψ *peut être, en vertu de* $f=0$, *développée en une somme de la forme* (42).

Actuellement, en appliquant ces considérations sur la fonction Ψ à notre différentielle dV, on aperçoit que *toute différentielle de l'espèce par nous considérée peut être ramenée à des réunions de différentielles des formes suivantes :*

1° *Différentielles de la forme* $\frac{R_x^{n-3}(cx\,dx)}{a_x^{n-1}a_c}$.

2° *Différentielles de la forme* $\frac{Q_x^{n-2}(cx\,dx)}{u_x \cdot a_x^{n-1}a_c}$, *dans lesquelles la*

courbe $Q_x^{n-2} = 0$ *passe par* $n-2$ *des* n *intersections de* $u_x = 0$ *avec* $f = 0$.

3° *Différentielles déduites des précédentes par le procédé (à appliquer éventuellement plusieurs fois)* $\sum \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, y_i *désignant les coordonnées de l'une des intersections de* $u_x = 0$ avec $f = 0$. — On peut les représenter comme des sommes de différentielles dont les intégrales deviennent chacune infinie, ou bien logarithmiquement en deux points, ou bien algébriquement en un point (en général d'ordre élevé), d'une manière analogue à ce que nous verrons plus bas, dans le cas où figure au dénominateur le *carré* d'une fonction linéaire.

Nos considérations précédentes se sont rapportées à des infinis de la fonction placée dans V sous le signe d'intégration $\left(\text{c'est-à-dire des dérivées } \frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$, qui provenaient de la nature de la fonction Ψ. Mais les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ peuvent aussi devenir infiniment grandes, si l'expression $Df \equiv a_x^{n-1} a_c$, qui figure au dénominateur, est nulle. Cette dernière circonstance se présente d'abord lorsque x est un point de contact de la tangente que l'on peut mener de c à la courbe (t. II, p. 7). Alors le point $x + dx$ est en ligne droite avec c et x, et par suite l'expression $(cx\,dx)$, qui est en général un infiniment petit du premier ordre, devient un infiniment petit du second ordre; le quotient $(cx\,dx) : a_x^{n-1} a_c$ reste conséquemment infiniment petit du premier ordre. *Donc, pour un point de contact des tangentes menées de c à la courbe* [1], *l'intégrale* V

---

[1] Si (en coordonnées rectangulaires) on place le point c au point à l'infini de l'axe Y, ce qui est indifférent au point de vue projectif, ces points de contact seront les points de ramification de la surface de Riemann. En un tel point, dx devient aussi infiniment petit du second ordre; si donc on y a $x = a$, dV devra se comporter au point $x = a$ comme $\frac{dx}{\sqrt{x-a}}$, ce qu'il est aisé de prouver directement. (*Voir* Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 11, et Riemann, *op. cit.*, § 7 et 9. En effet, $\sqrt{x-a}$ est, au point de ramification, une grandeur infiniment petite du premier ordre, et par suite le quotient de dx par $\sqrt{x-a}$ en $x = a$ reste infiniment petit du premier ordre, ainsi qu'il a été obtenu au texte.

ne devient pas infinie; en effet, sa valeur est aussi complètement indépendante du point c (p. 143).

En outre, l'expression Df s'évanouit, et cela indépendamment des quantités c_i, dès que x est un point multiple de f; cependant nous ne supposerons ici que la présence de points doubles ou cuspidaux de la courbe primitive. Dans ce cas, le déterminant $(cxdx)$, dans lequel les quantités dx_i se déterminent au moyen de l'équation du second degré $a_x^{n-2}\, a_{dx}^2 = 0$, reste infiniment petit du premier ordre, et les dérivées de V par rapport aux x_i deviennent infinies. Pour déterminer exactement la nature de ce passage à l'infini, nous partirons de l'équation

$$(43) \qquad a_x^{n-1}\, a_c . u_x . dV = Q_x^{n-2} . (cxdx),$$

en prenant dV sous la forme désignée dans le n° 2. Par ξ nous entendons un point de l'une des tangentes du point double y, par η un point de l'autre tangente. Au moyen de (43), nous obtiendrons alors, pour un point voisin de y sur l'une des branches, la valeur de dV, si nous posons $x_i = y_i + \varepsilon\xi_i$, $dx_i = \varepsilon\, d\xi_i$, ε désignant une quantité infiniment petite du premier ordre. Il vient maintenant, en première approximation,

$$(n-1)\, u_y . a_y^{n-2}\, a_\xi a_c . dV = Q_y^{n-2}\, (cy\,d\xi).$$

Choisissons maintenant pour c le point η; alors, puisque la tangente de la première polaire de η au point double y coïncide avec la ligne $(\eta y x) = 0$, il viendra, C désignant une constante,

$$a_y^{n-2}\, a_\xi a_\eta = C . (\eta y x),$$

d'où

$$(44) \qquad dV = \frac{Q_y^{n-2}}{C(n-1)\, u_y}\, \frac{(\eta y\, d\xi)}{(\eta y \xi)} = C' . d[\log(\eta y \xi)],$$

C′ étant une nouvelle constante. *L'intégrale* V *devient, d'après cela, logarithmiquement infinie en un point double* y *de* f; savoir, comme $+\log(\eta y \xi)$ dans la direction d'avancement qui correspond au point ξ, et comme $-\log(\eta y \xi)$ dans la direction qui correspond au point η.

Une exception se présente lorsque la courbe $Q = 0$ passe également par y, l'intégrale restant alors finie.

Les considérations précédentes ne donnent aucun résultat si le point double se transforme en un point de rebroussement, les points ξ et η se confondant alors. Pour trouver la valeur de l'intégrale dans le voisinage du point de rebroussement, nous devons donc considérer les termes du second ordre infinitésimal, ce qui s'effectue ainsi qu'il suit, en introduisant de nouvelles variables r, s, t pour les alentours du point y. Nous poserons

$$x_i = ry_i + s\xi_i + t\zeta_i. \tag{45}$$

Pour obtenir la courbe $f = 0$ exprimée par les variables r, s, t sous la forme la plus simple possible, nous placerons ζ au point d'inflexion de la $(n-3)^{\text{ième}}$ polaire de y, c'est-à-dire de la courbe du troisième ordre $a_y^{n-3} a_x^3 = 0$ et ξ au point de rencontre de la tangente d'inflexion de ζ avec la tangente de rebroussement de y ; on a de la sorte les équations

$$a_y^{n-3} a_\zeta^3 = 0, \quad a_y^{n-2} a_\xi^2 = 0, \quad a_y^{n-2} a_\zeta a_\xi = 0,$$
$$a_y^{n-3} a_\zeta^2 a_\xi = 0, \quad a_y^{n-3} a_\xi^2 a_\zeta = 0.$$

Pour un point dans le voisinage de y (c'est-à-dire pour des valeurs infiniment petites de s et t), il vient donc

$$f(x) \equiv a_x^n = \frac{1}{2} n(n-1) r^{n-3} \left[rt^2 a_y^{n-2} a_\zeta^2 + \frac{1}{3}(n-2) s^3 a_y^{n-3} a_\xi^3 \right] + \ldots,$$

et par conséquent l'équation $f = 0$ se transforme en

$$3rt^2 a_y^{n-2} a_\zeta^2 + (n-2) s^3 a_y^{n-3} a_\xi^3 = 0 \quad (^1). \tag{46}$$

Si nous faisons ensuite coïncider c avec ζ, nous obtiendrons

$$Df \equiv a_x^{n-1} a_\zeta = (n-1) r^{n-2} . a_y^{n-2} a_\zeta^2 . t, \tag{47}$$

ou, en vertu de (46),

$$Df = (n-1) r^{n-3} \sqrt{s^3 r} \sqrt{-\frac{1}{3}(n-2) a_y^{n-2} a_\zeta^2 . a_y^{n-3} a_\xi^3}.$$

Enfin, pour le numérateur de dV, on trouve

$$(\zeta x dx) = (\zeta y \xi)(rds - sdr). \tag{48}$$

---

(1) Par suite, t^2 devient comparable à s^3 dans le voisinage de y, ce qui concorde avec les résultats précédents (t. II, p. 23 et 33).

Pour le calcul de dV, nous devons encore développer la fonction $\frac{Q}{u_x}$ suivant les puissances de s et t. Il vient, par suite de la substitution (54), en première approximation,

$$Q_x^{n-2} = r^{n-2}Q_y^{n-2} + (n-2)r^{n-3}Q_y^{n-3}(sQ_\xi + tQ_\zeta) + \ldots,$$
$$\frac{1}{u_x} = \frac{1}{ru_y + su_\xi + tu_\zeta} = \frac{1}{ru_y} - \frac{su_\xi + tu_\zeta}{r^2 u_y^2} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{Q_x^{n-2}}{u_x} = r^{n-3}\frac{Q_y^{n-2}}{u_y} - \frac{r^{n-4}}{u_y^2}\big[Q_y^{n-2}(su_\xi + tu_\zeta) - Q_y^{n-3}(n-2)(sQ_\xi + tQ_\zeta)u_y\big] + \ldots,$$

et par conséquent, si, en tenant compte de (47), on substitue les valeurs trouvées, qu'on pose $\frac{r}{s} = \mu$ et qu'on exprime la grandeur t par μ au moyen de (46), on aura

$$\begin{aligned}(n-1)dV = {} & \frac{(\zeta y \xi)Q_y^{n-3}}{\sqrt{a_y^{n-2}a_\xi^2 \cdot a_y^{n-3}a_\xi}}\sqrt{\frac{-3}{n-2}} \\ & \times\left[\frac{Q_y}{u_y}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3}} + \frac{(n-2)Q_\xi u_y - Q_y u_\xi}{u_y^2}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}\right] \\ & + \frac{(\zeta y \xi)}{a_y^{n-2}a_\xi^2 \cdot u_y^2}\big[Q_y^{n-2}u_\zeta - (n-2)Q_y^{n-3}Q_\zeta u_y\big]d\mu + \ldots.\end{aligned}$$

On tire enfin de là par intégration, A, B, C désignant des constantes dont les valeurs sont faciles à emprunter aux expressions trouvées pour dV [1],

$$V = \frac{A}{\sqrt{\mu}} + B\sqrt{\mu} + C\mu + \ldots,$$

ou, puisque, d'après (45), $\mu = \frac{s}{r} = \frac{(yx\zeta)}{(x\xi\zeta)}$,

$$(49) \qquad V = A\sqrt{\frac{(x\xi\zeta)}{(yx\zeta)}} + B\sqrt{\frac{(yx\zeta)}{(x\xi\zeta)}} + C\frac{(yx\zeta)}{(x\xi\zeta)} + \ldots.$$

---

[1] *Voir* Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 13

C'est là la valeur de V dans le voisinage du point de rebroussement y.

L'intégrale V *devient, d'après* (49), *algébriquement infinie au premier ordre en un point de rebroussement* ([1]).

On devra traiter d'une manière semblable une intégrale qui devient infinie en un point multiple de f. Toutefois, la manière la plus simple d'opérer consiste à supposer que le point multiple a été préalablement résolu de la manière connue (t. II, p. 210 et suiv.) par des transformations unidéterminatives; car, dans une transformation de cette espèce, le caractère de la différentielle ne change pas, ce qu'on démontre, ainsi qu'on le fera plus tard pour les différentielles de troisième espèce. La différentielle apparaît alors comme combinaison des différentielles portant les n°s 2 et 3 (p. 161 et suiv.).

VII. — Les intégrales normales de première, de deuxième et de troisième espèce.

Les intégrales désignées (p. 161) sous les n°s 1 et 2 vont maintenant être étudiées avec plus de soin sous le rapport de leurs propriétés.

En premier lieu, il est clair qu'il peut exister des intégrales qui ne deviennent infinies pour aucun point de la courbe, et dont conséquemment la différentielle pour tous les points de la courbe reste infiniment petite du premier ordre; ce sont évidemment les différentielles de la forme

$$\frac{R_x^{n-3}(cx\,dx)}{a_x^{n-1}\,a_c},$$

si l'on détermine la courbe R de telle sorte qu'en tous les points de f elle ait un zéro du même ordre que le dénominateur, excepté aux points de contact des tangentes proprement dites que l'on

---

([1]) Et non à l'ordre $\frac{1}{2}$, car le point de rebroussement est un point de ramification de la surface de Riemann correspondante, et en un tel point, si x devient égal à a, $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$ est une grandeur infiniment petite du premier ordre. (Comparer la note de la page 162.)

peut mener de c à la courbe, points pour lesquels le déterminant $(cxdx)$ devient également nul (p. 162). Or il suffit pour cela de choisir pour $R_x^{n-3}=0$ une courbe d'ordre $n-3$ adjointe à f, ainsi qu'il ressort immédiatement de la définition donnée pour cette nature de courbes (p. 23). En effet, la courbe dont il s'agit a en tout point singulier de f autant de points communs avec f que la polaire $a_x^{n-1}a_c$, en retranchant du nombre de ces derniers les points de ramification (t. II, p. 215) qui peuvent être situés aux points multiples; mais pour ceux-là le déterminant $(cxdx)$ devient de nouveau infiniment petit du deuxième ordre, si l'on passe du point multiple x à un point $x+dx$, en avançant sur la branche sur laquelle le point de ramification s'est rapproché de x, et notre différentielle reste, en fait, une quantité infiniment petite du premier ordre, de quelque manière que l'on puisse choisir le point $x+dx$ dans le voisinage de x. A l'exemple de Riemann, nous désignerons toujours une courbe adjointe du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre par φ, et l'intégrale qui reste constamment finie par J. Nous appellerons la différentielle de cette dernière *différentielle de première espèce* :

$$(1)\qquad dJ=\frac{\varphi.(cxdx)}{c_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+c_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+c_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}=\frac{\varphi.(cxdx)}{n.a_x^{n-1}a_c}.$$

De nos précédentes observations sur les courbes adjointes d'ordre $n-3$ (p. 21) résulte immédiatement ce théorème :

Il existe p différentielles de première espèce linéairement indépendantes les unes des autres, ou, en d'autres termes : *Toute différentielle de première espèce appartenant à f peut être représentée comme combinaison linéaire de p autres différentielles similaires.*

Parmi les différentielles désignées sous le n° 1 (p. 161), nous commencerons par nous occuper, dans ce qui suit, uniquement des différentielles de première espèce qui viennent d'être définies, toutes les autres pouvant être considérées comme des cas particuliers des cas désignés sous les n°s 2 et 3, ainsi qu'on le verra encore incessamment. De même, dans les différentielles désignées

sous le n° 2, nous nous proposerons de considérer d'abord celles seulement qui ne deviennent pas finies aux points doubles de f; c'est-à-dire que nous remplacerons la courbe $Q = 0$ par une courbe *adjointe* du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre $\Omega_x^{n-2} = 0$. Cela est toujours possible, car la courbe $\Omega = 0$ n'est assujettie, en dehors de cette condition, qu'à passer par $n-2$ points de rencontre de la droite $u_x = 0$, u_x désignant la fonction linéaire qui figure au dénominateur de la différentielle. *Donc, parmi les points de rencontre de la courbe* $\Omega = 0$ avec $f = 0$,

$$n(n-2) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - (n-2) - p = p$$

peuvent encore être choisis arbitrairement. Les deux autres points de rencontre de $u_x = 0$ avec $f = 0$ étant désignés par ξ, η, les dérivées de l'intégrale par rapport aux x_i ne deviendront infinies qu'en ξ et η. *Une telle différentielle, qui ne prend une valeur infinie qu'en deux points distincts de f, s'appelle une différentielle de troisième espèce, et l'intégrale correspondante, qui devient infinie en ces deux points seulement, s'appelle semblablement une intégrale de troisième espèce* (¹).

Cette dernière intégrale sera, dans ce qui suit, désignée par $S_{\xi\eta}$, ξ, η étant les deux points où elle devient infinie. Sa différentielle est donc définie par

$$(2) \qquad dS_{\xi\eta} = \frac{\Omega_x^{n-2}(c\,x\,dx)}{(\xi\eta x)\,\Sigma c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\Omega_x^{n-2}(c\,x\,dx)}{n(\xi\eta\,x)\,.\,a_x^{n-1}\,a_c},$$

en supposant l'existence des équations suivantes :

$$(3) \qquad \begin{gathered} f(\xi) \equiv a_\xi^n = 0, \quad f(\eta) \equiv a_\eta^n = 0, \\ \Omega_x^{n-2}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x) \equiv (\xi\eta\zeta)^2 . f + (\xi\eta x) . \mathrm{N}. \end{gathered}$$

Cette dernière équation résulte immédiatement des conditions

(¹) L'intégrale de deuxième espèce sera définie incessamment (*Voir* RIEMANN, § 2; CLEBSCH et GORDAN, p. 20. Il est à remarquer que les désignations du texte ne concordent pas avec celles introduites par Legendre et Jacobi pour les intégrales elliptiques; en effet, l'intégrale elliptique normale de troisième espèce de Legendre a *quatre* infinis. (*Voir* KÖNIGSBERGER, *Theorie der elliptischen Functionen*, 1ʳᵉ Partie, p. 276, et BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition, p. 681.)

que nous avons imposées à la fonction Ω; les quantités ζ_i sont ici les coordonnées d'un point quelconque [introduites uniquement dans le but d'écrire l'équation sous forme homogène, de même que le facteur $(\xi\eta\zeta)^2$ mis auprès de f] et N est une fonction entière du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre. L'équation dont il s'agit a une importance particulière pour une application qui viendra plus tard.

Le mode suivant lequel l'intégrale $S_{\xi\eta}$ devient infinie aux points ξ et η est aisé à déterminer. Nous poserons (comme à la p. 163) $x = \xi + \varepsilon\zeta$, ε étant une quantité infiniment petite et ζ un point de la tangente de ξ; nous obtiendrons alors en première approximation, pour $c_i = \eta_i$,

$$na_\xi^{n-1} a_\eta (\xi\eta\zeta) . dS_{\xi\eta} = \Omega_\xi^{n-2} (\eta\xi d\zeta).$$

Mais de l'équation (3), si l'on forme dans les deux membres la première polaire de η pour $x = \xi$, résulte

$$\Omega_\xi^{n-2} = na_\xi^{n-1} a_\eta, \tag{4}$$

et l'on obtient conséquemment pour le voisinage du point ξ

$$dS_{\xi\eta} = \frac{(\xi\eta\, dx)}{(\xi\eta x)}.$$

L'intégrale $S_{\xi\eta}$ *se comporte donc dans le voisinage du point* ξ, *où elle devient infinie, comme* $+\log(\xi\eta x)$, *et, par suite, dans le voisinage du point de même espèce* η, *comme* $-\log(\xi\eta x)$ [1].

Il a été observé précédemment que, pour la courbe Ω, p points d'intersection peuvent encore être pris arbitrairement sur f. La différentielle $dS_{\xi\eta}$ n'est donc nullement définie par les points ξ et η, et, au contraire, nous obtiendrons une autre courbe Ω' et une autre différentielle $dS'_{\xi\eta}$ si nous remplaçons ces p points, en totalité ou partiellement, par d'autres. Relativement à la fonction Ω' existent alors également (pour une fixation convenable des valeurs absolues de ses coefficients) l'équation (3) et par conséquent aussi

---

[1] Cela reste vrai même quand un point où l'intégrale devient infinie tombe en un point de contact des tangentes menées de c à f. La situation de c est complètement indifférente. Les points ξ, η peuvent aussi se réunir en un point double, ainsi qu'il sera expliqué ultérieurement.

l'équation (4) qui en est déduite, c'est-à-dire que l'on a

$$\Omega_\xi^{n-2} = na_\xi^{n-1} a_\eta, \quad \Omega_\eta^{n-2} = na_\eta^{n-1} a_\xi,$$
$$\Omega'^{n-2}_\xi = na_\xi^{n-1} a_\eta, \quad \Omega'^{n-2}_\eta = na_\eta^{n-1} a_\xi.$$

Il résulte que la différence $\Omega_x^{n-2} - \Omega'^{n-2}_x$ s'évanouit pour $x = \xi$ et $x = \eta$. La courbe $\Omega - \Omega' = 0$ comprend donc la droite $\xi\eta$ tout entière, et l'on peut poser

$$\Omega - \Omega' = (\xi\eta x).\varphi,$$

φ étant une courbe adjointe C_{n-3}. *Si donc, pour les deux mêmes points ξ, η donnant des infinis, on forme de deux manières différentes la différentielle de troisième espèce $dS_{\xi\eta}$, les deux formations, quand on dispose convenablement des constantes qui y figurent, ne diffèrent entre elles que d'une différentielle de première espèce.*

Si nous rapprochons indéfiniment sur la même branche de courbe les deux points de la différentielle de troisième espèce qui donnent des infinis, $dS_{\xi\eta}$ donne naissance à une *différentielle de seconde espèce*. La ligne $\overline{\xi\eta}$ deviendra la tangente de f au point unique que nous désignerons par ξ, *et l'on peut par suite* (*en se servant de la notation* dE_ξ) *définir la différentielle de deuxième espèce par l'équation*

$$dE_\xi = \frac{\Omega_x^{n-2}(c\,x\,dx)}{n^2.a_\xi^{n-1}a_x.a_x^{n-1}a_c};$$

Ω est encore actuellement adjointe à f et passe par les $n-2$ autres points où la tangente de f en ξ rencontre f. Pour Ω existe donc, η étant un point quelconque, une équation de la forme

$$(5) \qquad \Omega_x^{n-2}(\xi\eta x)^2 = [a_\xi^{n-1}a_\eta]^2.f + a_\xi^{n-1}a_x.M_x^{n-1}.$$

La courbe f est touchée par la courbe M, en tous les points de rencontre de la ligne $(\xi\eta x) = 0$, à l'exception du point ξ luimême.

En ce qui concerne la différentielle de deuxième espèce, observons ici, sans indiquer la démonstration, qu'une telle fonction peut toujours, à part une différentielle de première espèce entrant additivement, être déduite d'une différentielle de troisième espèce

par un procédé de différentiation; on a en effet, si $a_\xi^{n-1} a_\zeta = 0$ (¹),

$$dE_\xi = \frac{\partial dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_1}\zeta_1 + \frac{\partial dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_2}\zeta_2 + \frac{\partial dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_3}\zeta_3 + dJ.$$

A l'aide de cette relation, on peut déduire les propositions relatives à la différentielle dE_ξ des propositions similaires relatives à la différentielle $dS_{\xi\eta}$. On obtient ainsi en particulier ce résultat, que l'intégrale $\int dE_\xi$ devient infinie pour $x_i = \xi_i$, comme $\int \frac{dx}{(x-\xi)^2}$ pour $x = \xi$. *L'intégrale de deuxième espèce devient donc au point* ξ *algébriquement infinie au premier ordre*, ce que l'on vérifie aussi sans peine directement en faisant usage de l'équation (5).

Nous ne voulons pas ici insister davantage sur les intégrales citées sous le n° 3 (p. 162); on pourra déduire leurs propriétés de celles des intégrales de première, de deuxième et de troisième espèce, en employant le procédé de différentiation indiqué précédemment. Faisons toutefois remarquer qu'une différentielle dans le dénominateur de laquelle figure le *carré* d'une expression linéaire, c'est-à-dire *une différentielle de la forme*

$$dV = \frac{Q_x^{n-1}(c\,x\,dx)}{u_x^2 \cdot a_x^{n-1} a_e},$$

peut toujours se ramener directement à des différentielles de seconde et de troisième espèce.

Pour démontrer cette proposition, nous déterminerons n courbes $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, ..., $Q_n = 0$ telles que $Q_k = 0$ touche la courbe primitive en tous les points de rencontre $x^{(i)}$ de $u_x = 0$, à l'exception du point $x^{(k)}$. Nous pouvons alors déterminer n constantes k_i, telles que la courbe

$$Q - k_1 Q_1 - k_2 Q_2 - \ldots - k_n Q_n = 0$$

passe par la totalité des n points $x^{(i)}$, car il suffit pour cela de

(¹) *Voir* sur ce sujet Clebsch et Gordan, p. 28. M. Thomae obtient les intégrales de deuxième espèce en différentiant celles de première espèce par rapport aux paramètres dont dépendent les points de ramification (*Journal de Crelle*, t. 66 et 71).

satisfaire aux équations

$$Q^{(1)} - k_1 Q_1^{(1)} = 0, \quad Q^{(2)} - k_2 Q_2^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad Q^{(n)} - k_n Q_n^{(n)} = 0,$$

les indices ayant une signification analogue à celle qu'ils avaient (p. 158). Il vient donc

$$(6) \qquad Q = \Sigma k_i Q_i + u_x \Omega,$$

Ω étant une courbe du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre, et, pour préciser, une courbe adjointe à f, si nous admettons, comme on peut le faire pour abréger, que les courbes $Q = 0$ et $Q_k = 0$ soient simultanément adjointes à f. Actuellement, en vertu de (6), on a

$$(7) \qquad dV = \frac{Q(cx\,dx)}{u_x^2 . a_x^{n-1} a_c} = \sum \frac{k_i Q_i(cx\,dx)}{u_x^2 a_x^{n-1} a_c} + \frac{\Omega(cx\,dx)}{u_x . a_x^{n-1} a_c}.$$

Mais ici chacun des termes de la somme qui figure à droite est une différentielle de deuxième espèce, car, à cause des déterminations faites relativement à $Q_i = 0$, on peut poser

$$Q_i . a_{x^{(i)}}^{n-1} a_x = u_x^2 \Omega_i,$$

$\Omega_i = 0$ désignant une courbe C_{n-2} qui passe par les $n-2$ autres intersections de la tangente de $x^{(i)}$ avec $f = 0$. Le dernier terme du second membre de l'équation (7) peut être décomposé en une somme de $n-1$ intégrales de troisième espèce. On a donc finalement

$$V = E_{x^{(1)}} + E_{x^{(2)}} + \ldots + E_{x^{(n)}} + S_{x^{(1)} x^{(2)}} + S_{x^{(1)} x^{(3)}} + \ldots + S_{x^{(1)} x^{(n)}}.$$

L'intégrale V *devient, d'après cela, infinie en chacun des points* $x^{(i)}$, *de la même manière que la fonction* $\log(x-\xi) + \frac{1}{x-\xi}$ *devient infinie pour* $x = \xi$.

On traitera d'une manière analogue les différentielles dans lesquelles figure au dénominateur une puissance supérieure de u_x. C'est dans cette classe d'intégrales abéliennes que doit être rangée l'intégrale d'aire $\int y\,dx$, qui répond à une courbe $F(x, y) = 0$ donnée en coordonnées rectangulaires. En effet, pour $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$, on a

$$\int y\,dx = \int \frac{(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3)x_2}{x_3^3}.$$

Cette intégrale, où figure la troisième puissance de u_x, se déduit de V si l'on pose, Q désignant la fonction du numérateur,

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = u_x = 1, \quad a_x^n = \mathrm{F}(x, y), \quad \mathrm{Q} = y\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \quad (^1).$$

Au point de vue de certaines applications qui doivent venir plus tard, une importance particulière s'attache aux remarques suivantes. Nous pouvons, entre autres choses, réunir en un point double de f les points ξ, η qui figurent dans la différentielle $d\mathrm{S}_{\xi\eta}$. Mais Ω passe par ce point double comme courbe adjointe à f, et a par suite $n-1$ points d'intersections communs avec la ligne $\overline{\xi\eta}$; en d'autres termes, Ω renferme cette droite tout entière. On a donc

$$\Omega_x^{n-2} = u_x \cdot \mathrm{H}_x^{n-3},$$

les quantités a_i étant les coordonnées de la droite qui figure au dénominateur de $d\mathrm{S}_{\xi\eta}$. La différentielle elle-même prend conséquemment la forme

$$(8) \qquad d\mathrm{S}_{\xi\eta} = \frac{\mathrm{H}_x^{n-3}(cx\,dx)}{na_x^{n-1}\,a_c},$$

H passant ici par tous les points multiples de f, à l'exception du point double situé sur u_x; cette même différentielle est d'ailleurs devenue complètement indépendante de u_x. La différentielle dont il s'agit fournit également la représentation des intégrales indiquées sous le n° 1 (p. 161) et qui ne sont pas constamment finies, puisqu'elles deviennent infinies aux points doubles de f; car il est aisé d'apercevoir que toute différentielle de la forme n° 1 qui devient infinie en plusieurs points doubles peut être développée en une somme de différentielles dont chacune ne devient infinie qu'en un point double. *Nous pouvons encore ramener ces différentielles à des différentielles de troisième espèce;* elles aussi deviennent logarithmiquement infinies en deux points (*voir* p. 163), le point

---

(1) De la formule qui sera ainsi obtenue, on déduira toutes les propriétés (et en particulier la détermination des périodes) de l'intégrale $\int y\,dx$, qui ont été indiquées par M. Marie (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1874, p. 692, 757, 865, 943). *Voir* aussi, pour les courbes de genre $p = 0, 1$, Hermite, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Ire Partie. Paris, 1873.

double pouvant être regardé comme placé d'abord sur l'une des branches qui le traverse, puis sur l'autre. Cette dernière circonstance devient évidente si l'on résout le point double, par transformation unidéterminative de la courbe primitive, en deux points distincts, ainsi qu'il sera plus amplement expliqué tout à l'heure.

On reconnaît d'une manière analogue *qu'une différentielle infinie à point de rebroussement unique doit être considérée comme une différentielle de deuxième espèce* [1]; car toute droite menée par le point de rebroussement y réunit deux points infiniment voisins, à la différence d'une droite passant par le point double qui doit être considéré comme ligne de jonction de deux points différents de la courbe.

Ces dernières explications, ainsi qu'il a déjà été énoncé, présentent un intérêt particulier si l'on soumet la courbe f à une transformation unidéterminative. Nous abordons maintenant l'examen de *l'influence exercée par une pareille transformation de la courbe primitive sur une différentielle de première, de deuxième ou de troisième espèce.* Supposons que la transformation de $f(x)=0$ en une courbe du $\nu^{\text{ième}}$ ordre $F(y)=0$ soit, comme à la page 2, donnée par des équations de la forme

$$\mu y_1 = \Phi_1(x), \quad \mu y_2 = \Phi_2(x), \quad \mu y_3 = \Phi_3(x),$$

et que par leur intermédiaire $\mu^\nu F(y) = F(\Phi)$ se change en $M.f$. On a alors pour tous les points de $f=0$

$$M.\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_3}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i};$$

et par suite, puisque (p. 14) $\mu^{\nu-1}\dfrac{\partial F(y)}{\partial y_i} = \dfrac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i}$,

$$\left(c_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right).M = \mu^{\nu-1}\left[\frac{\partial F(y)}{\partial y_1}k_1 + \frac{\partial F(y)}{\partial y_2}k_2 + \frac{\partial F(y)}{\partial y_3}k_3\right],$$

en posant

$$k_i = c_1\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3}.$$

---

[1] Au point cuspidal, elle est en effet algébriquement infinie au premier ordre. (*Voir* p. 166, note).

Il vient ensuite, d'après le théorème sur la multiplication des déterminants,

$$\mu^2(ky\,dy) = (k\Phi\,d\Phi) = \frac{1}{s}(cx\,dx).(\Phi_1\Phi_2\Phi_3),$$

$(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ désignant encore le déterminant fonctionnel et s l'ordre des Φ_i. Or les relations établies ici suffisent pour la transformation de notre différentielle. Admettons qu'une différentielle de cette nature soit donnée pour la courbe F, que cette différentielle soit de la troisième espèce, et que les deux points qui donnent des infinis soient sur la ligne v; on trouve immédiatement

$$s.\frac{\Omega(y).(ky\,dy)}{\Sigma v_i y_i.\Sigma k_i\dfrac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{\Omega(\Phi).(\Phi_1\Phi_2\Phi_3).(cx\,dx)}{\Sigma v_i\Phi_i.\mathrm{M}.\Sigma c_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

L'expression qui figure dans le premier membre et celle qui figure dans le second sont d'une nature tout à fait semblable, sauf en ce que, à la place des fonctions Ω et v_y, se trouvent respectivement les fonctions $\Omega(\Phi).(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ et $\Sigma v_i\Phi_i.\mathrm{M}$, et qu'à la place des quantités absolument arbitraires k apparaissent les quantités également arbitraires c.

Or Ω est une courbe du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre adjointe à F, d'où, suivant une proposition précédente (p. 20),

$$(\Phi_1\Phi_2\Phi_3).\Omega(\Phi) = \mathrm{M}.\omega(x) + \mathrm{C}.f,$$

$\omega(x) = 0$ étant une courbe d'ordre $s+n-3$ qui, en dehors des points multiples et des points communs des Φ, rencontre f uniquement aux points correspondant aux intersections de Ω avec F. Conséquemment $\omega(x)$ passe aussi en particulier par les $n-2$ intersections de la courbe $\Sigma v_i\Phi_i = 0$ avec f, qui correspondent aux $n-2$ points de $v_y = 0$ situés sur Ω. Le second membre de l'équation

$$s\frac{\Omega(y).(ky\,dy)}{v_y.\Sigma k_i\dfrac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{\omega(x).(cx\,dx)}{\Sigma v_i\Phi_i.\Sigma c_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$$

représente donc une différentielle qui devient infinie, uniquement *aux deux* points où le même fait se présente pour la différentielle qui figure dans le premier membre, et représente en

conséquence encore une différentielle de troisième espèce; car, d'après ce qui précède, pour tout point commun r^{iple} des Φ qui est un point commun i^{iple} de $f(i \gtreqless 1)$, $\omega(x)$ s'évanouit $r+i-1$ fois, c'est-à-dire toujours le même nombre de fois que le déterminateur du second membre. On doit d'ailleurs pouvoir représenter la différentielle figurant au second membre de telle façon qu'au dénominateur n'entre qu'une fonction linéaire. Car si ξ, η sont les points de notre différentielle qui donnent des infinis, et que $\Omega' = 0$ soit une courbe adjointe à f, et passant par les $n-2$ autres intersections de la droite $(x\xi\eta) = 0$ avec f, il existe évidemment, en vertu de $f = 0$, une équation de la forme

$$\omega.(\xi\eta x) = \Omega'.\Sigma\nu_i\Phi_i.$$

Les points ξ, η peuvent en particulier former l'un des couples de points de f qui se réunissent en un point double de F; alors $\Omega(y)$ est divisible par ν_y, et dans le premier membre de l'équation ci-dessus figure une différentielle de troisième espèce, de la nature mentionnée en dernier lieu et représentée par l'équation (8). Nous avons donc le théorème suivant :

Dans une transformation unidéterminative de la courbe f, une différentielle de troisième espèce se change toujours en une différentielle de troisième *espèce, et il en est ainsi indépendamment de la circonstance que les deux points de cette intégrale donnant des infinis soient séparés sur f ou réunis en un point double de f; au contraire, une différentielle de l'une des catégories peut être ramenée à une différentielle de l'autre catégorie.*

La même chose a naturellement lieu lorsque les deux points donnant des infinis sont infiniment rapprochés l'un de l'autre, ou lorsqu'on pose $\Omega = \nu_y$, Φ, $\Phi = 0$ étant une courbe adjointe à f.

Donc [1] :

Une différentielle de première ou de deuxième espèce se change toujours, lors d'une transformation unidéterminative de

---

[1] Pour les différentielles de première espèce, *voir* Clebsch et Gordan, p. 50.

la courbe primitive, en une différentielle de première ou deuxième espèce respectivement.

Nos recherches précédentes ont été de nature purement algébrique, et elles se sont rapportées à des quotients de fonctions algébriques. En passant aux intégrales de nos différentielles, nous devons encore porter notre examen sur d'autres recherches et en particulier sur celles relatives aux propriétés périodiques des intégrales algébriques, car c'est précisément sur ces dernières que reposent les applications géométriques ultérieures de ces théories (*voir* l'exemple des *intégrales elliptiques*, t. II, p. 362 et suiv.). Ce n'est pas toutefois ici le lieu de donner une exposition détaillée des faits dont nous parlons ; nous nous bornerons à un court aperçu des résultats, aperçu qui sera d'autant plus utile que nous y trouverons l'occasion de mettre en connexion et de définir des systèmes de désignation dont nous ferons usage plus tard.

Dans la considération d'une intégrale algébrique, il est à remarquer, avant toutes choses, que la valeur d'une telle intégrale peut toujours dépendre du contour d'intégration employé, et n'est conséquemment pas déterminée d'une manière complète. Les questions qui découlent de là se résolvent de la manière la plus simple possible, si l'on fait usage des représentations de Riemann, ou, en d'autres termes, si l'on prend pour base l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, et qu'on développe l'une de ces dernières coordonnées considérée comme fonction de l'autre sur la surface de Riemann correspondante, représentation qui présente au surplus une grande utilité pour l'étude purement algébrique du champ de valeurs représenté par $f = 0$ (*voir* t. II, p. 366, et t. III, p. 27). Dans ce qui suit, nous résumerons en peu de mots les résultats ainsi obtenus, dans la mesure où nous devons en faire usage plus tard pour les recherches, mais sans pouvoir donner d'une manière absolument complète les démonstrations qui s'y rapportent.

Nous considérerons d'abord l'*intégrale de première espèce*. La valeur d'une semblable fonction est déterminée si l'on donne la limite inférieure et la limite supérieure, ainsi que le chemin le long duquel l'intégrale va de l'une à l'autre. Deux contours d'intégration qui peuvent être ramenés l'un à l'autre, soit par le fini, soit

par l'infini, mais sans qu'il y ait franchissement d'un point de ramification de la surface, fournissent toujours le même résultat pour la valeur de l'intégrale; car cette dernière (comme intégrale de première espèce) ne devient infinie en aucun point de la surface. Mais si les deux chemins comprennent des points de ramification et pas plus tous qu'aucun, en sorte qu'il ne soit pas possible de transformer directement un contour d'intégration en l'autre, on a en présence deux valeurs différentes de l'intégrale, quoique les limites supérieures et inférieures de l'intégrale soient les mêmes. On peut alors mettre à la place du second chemin le premier augmenté d'une courbe fermée qui comprend le second contour d'intégration parcouru dans sa direction primitive et le premier parcouru dans la direction opposée; on peut donc considérer le second chemin comme dérivant du premier par l'adjonction d'un contour entourant les points de ramification franchis et pouvant serrer ceux-ci d'aussi près qu'on le voudra, contour qui est, par suite, équivalent à un contour *fermé* tracé autour des points de ramification dont il s'agit, puisque le chemin qui joint ce dernier contour au premier est parcouru deux fois en sens opposé et ne fournit par conséquent aucun accroissement à l'intégrale. Toutes les modifications qu'éprouve l'intégrale par changement du contour d'intégration sont, par suite, représentables par les valeurs prises par l'intégrale, le long des lacets qui entourent les points de ramification. Il s'agit donc d'abord de déterminer le nombre des chemins de cette espèce, indépendants les uns des autres (non réductibles par déformation et combinaison), qui sont possibles sur la surface.

Il est utile, pour cet objet, de se former des idées plus précises sur la conformation des surfaces de Riemann, et de faire les fixations nécessaires. En premier lieu, on peut toujours, suivant la marche indiquée par Lüroth, prendre pour point de départ relativement à ces surfaces une certaine forme normale, c'est-à-dire faire certaines hypothèses simples sur le groupement des points de ramification et des feuilles qu'ils réunissent [1]; on reconnaît alors, entre autres choses, que l'étude des modules de périodicité peut se ramener au type plus simple des intégrales hyperellip-

---

[1] *Voir* Lüroth, *Math. Annalen*, t. IV, p. 181, et Clebsch, *ibid.*, t. VI, p. 216.

tiques. La marche d'idées qui conduit là est, en résumé, la suivante.

Nous supposerons que le nombre des feuilles de notre surface soit désigné par m, et celui de ses points de ramification par r (¹); de plus, nous entendrons par *groupe de points de ramification* l'ensemble de tous les points qui réunissent de telle façon les deux mêmes feuilles que ces feuilles ne se présentent plus comme réunies par d'autres points de ramification. Dans chaque groupe est nécessairement renfermé un nombre *pair* de points de ramification, comme on l'aperçoit de suite directement. Actuellement, un examen plus approfondi montre que ni dans l'ordre des points de ramification ni dans la succession suivant laquelle les feuilles sont liées ne se trouve rien de spécifique, pas plus que dans le nombre des points qui sont employés dans l'arrangement donné pour chaque groupe; ce dernier nombre est assujetti seulement à ne pas être nul. On peut donc, en particulier, préférer un arrangement dans lequel un groupe se compose de $r - 2(m-2)$ points de ramification et tous les autres groupes de deux de ceux-ci seulement. Alors deux feuilles, la première et la seconde par exemple, sont liées entre elles par $r - 2(m-2)$ points de ramification; les $m-2$ autres feuilles ne sont plus connexes entre elles, et chacune d'elles est seulement rattachée à la première ou à la seconde par deux points de ramification. Ainsi se trouve établie la forme normale précédemment mentionnée de la surface de Riemann.

Une surface ainsi ramifiée peut toujours être réduite de la même manière, *par un système canonique de sections transverses*, en une surface simplement connexe, comme la surface à deux feuilles employée dans les intégrales hyperelliptiques; ce système de sections transverses est analogue à celui pris par Riemann pour point de départ de ses considérations (²).

Il suffit en effet, dans notre arrangement des points de ramification, de considérer la liaison de la première et de la seconde feuille, car une feuille qui est connexe avec la première par deux

---

(¹) On a toujours alors $2p = r - 2(m-1)$. En général, m sera égal à l'ordre de la courbe primitive, r à sa classe, augmentée du nombre des points de rebroussement. (*Voir* la note 1 de la page 215, t. II.)

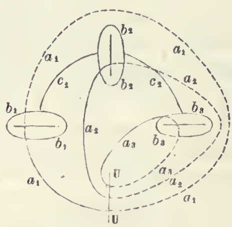
(²) *Voir* RIEMANN, *op. cit.*, § 10; PRYM, *loc. cit.*, et NEUMANN, *op. cit.*, p. 405. Le système de sections transverses dont il est fait usage dans le texte est d'ailleurs un peu différent du système de Riemann.

points de ramification seulement, c'est-à-dire par une ligne de passage (section de ramification), peut toujours être déformée de telle sorte qu'ensemble avec la première feuille elle ne forme qu'une feuille, ainsi que cela est connu dans les surfaces à deux feuilles dont les feuilles sont liées par deux points de ramification seulement. Entre la première et la seconde feuille, nous avons $r - 2(m-2) = 2p + 2$ points de ramification, et par conséquent $p+1$ sections de ramification; et l'on dispose autour d'elles de la manière suivante le système canonique dont il a été parlé.

On place d'abord, sur la première feuille par exemple, p sections $b_1, b_2, \ldots, b_p$, chacune autour d'une des p lignes de passage, en sorte qu'une ligne de passage n'est pas entourée par une section b_ν.

On relie alors les sections b l'une à l'autre dans un ordre quelconque par les sections de rattachement $c_1, c_2, \ldots; c_{p-1}$; enfin, on dispose p autres sections $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de telle sorte que chacune d'elles, en partant de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de passage U, ait son cours partie sur la première, partie sur la seconde feuille et conduise chacune à l'une des p autres lignes de passage, ainsi qu'il est représenté dans la *fig.* 1 pour $p = 3$ (les sections qui ont leur cours sur la seconde feuille sont figurées par des points). Or, on peut

Fig. 1.



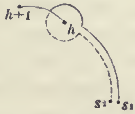
imaginer que le système de courbes ainsi tracé soit composé de $2p$ sections transverses [1]; et celles-ci forment dans leur ensemble une courbe revenant sur elle-même lorsque l'on parcourt

[1] Il faut considérer comme première section transverse la courbe b_1, après que l'on a préalablement converti la surface sphérique (fermée) de Riemann par l'enlèvement d'un point en une surface non fermée. Les $2p-1$ autres sections transverses sont c_1 et b_2, c_2 et b_3, $\ldots$, c_{p-2} et b_p, a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_p.

les sections successivement dans le sens positif et dans le sens négatif; c'est-à-dire que la surface ainsi décomposée a une seule courbe d'encadrement. Elle est, par suite, décomposée en même temps par les $2p$ sections en une surface simplement connexe; *sa connexité est donc égale à* $2p+1$ [1].

En faisant usage de ce système canonique de sections transverses, on résout la question de savoir quels sont les changements de valeur d'une intégrale de première espèce par l'effet du changement du contour d'intégration. En effet, tout chemin qui a son cours sur la surface *simplement connexe* ainsi décomposée, c'est-à-dire qui ne franchit pas les sections a_1, b_1, c_1, peut être resserré de manière à se réduire à un point; une intégrale I, prise le long d'un tel chemin, donne toujours une somme nulle, et deux chemins de cette sorte réunissant les mêmes points conduisent à la même valeur de l'intégrale. Nous n'avons plus à considérer que les changements qui peuvent survenir lorsque *les coupures dont nous parlons viennent à être franchies.* Or tous ces changements de valeur peuvent se représenter par des fonctions linéaires et à coefficients entiers de $2p$ grandeurs, comme on le reconnaît de la manière suivante. Nous imaginerons que les $2p+2$ points de ramification (entre la première et la seconde feuille) qui entrent en considération aient été numérotés, et cela de telle sorte que le n° 1 soit lié au n° 2, le n° 3 au n° 4, ..., le n° $2p+1$ au n° $2p+2$, au moyen d'une section de ramification. Nous choisirons ensuite deux points quelconques s_1 et s_2 de la surface situés l'un au-dessous de l'autre sur la première et la seconde feuille respectivement, et nous désignerons par α_k la valeur de l'intégrale I prise le long d'un chemin qui part de s_1 sur la feuille supérieure, tourne dans un petit cercle autour du $h^{\text{ième}}$ point de ramification et revient alors en s_2 sur la feuille

Fig. 2.



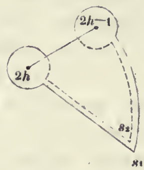
inférieure (*fig.* 2). L'intégrale I donne évidemment une somme

---

(1) *Voir* RIEMANN, *op. cit.*, § 7, et NEUMANN, *loc. cit.*

nulle si on la prend le long d'un chemin embrassant la totalité des $2p+2$ points de ramification; car un chemin de cette nature (en passant par l'infini) peut se réduire à un point. Mais, d'autre part, on peut réduire ce chemin à une série de lacets séparés qu'on tracera de la manière prescrite autour de chacun des points de ramification. Le contingent fourni à la valeur de I par deux lacets tracés autour des points $2h-1$ et $2h$ est alors $\alpha_{2h-1}-\alpha_{2h}$. Ici, en effet, le premier chemin va de s_1 à s_2, et le second retourne de s_2 à s_1; ce dernier donne en conséquence la valeur changée de signe

Fig. 3.



de α_{2h} (*fig.* 3). Si donc on ramène l'intégrale I de s_1 à s_1 en faisant le tour de tous les lacets, il en résulte l'équation

$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\ldots+\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2}=0. \tag{7}$$

Or la différence de deux intégrales quelconques α_h et α_k est complètement indépendante des points s_1, s_2, car nous pouvons réduire le contour d'intégration de l'intégrale $\alpha_h-\alpha_k$ à un lacet qui serre aussi étroitement que l'on voudra les points de ramification h et k, et à un chemin conduisant de s_1 à un point de ce lacet et ramenant de même ensuite à s_1; la partie relative à ce dernier chemin est nulle, et de là résulte que $\alpha_h-\alpha_k$ est une *constante* indépendante de s_1 et s_2. Or, avec toutes les constantes possibles de cette nature, on peut composer toutes les variations de valeur de I (*voir* p. 178). On peut de plus composer linéairement les différences $\alpha_h-\alpha_k$ avec $2p+1$ différences d'entre elles qui s'obtiennent en retranchant l'une des intégrales α_h, α_{2p+2}, par exemple, de toutes les autres, c'est-à-dire avec les $2p+1$ quantités

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_{2p+2},\quad \beta_2=\alpha_2-\alpha_{2p+2},\quad \ldots,\quad \beta_{2p+1}=\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2}.$$

Entre ces grandeurs, on déduit de l'équation (7) la relation

$$(8)\qquad \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 + \ldots + \beta_{2p+1} = 0;$$

l'une d'elles s'exprime donc linéairement en fonction des autres, et il reste $2p$ variations de I linéairement indépendantes les unes des autres, ou, suivant l'expression usitée, $2p$ « *modules de périodicité* » *de l'intégrale* I. Nous pouvons en conséquence énoncer le théorème suivant :

Une intégrale de première espèce a en général $2p$ modules de périodicité. Si nous appelons I *la valeur de l'intégrale prise le long d'un chemin quelconque,* $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(2p)}$ *ses modules de périodicité,*

$$I + m^{(1)} I^{(1)} + m^{(2)} I^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I^{(2p)}$$

est la valeur la plus générale que puisse acquérir l'intégrale par variation du contour d'intégration, $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(2p)}$ *étant des nombres entiers, positifs ou négatifs.*

La proposition est vraie pour chacune des intégrales de première espèce en nombre $p-1$ fois infini. Mais on aura toujours à considérer uniquement p *quelconques* de ces dernières, car toutes les autres s'expriment comme fonctions linéaires et homogènes de celles-là, pourvu que l'on prenne les p intégrales dont il s'agit toutes suivant le même chemin que l'intégrale à exprimer par elles. *C'est ce que nous ferons toujours dans ce qui suit.* Soient $I_1, I_2, \ldots, I_p$, p intégrales de cette espèce prises suivant un contour quelconque (mais le même pour toutes); le système de valeurs de ces intégrales le plus général le long d'un autre contour quelconque est représenté par le tableau

$$\begin{array}{l}
I_1 + m^{(1)} I_1^{(1)} + m^{(2)} I_1^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_1^{(2p)}, \\
I_2 + m^{(1)} I_2^{(1)} + m^{(2)} I_2^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_2^{(2p)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
I_p + m^{(1)} I_p^{(1)} + m^{(2)} I_p^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_p^{(2p)}.
\end{array}$$

Les modules de périodicité forment un système de $2p^2$ constantes

dans lequel les $2p$ grandeurs de la même ligne horizontale se rapportent à une même intégrale et à des circuits indépendants les uns des autres autour des points de ramification, les p grandeurs d'une même ligne verticale à un même circuit et à des intégrales différentes. Mais ces modules de périodicité $I_h^{(k)}$ ne sont pas indépendants les uns des autres; il existe, au contraire, entre eux des relations algébriques, et en particulier entre les $I_h^{(k)}$ de deux lignes horizontales ont lieu des équations qui sont linéaires par rapport à ces mêmes quantités dans chacune de ces deux lignes.

Pour développer les équations dont il s'agit, le mieux est de choisir pour $I_h^{(k)}$ les $2p$ valeurs de l'intégrale I_h, valeurs qu'acquiert cette dernière prise le long de l'une des coupures a_ν et b_ν; ce sont là, en effet, aussi des circuits autour de deux points de ramification, circuits de telle nature qu'aucun ne puisse se réduire aux autres. Actuellement nous désignerons par $B_h^{(\nu)}$ la valeur de l'intégrale I_h prise le long de b_ν, par $A_h^{(\nu)}$ la valeur de l'intégrale prise le long de a_ν. Nous poserons par suite

$$I_h^{(1)} = B_h^{(1)}, \quad I_h^{(2)} = B_h^{(2)}, \ \ldots, \quad I_h^{(p)} = B_h^{(p)},$$
$$I_h^{(p+1)} = A_h^{(1)}, \quad I_h^{(p+2)} = A_h^{(2)}, \ldots, \quad I_h^{(2p)} = A_h^{(p)}.$$

Comme les coupures b_ν et a_ν s'entrecroisent, et que deux coupures peuvent être supposées tracées aussi près ou aussi loin qu'on voudra autour des points de ramification, on peut évidemment exprimer la même chose en disant que *l'intégrale* I_h *varie de la quantité* $B_h^{(\nu)}$ *au cas de franchissement de la coupure* a_ν, *de la quantité* $A_h^{(\nu)}$ *au cas de franchissement de la coupure* b_ν, *et reste, au contraire, constante pour les coupures* c_ν. L'intégrale est donc, d'après les hypothèses faites par nous sur la position des sections transverses, discontinue pour les coupures a_ν et b_ν, tandis que, pour tout le reste, elle a partout sur la surface de Riemann un parcours fini et continu.

Actuellement, pour établir les relations annoncées entre les modules de périodicité, nous prendrons l'intégrale $\int I_h \, dI_k$ tout le long du périmètre de la surface décomposée, simplement connexe, c'est-à-dire successivement dans le sens positif et dans le sens négatif sur toutes les coupures a_ν, b_ν et c_ν, ce qui donnera la valeur

zéro, et l'on trouve ainsi les relations [1]

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} (A_h^{(\nu)} B_k^{(\nu)} - B_h^{(\nu)} A_k^{(\nu)}) = 0. \tag{9}$$

Ces relations existent donc entre les modules de périodicité de deux intégrales I_h *et* I_k.

Les mêmes considérations conduisent enfin à une *forme normale déterminée de l'intégrale de première espèce.* Nous avons choisi précédemment les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_p$ tout à fait arbitrairement parmi les intégrales I en nombre $p-1$ fois infini. Au lieu de ces dernières, on peut, en particulier, prendre pour base certaines combinaisons linéaires des fonctions $I_1, I_2, \ldots, I_p$ dont les modules de périodicité ont des valeurs particulièrement simples, et, pour préciser, on aperçoit que l'on peut faire nulles toutes les grandeurs correspondantes $B_h^{(k)}$ pour $h \lessgtr k$, tandis que les grandeurs $B_h^{(h)}$ peuvent toutes être prises égales à une même valeur quelconque; on choisira $2i\pi$ pour cette valeur [2]. Mais il résulte alors de (9) que l'on a $A_h^{(k)} = A_k^{(h)}$. Pour indiquer ce fait, nous ferons usage de la notation a_{hk}; on aura donc

$$a_{hk} = a_{kh} = A_h^{(k)} = A_k^{(h)}.$$

Les intégrales ainsi choisies et qui forment en un certain sens (en quelque sorte) dans la multiplicité $p-1$ fois infinie des intégrales I un système canonique de coordonnées (dépendant du système canonique de sections transverses) seront appelées intégrales nor-

---

[1] *Voir* RIEMANN, *loc. cit.*, § 20, et CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 106. Pour les intégrales hyperelliptiques, ces équations ont été trouvées par WEIERSTRASS, *loc. cit.;* comparer aussi BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édit., p. 184 et 674; elles l'avaient déjà été dans l'hypothèse de $p = 2$, par ROSENHAIN, *Mémoire sur les fonctions de deux variables à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première espèce* (*Mémoires présentés par divers savants,* Paris, 1851). Il existe encore d'autres relations qui d'ailleurs, en général, ne sont pas connues. (*Voir* sur ce sujet l'*Introduction aux fonctions abéliennes* de Riemann, et FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 71 et 73, THOMAE, *ibid.*, t. 66 et 71, WEBER, *op. cit.*, p. 35).

[2] RIEMANN, *loc. cit.*, § 20, CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 108. (*Voir* sur ce sujet les Mémoires de PRYM, *Journal de Crelle*, t. 71, et SCHLAEFLI, *ibid.*, t. 76, où il est démontré que le déterminant des équations linéaires ayant lieu pour les intégrales J n'est pas nul en général.) Faisons observer que Riemann choisit la valeur $i\pi$ au lieu de $2i\pi$.

males et désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Leurs propriétés sont énoncées dans la proposition suivante :

Une intégrale normale de première espèce u_h ne varie pas au cas de franchissement d'une section transverse a_ν; pour la section a_h seulement, elle varie de $2i\pi$. La première moitié des modules de périodicité des u_k est donc donnée par le tableau :

$$\begin{array}{cccccc}
(u_1) & 2i\pi & 0 & 0 & \ldots & 0, \\
(u_2) & 0 & 2i\pi & 0 & \ldots & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
(u_p) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2i\pi.
\end{array}$$

La seconde moitié des modules de périodicité forme un système à déterminant symétrique (puisque $a_{ik} = a_{ki}$) :

$$\begin{array}{cccccc}
(u_1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1p}, \\
(u_2) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2p}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
(u_p) & a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \ldots & a_{pp};
\end{array}$$

c'est-à-dire que l'intégrale u_h varie de $a_{h\nu}$ au cas de franchissement de b_ν. Et les valeurs les plus générales que puissent prendre les intégrales normales par variation du contour d'intégration sont

$$\begin{aligned}
u'_1 &= u_1 + 2i\pi m_1 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1p}q_p, \\
u'_2 &= u_2 + 2i\pi m_2 + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2p}q_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u'_p &= u_p + 2i\pi m_p + a_{p1}q_1 + a_{p2}q_2 + \ldots + a_{pp}q_p.
\end{aligned}$$

les lettres m, q désignant des nombres entiers positifs ou négatifs.

Les integrales de seconde et de troisième espèce peuvent être amenées d'une façon analogue à une forme normale. Une intégrale de troisième espèce $S_{\xi\eta}$ n'a été déterminée d'après la définition donnée plus haut, page 170, que sauf une intégrale de première espèce entrant additivement. En ajoutant une intégrale appropriée, on peut d'abord ramener $S_{\xi\eta}$ à une autre intégrale dont les modules de périodicité pour les sections a_ν sont *tous* nuls. Nous ap-

pellerons cette intégrale une *intégrale normale de troisième espèce;* elle sera toujours, dans ce qui suit, désignée par $\Pi_{\xi\eta}$. On obtient ses variations de valeur pour les coupures b_ν en déterminant les valeurs des intégrales $\int \Pi_{\xi\eta}\, du_\nu$ prises dans le sens positif tout le long des contours limites de la surface décomposée. Ces valeurs seront nécessairement égales aux intégrales correspondantes prises relativement à des courbes fermées quelconques tracées sur la surface simplement connexe et comprenant les infinis ξ, η. L'intégrale, traitée de cette manière (¹), donne pour le module de périodicité de $\Pi_{\xi\eta}$ relatif à la coupure b_ν la valeur $\int_\eta^\xi du_\nu$.

La seconde moitié des modules de périodicité de l'intégrale de troisième espèce s'exprime donc par les intégrales de première espèce prises entre les infinis. Enfin $\Pi_{\xi\eta}$, dans un circuit autour de ξ ou η, varie respectivement de $2i\pi$ ou $-2i\pi$, car l'intégrale devient en ces points logarithmiquement infinie (page 169), et nous pouvons toujours supposer que les valeurs absolues des constantes figurant dans $\Pi_{\xi\eta}$ aient été déterminées de telle façon que la période logarithmique soit précisément égale à $2i\pi$. *La valeur la plus générale que puisse prendre l'intégrale* $\Pi_{\xi\eta}$ *par variation du contour d'intégration est donc*

$$\Pi'_{\xi\eta} = \Pi_{\xi\eta} + 2i\pi m + q_1\int_\eta^\xi du_1 + q_2\int_\eta^\xi du_2 + \ldots + q_p\int_\eta^\xi du_p,$$

$m, q_1, q_2, \ldots, q_p$ *étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Moyennant ces fixations relatives aux périodes, la différentielle* $d\Pi_{\xi\eta}$ *est déterminée complètement et sans ambiguïté* (*ce qui n'a pas lieu pour* $dS_{\xi\eta}$).

Nous mentionnerons encore ici un théorème important auquel donne lieu l'intégrale $\int \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{\alpha\beta}$ traitée par une méthode analogue à celle que nous venons de rapporter pour l'intégrale $\int \Pi_{\xi\eta}\, du_\nu$. Ce théorème est ainsi conçu :

L'intégrale normale de troisième espèce Π *ne varie pas*

(¹) *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 116 et suiv.

si l'on permute les limites avec les infinis, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_\xi^\eta d\Pi_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta d\Pi_{\xi\eta} \quad (^1).$$

Enfin de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ on peut déduire aussi *l'intégrale normale de deuxième espèce,* en vertu du théorème d'après lequel on a (p. 171)

$$E_\xi = \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_1}\alpha_1 + \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_2}\alpha_2 + \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_3}\alpha_3,$$

$a_\xi^{n-1}a_\alpha$ étant égal à zéro. Nous avons à remplacer $S_{\xi\eta}$ par $\Pi_{\xi\eta}$, et nous obtiendrons l'intégrale normale de deuxième espèce

$$Z_\xi = \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_1}\alpha_1 + \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_2}\alpha_2 + \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_3}\alpha_3.$$

On obtient alors immédiatement les propositions suivantes (²) :

Les modules de périodicité de Z_ξ pour les coupures a_ν sont tous nuls.

Les modules de périodicité de Z_ξ pour les coupures b_ν sont des fonctions algébriques du paramètre ξ, et, pour préciser, le module de périodicité relatif à la section b_ν sera égal à

$$\frac{\varphi_h(\xi).(c\xi\alpha)}{a_\xi^{n-1}a_c},$$

en posant

$$du_h = \frac{\varphi_h(x).(cx\,dx)}{a_x^{n-1}a_c}.$$

Nous mentionnerons encore, en finissant, la manière dont les propriétés de l'intégrale de troisième espèce $\Pi_{\xi\eta}$ peuvent se déduire de celles de l'intégrale de première espèce par une méthode de passage aux limites au cas où les infinis $\Pi_{\xi\eta}$ se confondent en un point double de la courbe primitive $f = 0$ (³), et tous les

---

(¹) *Voir* Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 117.

(²) *Voir* Roch, *Ueber die Zahl der Constanten*, etc., *Journal de Crelle*, t. 64, et Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 120.

(³) De semblables considérations de limites ont été données par M. Maximilien Marie, *op. cit.*, lorsqu'il s'est appliqué à déterminer l'influence d'un point double sur les propriétés de l'intégrale $\int y\,dx$ au point de vue de la périodicité.

autres cas se réduisent à celui-là par transformation unidéterminative de $f = 0$ (p. 176). Les considérations nécessaires à cet objet présenteront pour nous de l'importance, parce que par leur intermédiaire on peut envisager le problème appelé *problème de l'inversion généralisé* comme un cas limite du problème de Jacobi de l'inversion des intégrales abéliennes, et plus tard nous pourrons nous référer à ce qui va suivre.

Si, par variation continue des coefficients de $f(x)$ ou $F(x, y)$, nous faisons en sorte qu'un point double prenne naissance, deux des points de contact des tangentes issues d'un point quelconque du plan tomberont en ce point double sans compter néanmoins comme points de contact proprement dits. (*Voir* t. II, *fig.* 18, p. 55.) La chose a lieu en particulier pour le point à l'infini de l'axe Y; autrement dit, sur la surface de Riemann, qui répond à $F = 0$, deux points de ramification se rapprochent sans cesse l'un de l'autre, la coupure de ramification qui les joint se raccourcissant de plus en plus. Lorsque les deux points sont arrivés à coïncider, deux feuilles de la surface s'y rencontrent; néanmoins on ne peut plus, par un circuit autour du point de coïncidence, parvenir d'une feuille à l'autre. On peut, au point en question, éloigner par flexion les feuilles l'une de l'autre sans changer par là le caractère de la surface; mais on ne peut pas prolonger sur l'autre feuille un chemin qui va jusqu'à ce même point sur l'une. Les deux feuilles ont, au lieu dont il s'agit, *ce seul point commun;* les points qui s'y trouvent réunis doivent, pour tout le reste, être traités comme deux points entièrement distincts, et seront, pour cette raison, désignés par deux lettres différentes ξ et η. Nous dirons alors qu'au point double de la courbe correspondent les deux points ξ, η de la surface.

On peut supposer que la forme normale de la surface et notre système canonique de sections transverses aient été choisis de telle sorte que les deux points de ramification qui doivent venir à coïncidence forment un couple autour duquel est tracée une coupure b_ν, b_p par exemple. Alors, après la déformation, b_p est sur l'une des deux feuilles une courbe fermée environnant le point ξ. Actuellement la coupure correspondante a_ν se compose d'une courbe qui part de ξ, passe sur l'autre feuille en franchissant la coupure de ramification U, caractérisée par le tracé du système de sections

transverses (p. 180), et revient ensuite au point η sur cette dernière feuille; le chemin dont il s'agit joint alors seulement les points ξ et η l'un à l'autre, *sans former d'ailleurs une courbe fermée.*

Considérons actuellement nos p intégrales u_ν. Si un nouveau point double prend naissance sur $f = 0$, une intégrale quelconque de première espèce I se changera par là en une intégrale de troisième espèce, car la fonction φ qui figure au numérateur de la différentielle $d\text{I}$, égalée à zéro, ne représentera pas nécessairement une courbe passant par le nouveau point double. Mais on doit remarquer comme une circonstance très importante que *les* $p - 1$ *intégrales* normales *de* première *espèce* $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ *de* $f = 0$ *deviennent les* $p - 1$ *intégrales* normales *de* première *espèce* u'_1, $u'_2, \ldots, u'_{p-1}$ *de la courbe déformée* $f' = 0$, si nous supposons que les deux points de ramification entourés par la coupure b_p se sont réunis au point double de f'. En effet, les intégrales $u_1, \ldots, u_{p-1}$ ne varient pas lors d'un circuit autour de la section transverse, puisqu'elles ont toutes pour la coupure a_p la période zéro. Par conséquent les intégrales $u'_1, u'_2, \ldots, u'_{p-1}$ restent également invariables lors d'un circuit autour de b_p, c'est-à-dire du point double situé à l'intérieur de b_p; elles ne deviennent donc pas logarithmiquement infinies en ce dernier; ce ne sont pas des intégrales de troisième espèce : ce sont, au contraire, des intégrales normales de première espèce, puisque leurs autres propriétés satisfont aux conditions qui se rapportent à ces dernières. Au contraire, l'intégrale u_p a pour la coupure a_p la période $2i\pi$; l'intégrale qui en dérive lors de la déformation acquiert donc par un circuit autour de la coupure b_p, c'est-à-dire autour du point ξ ou η, un accroissement égal à $2i\pi$; elle devient donc logarithmiquement infinie en ξ ou η. *C'est une intégrale de troisième espèce*, et nous la désignerons en conséquence par $\Pi_{\xi\eta}$.

Pour les intégrales u'_ν, les grandeurs a_{1p}, a_{2p}, $\ldots$, $a_{p-1,p}$ ne sont plus actuellement à considérer comme des périodes, car nous les avons trouvées respectivement égales aux valeurs des intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ prises le long de la coupure a_p, et cette dernière n'est plus une courbe fermée pour la surface déformée; elle ne représente donc plus un circuit complet. Mais, comme elle joint l'un à l'autre les points ξ et η, nous

avons

$$a_{1p} = \int_\eta^\xi du'_1, \quad a_{2p} = \int_\eta^\xi du'_2, \ldots, \quad a_{p-1,p} = \int_\eta^\xi du'_{p-1}.$$

On a d'ailleurs $a_{ik} = a_{ki}$, et les grandeurs $a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{p-1,p}$ sont les périodes de l'intégrale u_p, qui se transforme en $\Pi_{\xi\eta}$. *Les $p-1$ périodes de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ pour les coupures $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ sont donc en fait données par les intégrales $\int_\eta^\xi du_\nu$.* Conséquemment $\Pi_{\xi\eta}$ est aussi de prime abord une *intégrale normale* de troisième espèce. En effet, ses périodes pour les coupures $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ sont toutes ensemble nulles comme celles de l'intégrale u_p; d'autre part, la période $2i\pi$ de u_p pour la coupure a_p donne maintenant la période logarithmique de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$; de son côté, la période a_{pp} devient infiniment grande, car on a

$$a_{pp} = \int_\eta^\xi d\Pi_{\xi\eta},$$

et ξ, η sont les infinis de $\Pi_{\xi\eta}$. Mais une période infiniment grande ne doit plus compter comme période. Nous avons ainsi établi toutes les propriétés caractéristiques qui appartiennent à l'intégrale normale.

VIII. — Le théorème d'Abel et le problème d'inversion de Jacobi.

Les différentielles et les intégrales dont nous avons expliqué les principales propriétés présentent une grande importance lorsqu'il s'agit de formuler certains problèmes géométriques ou algébriques, et cette importance se montre spécialement à l'égard des questions que nous avons précédemment traitées à l'aide du théorème du reste (t. II, p. 138 et suiv.). Nous revenons de nouveau à ce dernier.

On peut représenter la substance de cette proposition sous une forme symbolique qui conduit directement aux applications du théorème d'Abel. En effet, si deux groupes de points G_Q et G_R sont découpés sur la courbe primitive $f = 0$ par une courbe adjointe,

nous pouvons exprimer symboliquement cette circonstance par l'équation

$$G_Q + G_R = 0. \tag{1}$$

Si, maintenant, G_Q et G_R sont traversés par une courbe adjointe $A = 0$, G_Q et $G_{R'}$ par une autre, $B = 0$, G_R et $G_{Q'}$ par une troisième, $\alpha = 0$, le théorème du reste exprime que $G_{Q'}$ et $G_{R'}$ sont traversés aussi par une courbe adjointe. Dans la conception symbolique précitée, cela veut dire que, des trois équations

$$G_Q + G_R = 0, \quad G_Q + G_{R'} = 0, \quad G_{Q'} + G_R = 0 \tag{2}$$

doit résulter la quatrième équation $G_{Q'} + G_{R'} = 0$, et, par là, se trouve exprimée cette proposition, *que nous pouvons combiner, d'une manière quelconque, suivant les lois de l'addition et de la soustraction, les différentes équations symboliques de la forme* (1). Les résultats obtenus par cette voie coïncident, d'après ce qui y est contenu, avec le théorème du reste. Notre distribution des points d'intersection de $A = 0$ avec la courbe primitive $f = 0$ en deux groupes G_Q et G_R était d'ailleurs très arbitraire; nous aurions pu aussi bien former d'autres groupes au lieu de ceux-là (et même plus de deux simultanément) avec les $G + R$ points d'intersection. Pour exprimer cette égalité de rôle de toutes les intersections de $A = 0$ (non situées aux points multiples de f), nous introduisons ces points isolément. Désignons-les suivant un certain ordre par $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots x^{(\rho)}$, ρ étant égal à $Q + R$, et nous pourrons, à la place de (1), poser l'équation symbolique suivante :

$$G_{x^{(1)}} + G_{x^{(2)}} + G_{x^{(3)}} + \ldots + G_{x^{(\rho)}} = 0, \tag{3}$$

les groupes particuliers G se composant chacun d'un point.

Il y a lieu de se poser la question de savoir si l'on peut remplacer ces relations symboliques par des relations effectives, autrement dit s'il existe des fonctions $F(x)$ de x_1, x_2, x_3 telles que pour les intersections $x^{(i)}$ d'une courbe adjointe avec f non situées aux points singuliers de f existe l'équation *effective*

$$F(x^{(1)}) + F(x^{(2)}) + \ldots + F(x^{(\rho)}) = 0, \tag{4}$$

dans le second membre de laquelle pourrait aussi figurer, au lieu de 0, une constante quelconque.

Or nous reconnaîtrons pour être des fonctions de cette nature les intégrales algébriques traitées par nous, et, s'il s'agit de systèmes d'intersections de courbes adjointes, les intégrales (constamment finies) de la première espèce. On reconnaît en effet que *la fonction* F (x) *ne peut devenir infinie en aucun point de* f. Car si tel était le cas, en $x^{(1)}$, par exemple, l'équation (4) ne pourrait plus subsister que si F devenait en même temps infini négatif en un autre des ρ points d'intersection; mais, si l'on trace par $x^{(1)}$ toutes les autres courbes possibles, les $\rho - 1$ points d'intersection restants deviendraient différents et encore différents [1], toute la courbe f étant ainsi parcourue par eux; c'est-à-dire que F devrait devenir infini en tous les points de f, ce qui rendrait encore illusoire l'équation (4). F est donc, en toute hypothèse, une fonction constamment finie de x, et l'on est conduit par suite à choisir pour la fonction F(x) une intégrale de première espèce. Nous partirons maintenant d'une telle intégrale, et nous montrerons réciproquement qu'à son égard existe en fait un théorème de la forme (4). C'est là le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce.

Le théorème dont il s'agit est d'une nature purement algébrique si l'on part, non des intégrales, mais des différentielles de première espèce, et nous allons incessamment en donner deux démonstrations où l'on ne fait usage que de calculs algébriques. Dès que l'on passe aux intégrales, on doit faire des hypothèses déterminées relativement au parcours du contour d'intégration sur la surface de Riemann qui correspond à $f = 0$, et abandonner ainsi le terrain purement algébrique, ainsi que nous le verrons d'une manière plus approfondie.

Avant d'établir les deux démonstrations en question, nous ferons connaître en peu de mots comment, après Riemann, en faisant usage de théorèmes connus de la théorie des fonctions, on peut arriver au but d'une manière très simple [2]. Soit $B = 0$ une courbe adjointe du même ordre que $A = 0$, et ne passant pas par

---

[1] Cette conclusion devient inexacte pour les points doubles de f; en effet, dans les courbes non adjointes se présentent des intégrales de troisième espèce. (Comparer p. 203.)

[2] *Voir* Riemann, *loc. cit.*, § 14.

les points $x^{(1)}, \ldots, x^{(\rho)}$. Posons

$$\zeta = \frac{B}{A}.$$

ζ sera alors une fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3 qui $[f(x)$ étant égale à o$]$ est ramifiée comme f et devient simplement infinie aux ρ points $x^{(i)}$; et à chaque valeur de ζ répondent (en vertu de $f = 0$) ρ points x, savoir les intersections mobiles de $f = 0$ avec la courbe $A\zeta - B = 0$. On peut donc inversement représenter les points x de f sous le bénéfice de $f = 0$ et $A\zeta - B = 0$ comme des fonctions à ρ valeurs du paramètre ζ (¹). Alors la dérivée d'une intégrale de première espèce (p. 167) par rapport à ζ, dérivée que nous désignerons par DJ,

$$DJ = \frac{dJ}{d\zeta} = \frac{\varphi \cdot \left(cx\,\frac{dx}{d\zeta}\right)}{a_x^{n-1}\,a_c}$$

est une fonction à ρ valeurs de ζ, et nous désignerons ses ρ valeurs particulières par $DJ^{(1)}, \ldots, DJ^{(\rho)}$. Ces dernières sont donc les racines d'une équation du $\rho^{\text{ième}}$ degré qui s'obtient en éliminant les x_i et les dx_i entre les équations

$$A\zeta - B = 0, \quad A.d\zeta + \zeta\Sigma\frac{\partial A}{\partial x_i}dx_i - \Sigma\frac{\partial B}{\partial x_i}dx_i = 0,$$

$$f(x) = 0, \quad a_x^{n-1}a_c\,DJ = \varphi\Sigma \pm c_1 x_2 \frac{dx_3}{d\zeta}, \quad \Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = 0,$$

dont la seconde exprime précisément que les points $x + dx$ doivent être les points de rencontre de $A(\zeta + d\zeta) - B = 0$ avec $f = 0$.

Les fonctions symétriques des dérivées $DJ^{(1)}, \ldots DJ^{(\rho)}$ d'autre part (c'est-à-dire les coefficients de l'équation en question) sont des fonctions à détermination absolument *unique* de ζ; le fait a aussi lieu en particulier pour la somme

$$\Delta = DJ^{(1)} + DJ^{(2)} + \ldots + DJ^{(\rho)}.$$

Or l'intégrale $\int \Delta\, d\zeta$ comme intégrale de première espèce reste

(¹) Une substitution de cette espèce est celle employée, p. 150, d'après Brioschi, pour l'intégrale elliptique.

partout finie; elle est donc une fonction de ζ qui reste holomorphe (suivant la désignation de MM. Briot et Bouquet) dans tous les points du plan servant à la représentation de ζ, et qui, par suite, d'après un théorème connu [1], est une constante; sa différentielle est donc nulle, c'est-à-dire que nous avons la relation

$$\Delta\, d\zeta \equiv dJ^{(1)} + dJ^{(2)} + \ldots + dJ^{(\rho)} = 0 \ [2],$$

dans laquelle

$$dJ^{(k)} = \left[\frac{\varphi\,(c x d x)}{a_x^{n-1}\, a_c}\right]_{x=x^{(k)}}.$$

Or, il existe p différentielles de première espèce, linéairement indépendantes les unes des autres, et les considérations précédentes sont applicables à chacune d'elles. Nous obtenons donc, en particulier pour la différentielle des intégrales normales u_h, ce théorème :

Si l'on désigne par $x^{(i)}$ les intersections de f avec une courbe adjointe A, et par $x^{(i)} + dx^{(i)}$ les intersections de f avec une courbe voisine de A, ρ de ces dernières étant supposées ne pas coïncider avec les points $x^{(i)}$, on a les équations

$$du_h^{(1)} + du_h^{(2)} + \ldots du_h^{(\rho)} = 0. \qquad (5)$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots p).$$

Nous verrons ultérieurement que, réciproquement, au moyen de ces p équations, p des points $x^{(i)}$ sont, en général, déterminés par les autres, mais qu'au contraire ils ne déterminent pas autant de points si l'ordre de $A = 0$ est inférieur à $n - 2$. Actuellement, on obtient par intégration le théorème d'Abel pour les intégrales

---

[1] *Voir*, par exemple, NEUMANN, *Theorie der Abel'schen Integrale*, p. 24 et suiv., ou DURÈGE, *Theorie der Functionen eines complexen Arguments*, ou encore BRIOT et BOUQUET, *op. cit.*, p. 205.

[2] Le fait que cette somme doit être nulle peut aussi se déduire directement, par voie algébrique, de la nature du problème d'élimination susénoncé. (*Voir*, sur ce sujet, HARNACK, *Math. Annalen*, t. IX, p. 371 et suiv.) On trouve aussi dans ce travail, établie, d'une manière effective, l'équation du quatrième degré relative aux points d'intersection d'une droite avec une courbe C_4; l'équation correspondante pour une courbe C_3 a été indiquée par le même auteur (*ibid.*, p. 235).

de première espèce, théorème qui se présente à la place de l'équation symbolique (3) pour $\rho = Q + R$, et est, par suite, en connexion avec le théorème du reste. En vertu de l'inversion du théorème que nous venons d'indiquer, laquelle forme l'objet principal de la théorie des fonctions abéliennes, *on peut aussi déduire du théorème d'Abel le théorème du reste,* ainsi qu'il est visible d'après les explications données en commençant, et le contenu de ce théorème se trouverait ainsi établi *a priori*. Mais il était d'une importance capitale que l'on apprît à envisager cette proposition purement algébrique, indépendamment des fonctions transcendantes du théorème d'Abel, ce dernier représentant d'ailleurs le théorème du reste sous une forme très avantageuse pour les applications. En outre, le théorème d'Abel permet d'établir de la manière la plus simple certaines formules de contact qui ne peuvent être immédiatement données par le principe de correspondance sous une forme facile à saisir.

Nous nous proposons maintenant de donner une manière directe d'établir les équations (5). On peut, au surplus, généraliser le problème de façon à considérer aussi les systèmes de points d'intersection de courbes non adjointes et les sommes de différentielles de *troisième* espèce; à l'égard des intégrales de cette nature nous établirons le théorème d'Abel de deux manières différentes.

Nous commençons par l'examen du système de points d'intersection avec une droite quelconque [1]. Choisissons cette dernière pour axe de coordonnées, et prenons un système de coordonnées rectangulaires tel que la susdite droite coïncide avec l'axe des x, et que, par suite, son équation soit donnée par $y = 0$. L'introduction des nouvelles coordonnées s'effectue au moyen d'une transformation linéaire. Or, nous avons vu précédemment que, dans une telle transformation, une différentielle algébrique subit, en fait de modification, l'adjonction de la première puissance du déterminant de la substitution comme facteur, et c'est là une conséquence de ce que dans le numérateur figure le déterminant $(cx\,dx)$. Mais dans la forme normale d'une différentielle de troisième espèce figure au dénominateur le déterminant $(\xi\eta x)$, en sorte que le dé-

---

[1] L'auteur doit la démonstration suivante du théorème à une communication de BRILL.

terminant de substitution précité disparaît (comparez p. 144). Si donc nous désignons actuellement par x, y les coordonnées rectangulaires, par ξ, η et ξ', η' respectivement les coordonnées des infinis, notre différentielle normale de troisième espèce se transforme en une différentielle de la forme

$$\frac{\Omega_{n-2}(x, y) \,.\, dy}{(ax+by+c)\,\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}$$

dans laquelle $a = \eta' - \eta$, $b = \xi' - \xi$, $c = \xi\eta' - \eta\xi'$.

Nous considérerons une somme de différentielles de cette nature, formée par rapport aux n points d'intersection de $f = 0$, les dy devant être choisis de manière à déterminer les points de rencontre d'une droite voisine de l'axe des x avec f. Nous admettons que cette droite voisine est menée parallèlement à l'axe des x à la distance infiniment petite ε, en sorte que $y - \varepsilon = 0$ est son équation.

En désignant donc par x_i, y_i les coordonnées des n intersections, par dx_i, dy_i les différentielles correspondantes, on aura les équations

$$y_i = 0, \quad dy_i = \varepsilon.$$

Notre somme de différentielles est conséquemment la suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{n-2}(x_i, 0) \,.\, \varepsilon}{(ax_i + c) \,.\, f'_{x_i}},$$

l'expression f'_{x_i} indiquant que, dans les dérivées partielles de f par rapport à x, on doit également poser $y = 0$ et $x = x_i$. Le facteur ε est commun à tous les termes de la somme, et peut, par suite, être placé devant celle-ci. La somme qui reste alors n'est autre évidemment que le développement de l'expression $\dfrac{\Omega(x, 0)}{a \,.\, f(x, 0)}$ en fractions partielles simples, si, dans ce développement, on pose $x = -\dfrac{c}{a}$. Nous avons donc d'abord l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{n-2}(x_i, 0)}{(ax_i + c) \,.\, f'_{x_i}} = -\frac{1}{a}\,\frac{\Omega_{n-2}\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)}{f\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)}, \tag{6}$$

$f(x, 0)$ étant égal à $(x - x_1)(x - x_2), \ldots, (x - x_n)$.

Maintenant la fonction Ω, qui figure dans une différentielle normale, satisfait, d'après les fixations précédentes (p. 168), à la condition

$$\Omega_{n-2}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x) \equiv (\xi\eta\zeta)^2 . f + (\xi\eta x) . \mathrm{N},$$

ζ étant un point quelconque; ou, dans notre système de coordonnées, si nous prenons $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 1$,

$$\Omega_{n-2}(x\eta' - y\xi')(y\xi - x\eta) \equiv c^2 . f + (ax + by + c)\ \mathrm{N},$$

identité qu'il est aisé de vérifier directement en ayant égard aux propriétés de Ω. Il en résulte, pour $y = 0$, $x = -\frac{c}{a}$,

$$\Omega_{n-2}\left(-\frac{c}{a}, 0\right) . \eta . \eta' \equiv -a^2 . f\left(-\frac{c}{a}, 0\right).$$

Si donc nous multiplions finalement les deux membres de (6) par $\varepsilon = dy$, nous avons, puisque $a = \eta' - \eta$, la relation

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\Omega_{n-2}\,dy}{(ax + by + c)f'_x}\right]_i = \varepsilon\frac{\eta' - \eta}{\eta . \eta'} = \frac{\eta' - \varepsilon}{\eta'} - \frac{\eta - \varepsilon}{\eta},$$

où l'indice i dans l'expression entre crochets indique que l'on y doit poser $x = x_i$, $y = 0$.

Dans les deux termes de droite de l'équation (7), figure au dénominateur le premier membre de l'équation $y = 0$ exprimé respectivement par les coordonnées des deux points de discontinuité, et au numérateur le premier membre de l'équation de la ligne voisine $y - \varepsilon = 0$ exprimée par les mêmes coordonnées. Remplaçant donc l'axe des x par une droite quelconque $u_x = 0$, désignant encore les deux infinis de la différentielle de troisième espèce par ξ et η, et passant des intersections $x^{(i)}$ de la ligne u aux intersections d'une ligne $u + du$ dont l'équation est donnée par $\Sigma(u_i + du_i)x_i = 0$, on aura, dans le second membre de (7),

$$\eta = u_\xi, \quad \eta' = u_\eta, \quad \eta - \varepsilon = \Sigma\xi_i(du_i + u_i), \quad \eta' - \varepsilon = \Sigma\eta_i(du_i + u_i).$$

Par conséquent, pour les n points de rencontre $x^{(i)}$ *et* $x^{(i)} + dx^{(i)}$ *de deux droites* $u_x = 0$ *et* $\Sigma(u_i + du_i)x_i = 0$ avec $f = 0$ *existe*

l'équation différentielle

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\Omega_{n-2}(c x d x)}{(\xi\eta x) n . a_x^{n-1} a_c}\right]_i = \frac{\Sigma \eta_i d u_i}{u_\eta} - \frac{\Sigma \xi_i d u_i}{u_\xi} = d\left(\log \frac{u_\eta}{u_\xi}\right).$$

C'est là l'équation cherchée, de laquelle résulte par intégration le théorème d'Abel, établi d'abord, il est vrai, exclusivement pour les intersections d'une droite avec f. Mais si nous effectuons sur la courbe primitive une transformation unidéterminative $x_i = \varphi_i(y)$, les fonctions φ_i étant du $m^{\text{ième}}$ ordre, à la place de $u_x = 0$ intervient la courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre $\Sigma u_i \varphi_i = 0$; en outre, une différentielle normale de troisième espèce se transforme encore en une différentielle de même nature (p. 175). Récrivant donc après la transformation x au lieu de y et désignant l'équation de la nouvelle courbe primitive par $\alpha_x^\nu = 0$, nous obtenons l'équation différentielle (7) sous la forme

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\Omega_{n-2}(c x d x)}{(\xi\eta x).\nu.\alpha_x^{\nu-1}\alpha_c}\right]_i = d\left[\log \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)}\right],$$

en posant $\varphi(x) = \Sigma u_i \varphi_i(x)$. La somme qui figure dans le premier membre renferme n termes, tandis que φ et f se coupent en $m\nu$ points, ν désignant l'ordre de la nouvelle courbe $F \equiv \alpha_x^\nu = 0$. La raison en est qu'une courbe du réseau $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ rencontre la nouvelle courbe $f = 0$ seulement en n points mobiles. Si donc nous passons d'une courbe φ du réseau à une courbe voisine, n seulement des $m\nu$ points d'intersection varient, n pouvant d'ailleurs être aussi alors égal à $m\nu$ (par un choix convenable de la transformation de F en une courbe f). En effet, pour les points de f communs aux deux courbes $\varphi = 0$ et $d\varphi = 0$, les quantités dx_i s'évanouissent à la fois, en sorte que les différentielles correspondantes doivent d'elles-mêmes disparaître dans la somme. L'équation (8) représente donc *l'équation différentielle du théorème d'Abel pour les intégrales de troisième espèce sous sa forme la plus générale;* on doit y choisir les dx_k de telle manière que les points $x_k^{(i)} + dx_k^{(i)}$ forment le système des points d'intersection avec f d'une courbe voisine de $\varphi = 0$.

Nous pouvons imaginer que l'intégration de l'équation (8) soit réalisée de telle sorte que le système des points $x^{(i)}$ sur $f = 0$ passe

d'une situation dans laquelle il satisfait à la condition $\varphi = 0$ à une autre situation dans laquelle il est traversé par une courbe $\psi = 0$ du même ordre que $\varphi = 0$. On peut mettre ce fait en relief en considérant un faisceau de courbes $\varphi + \lambda\psi = 0$ [1] et en intercalant entre les systèmes de points d'intersection que $f = 0$ a en commun avec $\varphi = 0 (\lambda = 0)$ et $\psi = 0 (\lambda = \infty)$ ceux que détermine $f = 0$ avec $\varphi + \lambda\psi = 0$ (pour les valeurs de λ comprises entre 0 et ∞). Ces systèmes intercalaires réunissent les systèmes limites tels que, tandis que λ se meut de 0 à ∞, les systèmes de points se meuvent des limites inférieures de l'intégrale aux limites supérieures. Dans l'intégration elle-même, on a donc affaire à la seule variable λ. Par intégration de l'équation (8) on obtient ainsi le théorème d'Abel sous l'énoncé suivant, dans lequel $S_{\xi\eta}$ est défini comme à la page 168 [2] :

La somme des mn intégrales normales de troisième espèce similaires (c'est-à-dire formées de la même manière) ayant pour infinis ξ, η, dont les limites inférieures $x^{(i)}$ sont les mn systèmes de valeurs qui correspondent aux mn intersections de $f = 0$ avec une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre $\varphi = 0$, et les limites supérieures $y^{(i)}$ donnent les mn intersections avec une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre $\psi = 0$, est égale au logarithme d'une fonction algébrique, et, pour préciser, a lieu l'équation

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x^{(i)}}^{y^{(i)}} dS_{\xi\eta} = \log \frac{\psi(\eta) \cdot \varphi(\xi)}{\varphi(\eta) \cdot \psi(\xi)}.$$

On peut ici, au lieu de $S_{\xi\eta}$, écrire aussi $\Pi_{\xi\eta}$, $\Pi_{\xi\eta}$ en différant

---

[1] La variable λ joue alors le même rôle que précédemment la variable ζ dans le faisceau $A\zeta - B = 0$, pour la démonstration de Riemann. (*Voir* p. 810.)

[2] *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 47. On obtient une démonstration simple du théorème (sans emploi de l'équation différentielle) au moyen des principes de Riemann, si l'on conduit l'intégrale $\int \log \frac{\varphi}{\psi} \, d\Pi_{\xi\eta}$ autour de la surface de Riemann sectionnée, et autour des points ξ, η, $x^{(i)}$, $y^{(i)}$; *voir* CLEBSCH et GORDAN, p. 125, et, pour les intégrales de première espèce, WEBER, *Math. Annalen*, t. VIII, p. 49. Le théorème a été découvert par ABEL, pour les intégrales hyperelliptiques, *Journal de Crelle*, t. 3, p. 313; pour le cas général (1826), *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* (*Mémoires des Savants étrangers*, t. VII, 1841).

au plus de $S_{\xi\eta}$ par l'adjonction d'une intégrale de première espèce (p. 187); car nous verrons incessamment que la somme correspondante d'intégrales de première espèce est nulle. Il est nécessaire d'ajouter une remarque sur les chemins d'intégration choisis pour les intégrales. Si on les laisse arbitraires, il peut encore s'adjoindre dans le second membre des modules de périodicité des $\Pi_{\xi\eta}$ absolument quelconques (p. 187). Mais si l'on range les points $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ par couples de telle sorte que le point $x^{(i)}$ se transforme en $y^{(i)}$ (¹) lorsque, dans le faisceau $\varphi + \lambda\psi = 0$, on passe de $\varphi = 0$ à $\psi = 0$ (ainsi qu'il a été fixé plus haut), on obtient, dans le premier et dans le second membre de (9), la valeur zéro, quand on rapproche infiniment les courbes φ, ψ, et par suite dans le choix correspondant du contour d'intégration ne se présentent plus de périodes de $\Pi_{\xi\eta}$. Or, dans le passage de φ à ψ par le faisceau $\varphi + \lambda\psi$, aucun des points $x^{(i)}$ ne doit atteindre le point ξ ou η, car, pour la situation correspondante de $\varphi + \lambda\psi$, $\Pi_{\xi\eta}$ serait infiniment grand, et par conséquent l'équation (9) deviendrait illusoire, ou, au moins, nécessiterait un examen plus approfondi. On peut enfin rapprocher les points $y^{(i)}$, $y^{(k)}$ et $x^{(i)}$, $x^{(k)}$ indéfiniment les uns des autres; par là deux intégrales de la somme deviennent égales en supposant que l'on puisse ramener leurs contours d'intégration l'un à l'autre sans franchir un infini de $\Pi_{\xi\eta}$ ou un des points de ramification caractéristiques pour les périodes de $\Pi_{\xi\eta}$; on admettra que cette supposition soit réalisée. Nous résumerons ces règles dans le théorème suivant :

Dans l'équation (9), *les limites supérieures et inférieures des chemins d'intégration employés dans le premier membre sont coordonnées de telle sorte que ces chemins deviennent infiniment petits lorsque l'on rapproche infiniment les courbes* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *et les différents chemins doivent être situés de telle manière que deux d'entre eux soient directement réductibles l'un à l'autre lorsque leurs limites deviennent égales, et aucun d'eux*

(¹) Cet arrangement n'est, au surplus, pas complètement déterminé.

(ou bien tous) ne peut couper le chemin sur lequel on arrive de $\log \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}$ *à* $\log \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}$ [1].

Pour les recherches géométriques, les intégrales de première espèce et celles des intégrales de troisième espèce qui deviennent infinies en un point double de f présentent une importance particulière. On obtient ces intégrales comme cas particuliers de $S_{\xi\eta}$ ou $\Pi_{\xi\eta}$ si Ω_{n-2} renferme le facteur $(\xi\eta x)$, et il s'agit alors de savoir si la fonction du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre restante ne passe plus par un point double de f (p. 173), ou bien si elle est de nouveau adjointe à f.

Dans le premier cas, nous avons $\xi_i = \eta_i$; $\varphi(\xi)$ devient par suite égal à $\varphi(\eta)$, et $\psi(\xi)$ à $\psi(\eta)$, en sorte que le second membre de (9) arrive à la valeur zéro. Dans les deux cas, figure dans l'équation (6), à chaque terme de la somme qui se trouve au numérateur du premier membre, une fonction d'ordre $n-3$ de x, tandis que la fonction linéaire disparaît au dénominateur; mais une telle somme est, d'après une proposition connue de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, égale à zéro, en sorte que dans le second membre de (9) au second cas aussi se présente une valeur nulle ou une constante. Mais on peut supposer cette constante égale à zéro si l'on a fixé les chemins d'intégration de la manière convenue. On a donc ce théorème :

La somme des intégrales similaires de première espèce [2] *ou de celles des intégrales de troisième espèce qui ne deviennent infinies qu'en un point double de f, prises entre des limites qui sont déterminées par le système de points d'intersection de la courbe*

---

[1] Ces hypothèses faites, on peut aussi, d'après le théorème sur la permutation du paramètre et de l'argument, p. 188, écrire aussi l'équation (9) sous la forme

$$\sum_i \int_\xi^\eta d\,\Pi_{x^{(i)}y^{(i)}} = \log\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} - \log\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}.$$

(Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 127).

[2] Cette proposition résulte au surplus directement de (9), car cette dernière équation a toujours lieu, de quelque manière que l'on puisse former $S_{\xi\eta}$, pour les mêmes points ξ, η; or la différence de deux semblables valeurs de $S_{\xi\eta}$ est (p. 170, une intégrale de première espèce.

$f=0$ avec une courbe du $m^{ième}$ ordre $\varphi=0$ et par le système de points d'intersection de $f=0$ avec une courbe du $m^{ième}$ ordre $\psi=0$, est toujours nulle [1].

Il a été préalablement supposé ici que les courbes $\varphi=0$, $\psi=0$ ne passent pas toutes deux par le point double. En effet, la proposition devient alors inexacte pour les intégrales de troisième espèce qui deviennent infinies au point double, puisque l'on n'a plus zéro dans le second membre. Car soit pour un instant

$$\varphi=\varphi_x^m,\quad \psi=\psi_x^m;$$

on a, dans ce cas, y_i étant les coordonnées du point double,

$$\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}=\frac{\varphi_y^{m-1}\varphi_\alpha}{\psi_y^{m-1}\psi_\alpha},\quad \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}=\frac{\varphi_y^{m-1}\varphi_\beta}{\psi_y^{m-1}\psi_\beta},$$

α étant un point quelconque sur l'une des tangentes de y, tel conséquemment qu'un point voisin de ξ sur la surface de Riemann (comparez p. 189), et β un point de l'autre tangente de y (voisin de η). Mais ces deux quotients ne sont plus égaux l'un à l'autre; on n'obtient donc plus zéro pour différence de leurs logarithmes.

Au contraire, à l'égard des intégrales de première espèce, ce théorème subsiste même quand les courbes φ, ψ passent par les points doubles de f; donc, en particulier, p différentes équations de la forme (9) ont lieu pour les courbes *adjointes* si l'on pose zéro dans le second membre. C'est ce qu'on vérifie directement sur (6), car, dans le premier membre de cette équation, on obtient alors une somme de la forme

$$\sum_i \frac{\varphi_{n-3}(x_i, 0)}{f'_{x_i}},$$

somme qui est nulle, d'après un théorème connu d'Algèbre. En

---

[1] Un autre cas, où, dans le second membre, apparaît la valeur zéro, se présente lorsque la courbe du faisceau $\varphi+\lambda\psi=0$, qui passe par ξ, renferme encore par là même η. Si, en effet, ρ est le paramètre de cette dernière, on a simultanément

$$\varphi(\xi)+\rho\psi(\xi)=0 \quad\text{et}\quad \varphi(\eta)+\rho\psi(\eta)=0,$$

d'où

$$\varphi(\xi)\psi(\eta)=\varphi(\eta)\psi(\xi).$$

effet on aurait au second membre de (6), Ω renfermant le facteur $ax+by+c$,

$$\Omega_{n-2}(x, 0) = \varphi_{n-3}(x, 0).(ax+c),$$

et cette dernière expression s'annule pour $x = -\frac{c}{a}$. Donc, tant que le théorème se réfère à des intégrales de première espèce, il nous ramène à notre point de départ; car son contenu résulte aussi de l'équation différentielle (5) par intégration. Dans ses équations, ne figurent que les intersections non situées aux points singuliers de f, comme cela doit être; car les autres sont communes aux courbes φ et ψ qui déterminent les limites. Le nombre p des conditions transcendantes ainsi trouvées concorde exactement avec le nombre des conditions algébriques qui, suivant ce qui précède, doivent exister entre les points d'intersection d'une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre avec f dans le cas de $m > n-3$. Nous verrons plus tard quelle modification se produit au cas de $m \leqq n-3$.

On peut maintenant se poser la question (déjà indiquée plus haut) de savoir si réciproquement, lorsque les p équations (5) ou leurs équations intégrales existent, on peut toujours obtenir des courbes coupant respectivement la courbe primitive aux points qui se présentent aux limites de l'intégrale, et si, par suite, le système de points en question est caractérisé complètement par les équations (5) comme système complet des intersections de f avec une courbe adjointe. Nous répondrons plus tard affirmativement à cette question.

Actuellement nous nous proposons d'établir le théorème d'Abel d'une autre manière (sans faire usage de transformations unidéterminatives), et cela d'autant plus volontiers que nous mettrons ainsi en relief sa connexion avec d'autres théorèmes purement algébriques qui émanent principalement de Jacobi.

Soient dans le plan μ points quelconques $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\mu)}$; leur ensemble pourra être représenté par une équation de classe μ en coordonnées lignes telle que $u_\chi^\mu = 0$. Joignons séparément ces points à deux points ξ et η choisis de même d'une manière complètement arbitraire. Les équations des deux systèmes ainsi obte-

nus de μ rayons chacun seront respectivement $(\chi x \xi)^\mu = 0$, $(\chi x \eta)^\mu = 0$, et l'on peut poser

$$(10) \qquad (\chi x \xi)^\mu = \prod_{i=1}^{i=\mu} (x \xi x^{(i)}), \quad (\chi x \eta)^\mu = \prod_{i=1}^{i=\mu} (x \eta x^{(i)}).$$

Ces deux systèmes de rayons se coupent en μ^2 points dont μ sont précisément les points $x^{(i)}$; ils ont donc, en dehors de ceux-là, $\mu(\mu - 1)$ points communs. Par ces *intersections restantes* on peut, dans tous les cas, faire passer une courbe d'ordre $2\mu - 2$

$$\Theta_x^{2\mu-2} = 0,$$

car une courbe de cette espèce ne sera déterminée que par $(\mu - 1)(2\mu + 1)$ conditions; il reste donc $\mu^2 - 1$ paramètres arbitraires dont nous disposerons plus tard d'une manière convenable. Après ces fixations, nous allons montrer que l'égalité suivante est une identité ([1]) :

$$(11) \left\{ \begin{aligned} & \mu^2 \Theta_x^{2\mu-2} \prod_{i=1}^{i=\mu} (\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-i} (\chi \eta \xi) (\chi' x^{(i)} \eta)^{\mu-1} (\chi' \xi \eta) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{k=\mu} \left\{ \Theta_y^{2\mu-2} [(\xi \eta y)^2]_k \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k [\chi z \xi)^{\mu-1} (\chi \eta \xi) (\chi' z \eta)^{\mu-1} (\chi' \xi \eta) (x \xi z)(x \eta z)]_i \right\} \\ & = \mathrm{A}.(\chi x \xi)^\mu + \mathrm{B}.(\chi x \eta)^\mu. \end{aligned} \right.$$

Dans la seconde partie du premier membre figure ici une somme de μ termes dont chacun se compose encore du produit de $\Theta_{x^{(k)}}^{2\mu-2}(\xi \eta x^{(k)})$ par $\mu - 1$ autres facteurs, car l'indice k ajouté au signe de produit Π indique que, dans le produit figurant au $k^{\text{ième}}$ terme de la somme, le facteur correspondant à l'indice $i = k$ doit être négligé; ensuite l'indice k, ajouté au terme entre crochets, signifie qu'il y faut faire $y = x^{(k)}$, et l'indice i ajouté à l'autre expression entre crochets signifie qu'il y faut faire $z = x^{(i)}$; enfin

---

([1]) Si l'on imagine que les deux paramètres qui déterminent les rayons des faisceaux issus de ξ et η aient été introduits comme variables, on peut aussi produire cette équation par l'emploi, deux fois répété, de la décomposition ordinaire en fractions simples; comparez p. 153 et suiv. C'est par de telles opérations que Clebsch et Gordan arrivent aux théorèmes de Jacobi et d'Abel (*op. cit.*, p. 44 et suiv.).

le symbole χ' sera équivalent à χ de telle sorte que $u_{\chi}^{\mu} = u_{\chi'}^{\mu}$. Pour prouver l'exactitude de l'équation (11), nous avons à montrer que l'expression figurant au premier membre représente une courbe passant par la totalité des μ^2 points d'intersection de $(\chi x \xi)^{\mu} = 0$ et $(\chi x \eta)^{\mu} = 0$. Faisons d'abord, dans ce but, x égal à $x^{(rs)}$, c'est-à-dire se confondant avec le point de rencontre de la ligne joignant $x^{(r)}$ à ξ et de la ligne joignant $x^{(s)}$ à η; le premier terme à gauche est nul, parce que Θ doit passer par ce point, et chaque terme de la somme dans la seconde partie est nul à cause des équations

$$\left(x^{(rs)} \xi x^{(r)}\right) = 0, \quad \left(x^{(rs)} \eta x^{(s)}\right) = 0,$$

car un de ces facteurs se rencontre en chaque terme de la somme. Si l'on pose ensuite dans (11) $x = x^{(r)}$, il vient également zéro dans le premier membre, les deux termes se détruisant l'un l'autre. Dans la somme de μ termes, le terme qui répond à l'indice $k = r$ est, en effet, le seul qui ne disparaisse pas. Mais, pour $k = r$, existent les équations

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\prod_{i=1}^{i=\mu}{}_{r} \left(x^{(r)} \eta x^{(i)}\right) . \left(\xi \eta x^{(r)}\right) = \mu \left(\chi x^{(r)} \eta\right)^{\mu-1} (\chi \xi \eta), \\ &\prod_{i=1}^{i=\mu}{}_{r} \left(x^{(r)} \xi x^{(i)}\right) . \left(\eta \xi x^{(r)}\right) = \mu \left(\chi x^{(r)} \xi\right)^{\mu-1} (\chi \eta \xi), \end{aligned} \right.$$

qui se déduisent aisément des équations (10) par formation polaire, et, en vertu de ces équations, le seul terme qui reste de la somme, c'est-à-dire le $r^{\text{ième}}$, est précisément égal et de signe contraire au premier terme du premier membre, comme nous l'avons énoncé. L'expression du premier membre s'évanouit donc en fait pour tous les μ^2 points d'intersection des deux systèmes de μ rayons chacun, ce qu'il fallait démontrer.

Nous formerons maintenant, dans les deux membres de l'équation (11), la $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ polaire de ξ, et nous poserons ensuite $x = \eta$, ou, en d'autres termes, nous ferons, dans les deux membres, $x = \xi + \lambda \eta$, et nous chercherons les coefficients de $\lambda^{\mu-1}$. Nous obtenons alors, dans le second membre, un résultat identi-

quement nul. On a donc

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu^2\binom{2\mu-2}{\mu-1}\cdot\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}\prod_{i=1}^{i=\mu}[(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)]_i \\ &= -\sum_{k=1}^{k=\mu}\left\{[\Theta_x^{2\mu-2}(\xi\eta x)^2]_k \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k[(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)(\eta\xi x)(\xi\eta x)]_i\right\},\end{aligned}\right.$$

les indices i, k ajoutés aux expressions entre crochets exprimant que, dans ces dernières, il faut prendre $x = x^{(i)}$ ou $x = x^{(k)}$ respectivement. Chaque terme de la somme qui figure au second membre renferme le produit complet, c'est-à-dire s'étendant à la totalité des μ valeurs de l'indice i,

$$-\prod_{i=1}^{i=\mu}(\xi\eta x^{(i)})(\eta\xi x^{(i)}) = -(\chi\xi\eta)^\mu(\chi'\eta\xi)^\mu = (-1)^{\mu+1}[(\chi\xi\eta)^\mu]^2.$$

Nous placerons ce facteur devant le signe sommatoire, et dans les deux membres nous diviserons par ce même facteur, ainsi que par le produit complet qui se présente dans le premier membre. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Entre μ points quelconques $x^{(i)}$ du plan, représentés par $u_\chi^\mu = 0$, et deux points ξ, η également quelconques existe l'équation identique

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu^2\binom{2\mu-2}{\mu-1}\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2}(-1)^\mu \\ &= \sum_{k=1}^{k=\mu}\left[\frac{\Theta_x^{2\mu-2}}{(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)}\right]_k,\end{aligned}\right.$$

où $\Theta = 0$ passe par la totalité des $\mu(\mu-1)$ intersections restantes des lignes qui joignent ξ et η aux points $x^{(i)}$.

De cette identité résulte, par une transformation facile, la proposition appelée *théorème de Jacobi*, et de laquelle on peut encore déduire le théorème d'Abel. Nous admettrons en particulier que les μ points en question soient les intersections de deux courbes

$$f \equiv a_x^n = 0 \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \alpha_x^m = 0$$

(intersections que nous supposerons toutes séparées), en sorte que $\mu = mn$. Alors les deux systèmes, issus de ξ et η et composés chacun de μ rayons, passent par tous les points de rencontre de f et de φ, c'est-à-dire que nous pouvons poser

$$(15)\qquad \begin{cases} (\chi x \xi)^{\mu} = A_x^{\mu-n}.f + B_x^{\mu-m}.\varphi, \\ (\chi x \eta)^{\mu} = C_x^{\mu-n}.f + D_x^{\mu-m}.\varphi. \end{cases}$$

Si l'on fait, dans ces équations, $x = x^{(ik)}$, les premiers membres seuls deviennent égaux à zéro, mais il n'en est pas de même de f et de φ. *Donc, pour les intersections restantes, le déterminant*

$$(16)\qquad \Delta \equiv \Delta_x^{2\mu-m-n} = A.D - B.C$$

sera nul. Mais si l'on pose dans (15) $x = x^{(i)}$, f et φ s'évanouissent également. Si donc on forme la première polaire de ξ et η relativement à $(\chi x \xi)^{\mu} = 0$ et $(\chi x \eta)^{\mu} = 0$ pour $x = x^{(i)}$, il vient, en négligeant comme nuls les termes multipliés par f, φ,

$$\begin{aligned}
\mu(\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-1}(\chi \eta \xi) &= [n A a_x^{n-1} a_\eta + m B \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta]_i, \\
\mu(\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-1}(\chi \xi \xi) &= [n A a_x^{n-1} a_\xi + m B \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi]_i, \\
\mu(\chi x^{(i)} \eta)^{\mu-1}(\chi \eta \eta) &= [n C a_x^{n-1} a_\eta + m D \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta]_i, \\
\mu(\chi x^{(i)} \eta)^{\mu-1}(\chi \xi \eta) &= [n C a_x^{n-1} a_\xi + m D \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi]_i.
\end{aligned}$$

Dans la deuxième et la troisième équation, les deux premiers membres ont, à cause des facteurs $(\chi \xi \xi)$, $(\chi \eta \eta)$, la valeur zéro. D'après le théorème sur la multiplication des déterminants, on a donc (μ étant égal à mn)

$$\begin{aligned}
\mu \begin{vmatrix} (\chi x \xi)^{\mu-1}(\chi \eta \xi) & 0 \\ 0 & (\chi x \eta)^{\mu-1}(\chi \xi \eta) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_x^{n-1} a_\eta & \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta \\ a_x^{n-1} a_\xi & \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi \end{vmatrix} \\
&= -\Delta . (a \alpha u) a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1},
\end{aligned}$$

si l'on imagine que l'on a écrit toujours $x^{(i)}$ au lieu de x, et qu'on ait posé $u_i = (\xi \eta)_i$. Au moyen de cette relation, nous pouvons dans (14) exprimer le dénominateur qui figure dans le second membre en fonction de Δ et du déterminant fonctionnel de f, φ et u_x (c'est-à-dire de la droite $\xi \eta$). La forme Δ disparaît alors, eu égard au numérateur, si nous posons en même temps

$$\Theta_x^{2\mu-2} = U_x^{m+n-2} . \Delta_x^{2\mu-m-n},$$

U étant une fonction quelconque de l'ordre $m+n-2$. On peut toujours faire ainsi, car la courbe $\Theta = 0$ était assujettie *uniquement* à la condition de passer par les $\mu(\mu-1)$ intersections restantes, et cette condition est remplie par $\Delta = 0$. Au moyen de la substitution indiquée, l'équation (14) prend la forme suivante :

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{k=\mu}\left[\frac{U_x^{n+m-2}}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right]_k = (-1)^{\mu-1}.\mu\binom{2\mu-2}{\mu-1}\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2},$$

μ étant égal à mn, u_i à $(\xi\eta)_i$, et l'indice k ajouté à l'expression entre crochets signifiant que dans cette dernière il faut poser $x = x^{(k)}$. C'est là l'équation du théorème de Jacobi ; ce théorème est ainsi conçu :

Soient $f=0$, $\varphi=0$ deux courbes du $n^{ième}$ et du $m^{ième}$ ordre, et $u_\chi^{mn}=0$ l'équation en coordonnées lignes de leurs mn points d'intersection (ayant une situation séparée) ; supposons ensuite que Δ soit défini par l'équation (16), et que U soit une fonction homogène et entière quelconque de l'ordre $n+m-2$, et enfin qu'on ait $\Theta = \Delta U$; relativement aux points d'intersection de $f=0$ et $\varphi=0$, et à deux autres points quelconques ξ, η, existe toujours l'équation (17).

Nous devons encore attirer l'attention sur un cas particulièrement important de ce théorème. Si l'on pose

$$U_x^{n+m-2} = V_x^{n+m-3}.u_x = V^{n+m-3}.(\xi\eta x),$$

il vient aussi, en vertu de $u_\xi = 0$ et $u_\eta = 0$, $\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1} = 0$, et nous obtenons ainsi l'équation [1]

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{i=\mu}\left[\frac{V_x^{n+m-3}.u_x}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right]_i = 0.$$

Cette équation dépend *uniquement* des coordonnées des mn

(1) Pour ce cas, le théorème ci-dessus a été donné par Jacobi : *Theoremata nova algebraica* (*Journal de Crelle*, t. 14, p. 281). L'équation plus générale (17) se trouve dans Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 44. Pour la marche de la démonstration insérée

points d'intersection des courbes f, φ et des coefficients de leurs équations (et non plus des points arbitraires ξ, η), et présente pour cette raison une importance particulière. Son premier membre est, en effet, complètement indépendant de la ligne u, car, pour un point d'intersection de f et φ, on peut toujours poser (comparez p. 140).

$$\rho_i x_k^{(i)} = \left[(a\alpha)_k a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1}\right]_{x=x^{(i)}}.$$

La fonction V_x^{n+m-3} est encore complètement arbitraire; on peut donc composer linéairement toutes les équations possibles (18) avec $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$ d'entre elles, arbitrairement choisies. Mais $V(x^{(i)})$ peut aussi, en vertu de $f(x^{(i)})=0$, $\varphi(x^{(i)})=0$, être remplacé par

$$V(x^{(i)}) + Af(x^{(i)}) + B\varphi(x^{(i)}),$$

A étant du $(m-3)^{\text{ième}}$ ordre et B du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre en $x^{(i)}$, sans que l'équation (18), à laquelle on se réfère, soit changée. On peut donc, en vertu de $f=0$, $\varphi=0$, établir toutes les équations (18) au moyen de

$$\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) - \frac{1}{2}(m-2)(m-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = mn-1$$

d'entre elles.

Au moyen de ces $mn-1$ équations, on peut calculer linéaire-

---

au texte, l'auteur a fait usage de quelques remarques orales de M. GORDAN. L'équation (18) est une extension d'un théorème énoncé p. 203 et suiv. pour une variable binaire x, théorème qui dans la forme homogène exprime que, si $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ sont les racines d'une équation

$$a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = 0,$$

on a l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{V_x^{n-2} u_x}{(au) a_x^{n-1}}\right]_i = 0,$$

V désignant une forme binaire quelconque du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre. Pour ce qui concerne l'extension à un nombre quelconque de variables, *voir* CLEBSCH, *Journal de Crelle*, t. 63, p. 224 et suiv.

ment les rapports des mn grandeurs

$$S_i = \frac{1}{\rho_i} \equiv \left[\frac{u_x}{(a\alpha u)\, a_x^{n-1}\, \alpha_x^{m-1}} \right]_i;$$

mais, d'autre part, on peut, entre mn équations prises dans la totalité des $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$ équations (18), éliminer ces grandeurs, et l'on obtient ainsi un certain nombre de relations entre les coordonnées des points de rencontre de f et φ, relations où les coefficients de f et φ ne figurent plus, et qui par conséquent dépendent *uniquement* des coordonnées en question. Le nombre de ces relations, eu égard à ce que les rapports seuls des mn grandeurs S_i y figurent, est égal à

$$\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) - mn + 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Pour $m = n$, ce résultat concorde avec celui précédemment obtenu, suivant lequel, entre les $2n^2$ coordonnées des n^2 points, doivent exister $(n-1)(n-2)$ relations (p. 121). Mais, pour $m > n$, ces relations ne peuvent pas être indépendantes les unes des autres, car autrement il pourrait arriver que l'on eût

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \geqq 2mn,$$

c'est-à-dire que le nombre des relations surpassât celui des inconnues, ce qui ne peut pas être. Nous avons déjà trouvé que le nombre des équations indépendantes les unes des autres entre les coordonnées des mn points était égal à $mn - 3n + 1$. Toutefois, on doit être porté à demander de déduire directement ce résultat de la nature des relations auxquelles donnent lieu les équations (18) ou de ces dernières équations elles-mêmes; c'est ce qui a été effectivement réalisé par Jacobi [1]; toutefois, nous n'insisterons pas davantage là-dessus.

Ce qui précède est, au premier examen, uniquement vrai pour le cas où les mn points $x^{(i)}$ sont tous séparés. Lorsque les courbes f et φ se touchent en un point $x^{(i)}$, les grandeurs $a_x^{n-1} a_i$ et $\alpha_x^{m-1} \alpha_i$

---

[1] *Voir* son Mémoire, cité p. 121.

en ce point (autrement dit les coordonnées de la tangente commune) deviennent proportionnelles les unes aux autres, et par conséquent le dénominateur du terme qu'elles concernent s'évanouit dans le premier membre de (17), et cette équation cesse au premier abord d'être exacte. Cependant, si nous disposons les choses de telle manière que la fonction U du numérateur s'évanouisse également pour le point de contact et que nous posions pour un instant

$$\Phi_x^{m+n-2} = (a\alpha u)\, a_x^{n-1}\, \alpha^{m-1},$$

la somme des termes du premier membre de (17) qui renferment les points $x^{(i)}$ et $x^{(i)} + dx^{(i)}$ sera

$$\frac{U_x^{m+n-3}\, U_y}{\Phi_x^{m+n-3}\, \Phi_y} + \frac{U_x^{m+n-3}\, U_{dx}}{\Phi_x^{m+n-3}\, \Phi_{dx}} = 2\, \frac{U_x^{m+n-3}\, U_y}{\Phi_x^{m+n-3}\, \Phi_y},$$

y étant un point de la tangente commune aux deux courbes en $x^{(i)}$, de sorte que $dx_k^{(i)} = \sigma x_k + \tau y_k$. De même, dans la somme (17), se présente un terme comptant r fois si les courbes f, φ ont en un point un contact d'ordre $r-1$, et que la courbe U ait en même temps un contact d'ordre $r-2$ avec les deux courbes. Un fait analogue a lieu au cas où l'une des courbes f, φ passe par un point double de l'autre.

Nous nous proposons maintenant de déduire encore le théorème d'Abel des équations (17).

Nous transformerons d'abord les expressions qui figurent au premier membre de (17). Du système de points d'intersection $x^{(i)}$ de la courbe φ avec f, passons au système voisin $x^{(i)} + dx^{(i)}$ qui détermine sur f une courbe $\varphi + \delta\varphi = 0$ voisine de φ. Ici, $\delta\varphi$ sera une expression du $m^{\text{ième}}$ ordre en x_i, expression dont les coefficients sont des grandeurs infiniment petites et doivent être considérés comme des accroissements des coefficients $\alpha_{ikh}\ldots$ de φ. Pour les points $x^{(i)} + dx^{(i)}$ ont lieu par hypothèse les relations

$$(19) \qquad m(\alpha_x^{m-1}\alpha_{dx})_i + \delta\varphi(x^{(i)}) = 0, \quad (a_x^{n-1}a_{dx})_i = 0.$$

Actuellement nous mettrons pour la fonction quelconque U_x^{m+n-2} le produit $\Omega_{n-2}.\delta\varphi$, $\Omega = 0$ étant une courbe adjointe à f et passant par $n-2$ des intersections de u avec f (p. 168). Nous place-

rons ensuite les deux points ξ, η aux deux autres points d'intersection de u avec f, en sorte que

$$f(\xi) \equiv a_\xi^n = 0, \quad f(\eta) \equiv a_\eta^n = 0. \tag{20}$$

Si l'on écrit encore, eu égard à (19), $m\alpha_x^{m-1}\alpha_{dx}$ au lieu de $-\delta\varphi$, qu'on multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme dans le premier membre de (17) par $a_x^{n-1}a_c$, c étant un point quelconque, et qu'on ajoute au numérateur le terme $\Omega . a_x^{n-1}a_{dx} . \alpha_x^{m-1}\alpha_c$, nul en vertu de $a_x^{n-1}a_{dx} = 0$, il vient

$$\left[\frac{U_x^{m+n-2}}{(a\alpha u)a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}}\right]_i = -m\left[\frac{\Omega_x^{n-2}(a_c\alpha_{dx} - \alpha_c a_{dx})a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}}{a_x^{n-1}a_c . (a\alpha u)a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}}\right]_i.$$

Ici nous pouvons encore poser

$$(a\alpha)_k a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1} = \rho x_k,$$

et par là nous obtenons, pour $u_i = (\xi\eta)_i$,

$$\left[\frac{U_x^{m+n-2}}{(a\alpha u)a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}}\right]_i = m\left[\frac{\Omega_x^{n-2}(cx\,dx)}{(\xi\eta x) . a_x^{n-1}a_c}\right]_i; \tag{21}$$

et au second membre figure maintenant une différentielle de troisième espèce, comme dans le théorème d'Abel.

La transformation du second membre de (17) se rattache à l'identité qui existe pour Ω (p. 168), savoir

$$\Omega_x^{n-2}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x) = (\xi\eta\zeta)^2 . f(x) + (\xi\eta x) . \mathrm{N}. \tag{22}$$

Nous avons à remplacer Θ par $\Delta . \Omega . \delta\varphi$, Δ étant défini par l'équation (16). Il vient alors, d'après l'identité précitée,

$$\Theta_x^{2\mu-2}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x) = (\xi\eta\zeta)^2 . f(x) . \Delta(x) . \delta\varphi(x) + (\xi\eta x) . \mathrm{N} . \Delta . \delta\varphi.$$

Mais des équations (15) résulte

$$\Delta(x) f(x) = \mathrm{D}(x) . (\chi x\xi)^\mu - \mathrm{B}(x) . (\chi x\eta)^\mu;$$

et si l'on substitue dans la dernière équation et que l'on forme ensuite la $\mu^{\text{ième}}$ polaire de η pour $x = \xi$ (en d'autres termes, si l'on pose $x = \xi + \lambda\eta$, et qu'on cherche de part et d'autre le coefficient de λ^μ), il vient

$$\binom{2\mu-2}{\mu-1} . \Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}(\xi\eta\zeta)^2 = (\xi\eta\zeta)^2\left[(\chi\eta\xi)^\mu . \mathrm{D}(\xi) . \delta\varphi(\xi) - (\chi\xi\eta)^\mu . \mathrm{B}(\eta) . \delta\varphi(\eta)\right].$$

On a ensuite, d'après (15) et (20),

$$(\chi\eta\xi)^\mu = B(\eta).\varphi(\eta), \quad (\chi\xi\eta)^\mu = D(\xi).\varphi(\xi),$$

et l'on trouve, en conséquence,

$$\binom{2\mu-2}{\mu-1}.\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2}(-1)^{\mu-1} = \frac{\delta\varphi(\eta)}{\varphi(\eta)} - \frac{\delta\varphi(\xi)}{\varphi(\xi)}.$$

Par substitution de cette valeur dans le second membre de (17), on obtient enfin, en vertu de (21),

$$(23) \quad \sum_{i=1}^{i=nm}\left[\frac{\Omega_{n-2}(cx\,dx)}{(\xi\eta x).n.a_x^{n-1}a_c}\right]_i = \frac{\delta\varphi(\eta)}{\varphi(\eta)} - \frac{\delta\varphi(\xi)}{\varphi(\xi)} = d\left[\log\frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)}\right];$$

ce qui n'est autre chose que l'équation différentielle (8) dont, par intégration, le théorème d'Abel s'est déduit sous la figure connue. *Nous avons ainsi fourni la seconde démonstration directe de ce théorème.*

Si, parmi les points $x^{(i)}$, quelques-uns (r par exemple) se rapprochent indéfiniment les uns des autres, r différentielles deviennent égales dans la somme qui figure au premier membre; mais aucune autre particularité ne se présente, car le dénominateur de la différentielle ne devient pas nul, ainsi qu'il arrivait cependant dans le théorème de Jacobi. La raison en est qu'alors par $r-1$ des points voisins passe aussi la courbe $\varphi + \delta\varphi = 0$, et que par suite, pour $U = \Omega.\delta\varphi$, le numérateur s'évanouit toujours au même ordre que le dénominateur, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel de f, φ et u, ce qui s'accorde avec les remarques précédentes concernant l'équation (17) (page 212).

On aperçoit facilement qu'au lieu de l'équation (17) du théorème de Jacobi il suffit d'employer l'équation plus simple (18) si l'on veut établir le théorème d'Abel seulement pour les intégrales de *première* espèce, et conformément à cette observation la démonstration pourra se simplifier si, au préalable, on établit directement l'équation (18). Mais c'est une chose très importante que, *réciproquement, de cette dernière équation on puisse aussi déduire le théorème d'Abel pour les intégrales de troisième*

espèce; c'est à quoi l'on arrive en se basant sur les réflexions suivantes [1].

Dans la démonstration du théorème de Jacobi, l'irréductibilité de la courbe $f \equiv a_x^n = 0$ n'a été supposée nulle part; *l'équation est donc encore vraie lorsque la courbe f ou φ se décompose.* Si nous posons en particulier

$$a_x^n = b_x^p . c_x^q,$$

n étant ainsi égal à $p+q$, il vient

$$n(a\alpha u)a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1} = \alpha_x^{m-1}[pb_x^{p-1}(b\alpha u)c_x^q + qc_x^{q-1}(c\alpha u)b_x^p].$$

Si nous désignons, d'après cela, par $y^{(i)}$ les points d'intersection de $b_x^p = 0$ et $\alpha_x^m = 0$, par $z^{(i)}$ ceux de $c_x^q = 0$ et $\alpha_x^m = 0$, l'équation (18) se transforme en

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=mp}\left[\frac{\mathrm{V}_y^{m+p+q-3}u_y}{c_y^q(b\alpha u)b_y^{p-1}\alpha_y^{m-1}}\right]_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=mq}\left[\frac{\mathrm{V}_z^{m+p+q-3}u_x}{b_z^p(c\alpha u)c_z^{p-1}\alpha_z^{m-1}}\right]_i = 0.$$

Les quotients qui se présentent ici sont complètement indépendants des quantités u_i; on peut donc aussi poser, dans la première somme, $u_i = c_i c_y^{q-1}$, et dans la seconde somme $u_i = b_i b_z^{p-1}$, en sorte qu'il en résulte l'équation

$$(24)\quad q\sum_{i=1}^{i=mp}\left[\frac{\mathrm{V}_y^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)b_y^{p-1}\alpha_y^{m-1}c_y^{q-1}}\right] = p\sum_{i=1}^{i=mq}\left[\frac{\mathrm{V}_z^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)b_z^{p-1}\alpha_z^{m-1}c_z^{q-1}}\right],$$

et, à cause de la symétrie complète qui existe, les deux sommes sont aussi égales à

$$m\sum_{i=1}^{i=pq}\left[\frac{\mathrm{V}_x^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)b_x^{p-1}\alpha_x^{m-1}c_x^{q-1}}\right]_i,$$

(1) *Voir* HARNACK, *Ueber eine Behandlungsweise algebraischer Differentiale in homogenen Coordinaten* (*Math. Annalen,* t. 9, p. 371 et suiv.). L'équation (18) y est obtenue par discussion de l'équation du $mn^{\text{ième}}$ degré qui détermine les valeurs du quotient

$$\frac{\mathrm{V}_x^{m+n-3}u_x}{(a\alpha u)a_x^{n-1}\alpha^{m-1}}$$

aux mn points $x^{(i)}$. Comparer la note 2 de la p. 196.

$x^{(i)}$ désignant les points d'intersection de $b_x^p = 0$ avec $c_x^q = 0$. Or, si l'on choisit en particulier c_x^q égal à $(\xi\eta x) = u_x$, l'équation (24) se transforme en

$$(25) \qquad \sum_{i=1}^{i=mp} \left[\frac{\mathrm{V}_y^{m+p-2}}{(b\alpha u)\, b_y^{p-1}\, \alpha_y^{m-1}}\right]_i = p \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{\mathrm{V}_z^{m+p-2}}{(b\alpha u)\, b_z^{p-1}\, \alpha_z^{m-1}}\right]_i.$$

En partant de là on arrive de nouveau au théorème d'Abel de la manière suivante. Le premier membre se transforme immédiatement en vertu de (21), pour $\mathrm{V} = \Omega_{p-2}\delta\varphi$ (sauf un facteur numérique m), en la somme des différentielles de troisième espèce qui se présentent dans (23), à la seule condition d'y remplacer a_x^n par b_x^p. Mais on peut traiter d'une manière tout à fait analogue le second membre de notre équation en intervertissant seulement les rôles des courbes $b_x^p = 0$ et $u_x = 0$. Il vient alors en premier lieu, si l'on procède comme pour la formation de l'équation (21),

$$(26) \qquad \frac{\mathrm{V}_z^{m+p-2}}{(u\alpha b)\, b_z^{p-1}\, \alpha_z^{m-1}} = -m\, \frac{\Omega_z^{p-2}\,(u_c \alpha_{dz} - \alpha_c u_{dz})\, \alpha_z^{m-1}}{u_c\;(u\alpha b)\, \alpha_z^{m-1}\, b_z^{p-1}},$$

ou, en vertu de $\rho z_k = (u\alpha)_k \alpha_z^{m-1}$,

$$(26)^\star \qquad = m\, \frac{\Omega_z^{p-2}\,(c z dz)}{b_z^p \,.\, u_c};$$

en supposant actuellement $u_z = 0$ et $u_{dz} = 0$. La différentielle qui figure au second membre se réfère donc à la droite $u_z = 0$, au lieu de se référer à la courbe $a_x^n = 0$. Nous pouvons, en conséquence, pour les points de cette droite, introduire une nouvelle variable binaire $\varkappa_1 : \varkappa_2$ au moyen de la substitution

$$z_k = \varkappa_1 \xi_k + \varkappa_2 \eta_k, \quad dz_k = \xi_k d\varkappa_1 + \eta_k d\varkappa_2.$$

Il vient alors, en vertu de l'identité (22) relative à Ω,

$$(\varkappa_1 \Omega_\xi + \varkappa_2 \Omega_\eta)^{p-2} \varkappa_1 \varkappa_2 = (\varkappa_1 b_\xi + \varkappa_2 b_\eta)^p;$$

et le déterminant $(cz dz)$ devenant égal à $(c\xi\eta)(\varkappa_1 d\varkappa_2 - \varkappa_2 d\varkappa_1)$, expression où $(c\xi\eta) = u_c$, la différentielle $(26)^\star$ se transforme en

$$m\, \frac{\varkappa_1 d\varkappa_2 - \varkappa_2 d\varkappa_1}{\varkappa_1 \varkappa_2} = m d \log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}.$$

Nous avons à former la somme de ces différentielles étendue à toutes

les racines de l'équation $(\varkappa_1\alpha_\xi + \varkappa_2\alpha_\eta)^n = 0$. Mais cette somme est égale à

$$(27)\quad md\log\frac{\varkappa_2^{(1)}\varkappa_2^{(2)}\ldots\varkappa_2^{(m)}}{\varkappa_1^{(1)}\varkappa_1^{(2)}\ldots\varkappa_1^{(m)}} = md\log\left[(-1)^m\frac{\alpha_\xi^m}{\alpha_\eta^m}\right] = -md\log\frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)}.$$

Or, comme le facteur numérique m, d'après la transformation indiquée, s'est présenté de la même manière dans le premier membre de (25), nous avons à nouveau obtenu en fait, au moyen de (25), le théorème d'Abel pour les intégrales de troisième espèce.

De même que le théorème de Jacobi, le théorème d'Abel est également vrai pour les courbes décomposables. Ce théorème étant censé connu pour les intégrales qui ne deviennent infinies qu'en des points doubles de f, on peut en déduire son énoncé pour d'autres intégrales sans revenir au théorème de Jacobi. Si l'on pose en effet

$$a_x^n = \beta_x^p\cdot\gamma_x^q,$$

et qu'on désigne par $y^{(i)}$ les points d'intersection de $\alpha_x^m = 0$ et $\beta_x^p = 0$, par $z^{(i)}$ ceux de $\alpha_x^m = 0$ et $\gamma_x^q = 0$, l'équation du théorème d'Abel se transforme immédiatement en

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\left[\frac{\varphi_x^{n-3}(cx\,dx)}{na_x^{n-1}a_c}\right]_i = \sum_{i=1}^{i=mp}\left[\frac{\varphi_y^{n-3}(cy\,dy)}{p\cdot\gamma_y^q\cdot\beta_y^{p-1}\beta_c}\right]_i + \sum_{i=1}^{i=mq}\left[\frac{\varphi_z^{n-3}(cz\,dz)}{q\cdot\beta_z^p\cdot\gamma_z^{q-1}\gamma_c}\right]_i = 0.$$

Une somme de différentielles qui appartiennent à la courbe primitive $\beta_x^p = 0$ et deviennent infinies en quelques-uns [1] *des points d'intersection de cette dernière avec $\gamma_x^q = 0$ se trouve donc ramenée à une somme de différentielles qui appartiennent à la courbe primitive $\gamma_x^q = 0$ et deviennent infinies aux mêmes points d'intersection de cette dernière avec $\beta_x^p = 0$.* Il résultera immédiatement de là pour nous qu'une somme d'intégrales à infinis quelconques, étendue aux points de rencontre de la courbe primitive $\beta_x^p = 0$ avec une courbe $\alpha_x^m = 0$, est représentable par des logarithmes et des fonctions algébriques, ce qui, au surplus, ressort déjà de la réduction précédemment donnée d'une différentielle quelconque à des sommes de différentielles ayant une fonc-

---

[1] Par les autres intersections des deux courbes passe aussi alors la courbe $\Theta = 0$.

tion linéaire au dénominateur (p. 152 et suiv.). Dans le cas actuel, on devra recourir à une décomposition analogue à celle employée alors pour réaliser en fait l'évaluation de la somme d'intégrales. Désignons, en effet, par $u_\xi^{pq}=0$ l'équation des points d'intersection de $\gamma_x^q=0$ avec $\beta_x^p=0$; on a (p. 154)

$$(\psi x\xi)^{pq}=\mathrm{B}\beta_x^p+\mathrm{C}\gamma_x^q,$$

d'où $\dfrac{1}{\gamma_x^q}=\dfrac{\mathrm{C}}{(\psi x\xi)^{pq}}$, en vertu de $\beta_x^p=0$, et par suite aussi

$$\sum_{i=1}^{i=mp}\left[\frac{\varphi_y^{n-3}(cy\,dy)}{p\cdot\gamma_y^q\cdot\beta_y^{p-1}\beta_c}\right]_i=-\sum_{i=1}^{i=pqm}\left[\frac{\varphi_z^{n-3}\mathrm{C}(cz\,dz)}{pq\cdot\beta_z^p\cdot(\psi x\xi)^{pq-1}(\psi c\xi)}\right]_i.$$

Dans le second membre figurent des différentielles qui se rapportent à la courbe $(\psi x\xi)^{pq}=0$ comme courbe primitive. Mais cette dernière se décompose précisément en lignes droites; on peut donc décomposer encore la somme qui est au second membre en une somme de différentielles dont chacune se rapporte à *une* seulement de ces pq droites, et peut conséquemment être évaluée directement par l'introduction d'une variable binaire, ainsi qu'il a été fait récemment pour les différentielles de troisième espèce. On arrive ainsi naturellement à un résultat identique à celui donné par une décomposition de l'expression qui figure au premier membre en fractions simples.

Considérons encore comme application du principe développé ici le cas particulier où la courbe primitive se décompose en trois lignes droites, telles que $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. Pour ses points d'intersection $x^{(i)}$ avec $\alpha_x^m=0$, nous obtenons alors

$$\sum_{i=1}^{i=3m}\left[\frac{(cx\,dx)}{x_1x_2c_3+x_2x_3c_1+x_3x_1c_2}\right]_i$$

$$=\sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{(y\,dy)_1}{y_2y_3}\right]_i+\sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{(z\,dz)_2}{z_3z_1}\right]_i+\sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{(t\,dt)_3}{t_1t_2}\right]_i=0,$$

relation où l'on a désigné par $y^{(i)}$ les points de rencontre de $\alpha_x^m=0$ avec $x_1=0$, par $z^{(i)}$ ceux avec $x_2=0$, par $t^{(i)}$ ceux avec $x_3=0$.

Il vient alors, semblablement à ce qui arrivait pour l'équation (26),

$$\sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{(y\,dr)_1}{y_2 y_3}\right]_i = d\log\frac{y_3^{(1)}y_3^{(2)}\cdots y_3^{(m)}}{y_2^{(1)}y_2^{(2)}\cdots y_2^{(m)}} = d\log\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)^m.$$

On trouve de même pour les sommes qui répondent aux lignes $x_1=0$, $x_2=0$ les valeurs respectives

$$d\log\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^m \quad \text{et} \quad d\log\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^m.$$

Mais l'intégrale de la somme de ces trois valeurs est égale à $\log(-1)^m = mi\pi$, et par conséquent existe la relation

$$(28)\qquad \frac{y_3^{(1)}y_3^{(2)}\cdots y_3^{(m)}}{y_2^{(1)}y_2^{(2)}\cdots y_2^{(m)}}\,\frac{z_1^{(1)}z_1^{(2)}\cdots z_1^{(m)}}{z_3^{(1)}z_3^{(2)}\cdots z_3^{(m)}}\,\frac{t_2^{(1)}t_2^{(2)}\cdots t_2^{(m)}}{t_1^{(1)}t_1^{(2)}\cdots t_1^{(m)}} = (-1)^m.$$

Cette équation se confond avec la proposition appelée *théorème de Carnot,* proposition que l'on énonce habituellement sous la forme suivante :

Si $y_3^{(i)}:y_2^{(i)}$, $z_1^{(i)}:z_3^{(i)}$, $t_2^{(i)}:t_1^{(i)}$ *sont les rapports de distances des points d'intersection d'une courbe du* $m^{\text{ième}}$ *ordre avec les côtés d'un triangle aux sommets de ce triangle, entre ces rapports de distances existe la relation* (28).

Des propositions analogues ont lieu pour les points de rencontre de la courbe avec un nombre quelconque de droites [1].

Enfin faisons encore observer que du théorème d'Abel établi pour les intégrales de troisième espèce on peut aisément déduire le *théorème d'Abel relatif aux intégrales de deuxième espèce* par application du procédé $\sum \frac{\partial}{\partial \xi_i}\zeta_i$ (p. 171); à la place des logarithmes interviennent alors dans le second membre des fonctions algébriques. Mais nous n'insisterons pas davantage là-dessus.

Ici se présente naturellement la question suivante, dont nous avons déjà dit quelques mots plus haut : La réciproque du théo-

---

[1] On les démontre d'ailleurs algébriquement par une méthode élémentaire. (*Voir* la *Géométrie de position* de CARNOT, ainsi que la note de la p. 120).

rème d'Abel est-elle vraie, c'est-à-dire peut-on toujours conclure des équations (8) ou de leurs p équations intégrales

$$\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(\mu)}}^{x^{(\mu)}} du_h = 0$$

$$(h = 1, 2, 3 \ldots p)$$

que les μ points $x^{(i)}$ sont situés tous ensemble sur une courbe adjointe? Observons ici que μ n'est pas nécessairement divisible par n, car, d'après ce qui précède, tous les points d'intersection qui sont situés en même temps sur la courbe qui détermine les limites inférieures disparaissent. Or, comme par $mn - \Sigma\alpha_i i(i-1) - p$ points quelconques on peut toujours faire passer une courbe adjointe du $m^{\text{ième}}$ ordre, notre question revient au fond à celle de savoir si, par les équations du théorème d'Abel relativement aux intégrales de première espèce [1], p points sont en général déterminés sans ambiguïté par les autres. Or il en est effectivement ainsi, comme l'apprend l'examen du problème de l'*inversion des intégrales abéliennes appelé problème de Jacobi*. Ce dernier peut se formuler de la manière suivante [2].

Soient données les p équations

$$(29) \quad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_1 = v_1, \quad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_2 = v_2, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_p = v_p,$$

les quantités $v_1, v_2, \ldots, v_p$ étant des constantes indépendantes les unes des autres (savoir les sommes intégrales négatives s'éten-

---

[1] Pour ce qui concerne les questions correspondantes relativement aux intégrales de troisième espèce, *voir* plus loin la Section sur les systèmes de points d'intersection des courbes non adjointes.

[2] Il a été ainsi énoncé (quoique non résolu) par Jacobi pour les intégrales hyperelliptiques (*Journal de Crelle*, t. 9 et 13). Il diffère du problème d'inversion de Riemann, où l'on se propose de déterminer une limite supérieure, les valeurs v_h des p intégrales u_h étant données pour cette limite supérieure, et qui dérive de celui de Jacobi si l'on fait coïncider $p-1$ des points $x^{(i)}$ avec les points correspondants $c^{(i)}$. Ce problème n'est naturellement résoluble que si entre les grandeurs v_h existent $p-1$ relations d'une certaine espèce. (*Voir* sur ce sujet C. Neumann, *loc. cit.*, p. 393 et suiv., et p. 514, Prym, *loc. cit.*)

dant aux $\mu - p$ autres points connus) et les quantités $c^{(i)}$ désignant des points quelconques fixés une fois pour toutes, points qui peuvent de toutes les manières possibles se confondre totalement ou partiellement en un seul : on demande de déterminer les p limites supérieures $x^{(i)}$ comme fonctions des grandeurs données v_h [1].

La solution effective de ce problème est en dehors de nos considérations; elle s'effectue, d'après Riemann, à l'aide des fonctions Θ [2].

On résout le problème par l'intermédiaire d'intégrales de troisième espèce en développant d'abord une méthode au moyen de laquelle une somme de p intégrales normales de troisième espèce ayant les mêmes limites $c^{(i)}$ et $x^{(i)}$ est représentable comme fonction des grandeurs données $v_1, v_2, \ldots, v_p$ [3]. Pour déterminer les p points $x^{(i)}$, on peut d'abord déterminer les p rayons d'un faisceau $u_x - \lambda v_x = 0$ qui passent par ces points, c'est-à-dire établir l'équation du $p^{\text{ième}}$ degré en λ qui détermine ces rayons. Si l'on cherche alors les rayons correspondants d'un second faisceau, on peut trouver les points $x^{(i)}$, comme étant leurs points d'intersection, par des équations linéaires. Il est à remarquer que les rayons précités du second faisceau peuvent se déterminer rationnellement (et pour préciser au moyen d'équations linéaires) si ceux du premier sont connus. Il s'agit donc de déter-

---

[1] *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 138. Dans les p équations (29), à la même limite supérieure $x^{(i)}$ répond toujours la même limite inférieure $c^{(i)}$. C'est là une différence avec la méthode de Riemann pour déterminer les limites inférieures; Riemann, en effet, emploie toujours dans la même somme, quand même les limites supérieures sont différentes, une même limite inférieure, et au contraire dans chacune des p sommes d'autres limites inférieures. (*Voir* RIEMANN, *op. cit.*, § 15 et 16.)

[2] *Voir* RIEMANN, *loc. cit.*, § 17 et 22. La théorie de ces fonctions se trouve en détail dans RIEMANN, *Theorie der Abel'schen Integrale,* Leipzig, 1865, p. 28 et suiv., et p. 442 et suiv. Il est à remarquer que la définition donnée par Riemann des fonctions Θ s'écarte de celle que l'on trouve dans CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 93, en ce que les arguments diffèrent d'un facteur numérique $\frac{1}{2}$, ce qui a sa raison dans le choix différent des modules normaux de périodicité des intégrales de première espèce. (*Voir* plus haut, p. 185.)

[3] *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 138-200.

miner la valeur de la fonction algébrique $\frac{u_x}{v_x}$ aux p points $x^{(i)}$ par une équation de degré p. On peut encore généraliser le problème en considérant, au lieu de $\frac{u_x}{v_x}$, le quotient $\frac{\varphi}{\psi}$, dont le numérateur et le dénominateur doivent être du même ordre, autrement dit en cherchant les courbes du faisceau $\varphi - \lambda\psi = 0$ qui passent par les points $x^{(i)}$. Les valeurs que prend $\frac{\varphi}{\psi}$ en ces derniers points se détermineront alors par une équation algébrique

$$(30) \qquad \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^p + M_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-1} + M_2\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-2} + \ldots + M_p = 0,$$

dont les coefficients M_i sont des fonctions à déterminer des sommes d'intégrales v_h, et il suffit de connaître les racines relatives à une fonction $\frac{\varphi}{\psi}$ pour pouvoir calculer les racines relatives à toute autre fonction $\frac{\varphi'}{\psi'}$ (comme dans le faisceau de rayons $u - \lambda v$).

Ces fonctions M_i *ou plus généralement les fonctions symétriques des p valeurs que prend une fonction homogène de dimension nulle aux p différents points sont appelées fonctions abéliennes des arguments* v *définis par* (29) [1]. *Ce sont des fonctions* $2p$ *fois*

---

[1] Ce sont d'autres grandeurs que Riemann (dans ses Leçons) a désignées sous le nom de *fonctions abéliennes*. Soient $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p-1)}$ $p-1$ points dans lesquels la courbe primitive est touchée par une courbe adjointe C_{n-3}, ce qui, en général, ne peut se produire qu'en un nombre fini de systèmes de points, et soit $\varphi = 0$ l'équation de cette courbe C_{n-3}, $\psi = 0$ l'équation d'une autre courbe C_{n-3} de même espèce ayant pour points de contact $y^{(i)}$; le quotient $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$ est proportionnel à un quotient de fonctions Θ dont les arguments ne diffèrent des grandeurs

$$v_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_z^{x^{(i)}} du_h + \int_z^{\eta} du_h - \int_z^{x} du_h,$$

$$w_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_z^{y^{(i)}} du_h + \int_z^{\eta} du_h - \int_z^{x} du_h,$$

où η et z sont des points choisis arbitrairement, que par une constante. Les rapports $\sqrt{\varphi} : \sqrt{\psi}$ ainsi formés, comme aussi les quantités $\sqrt{\varphi}$ et $\sqrt{\psi}$ elles-mêmes, sont

périodiques de ces grandeurs, puisque les p intégrales de première espèce (d'après ce qui a été dit, p. 186) ont $2p$ systèmes de modules de périodicité, que par suite les grandeurs v peuvent être augmentées d'une manière quelconque de semblables périodes et que, pour préciser, v_h peut l'être de

$$2m_h\pi i + a_{1h}q_1 + a_{2h}q_2 + \ldots + a_{ph}q_p$$

sans que l'équation (30) soit par là modifiée.

Actuellement l'introduction des intégrales de troisième espèce se fait de la manière suivante. Considérons la somme de p intégrales $\Pi_{\xi\eta}$ conduites entre les mêmes limites $c^{(i)}$, $x^{(i)}$ et ayant deux infinis ξ, η. Cette somme

$$(31)\qquad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = \mathfrak{T}_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(p)} \\ c^{(1)}\,c^{(2)}\ldots c^{(p)} \end{pmatrix}$$

se présentant comme fonction symétrique des limites supérieures, et les fonctions symétriques de ces dernières ayant déjà été considérées comme fonctions des quantités v, peut être aussi considérée comme fonction de ces mêmes quantités, ainsi qu'il sera expliqué plus en détail incessamment. Et c'est à la représentation effective de cette fonction $\mathfrak{T}_{\xi\eta}$ que peut se ramener le problème de l'inversion. Les coefficients de l'équation (30) peuvent en effet s'exprimer de la façon suivante par les fonctions $\mathfrak{T}$.

Nous mettrons, dans l'équation (9) du théorème d'Abel (p. 200 et 202, note), à la place de ξ successivement $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$; à la place de η successivement $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(p)}$; nous prendrons ensuite, au lieu de la courbe $\varphi = 0$, une courbe quelconque du faisceau $\varphi - \lambda\psi = 0$, et nous désignerons par $\eta^{(i)}$ les points d'intersection de $f = 0$ avec $\psi = 0$ qui ne sont pas situés en même temps sur $\varphi = 0$, par $\xi^{(i)}$ les points d'intersection de $\varphi - \lambda\psi = 0$ avec $f = 0$ qui ne sont pas situés sur φ et ψ. Nous obtenons alors, en vertu du théorème d'Abel et de la proposition sur la permuta-

---

alors *des fonctions abéliennes des grandeurs* v_h, w_h, dans le sens de Riemann. (*Voir,* sur ce sujet, Roch, *Journal de Crelle,* t. 66, p. 104, et Riemann, *Gesammelte Werke,* Leipzig, 1876, p. 456.)

tion du paramètre et de l'argument (p. 187 et suiv.), les équations qui suivent :

$$(32)\left\{\begin{array}{l}\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(1)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(1)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}},\\ \log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(2)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(2)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(p)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(p)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(p)}}^{x^{(p)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}}.\end{array}\right.$$

Les points $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sont coordonnés l'un à l'autre comme le prescrit le théorème d'Abel (p. 201), et les sommes qui figurent au second membre se rapportent aux couples d'intersection ainsi formés. Les contours d'intégration sont également régis par ce même théorème : ils ne sont donc éventuellement pas les mêmes que ceux qui se présentent dans les équations (29), et au contraire fourniraient, au lieu des quantités v_h, des sommes d'intégrales v'_h qui diffèrent des v_h par des modules de périodicité. Mais les sommes du second membre ne varient (p. 187), par changement du chemin d'intégration, que de multiples de l'expression $\sum_i\int_{\eta^{(i)}}^{\xi^{(i)}} du_h$ (abstraction faite de la période $2i\pi$ qui se présente également dans le premier membre) ; et ces dernières sommes s'évanouissent, d'après le théorème d'Abel, puisque ξ, η sont des systèmes de points d'intersection pouvant être ramenés directement les uns aux autres par variation continue de la constante λ. Il n'est donc pas nécessaire d'y avoir égard.

Si l'on ajoute maintenant les équations (32) et qu'on passe des logarithmes aux nombres, on trouve, en vertu de (31),

$$(33)\qquad \prod_{i=1}^{i=p}\frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}-\lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}}-\lambda}=e^{-\sum\limits_i \mathfrak{T}_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}}\left(\begin{smallmatrix}x^{(1)}\,x^{(2)}\dots x^{(p)}\\ c^{(1)}\,c^{(2)}\dots c^{(p)}\end{smallmatrix}\right)},$$

et dans cette équation est contenue la solution de notre problème dès que les fonctions $\mathfrak{T}$ sont encore exprimées par les quantités v.

Si l'on pose en effet

$$\mathrm{M} = \left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(1)}} - \lambda\right]\Big[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(2)}}\lambda - \Big)\cdots\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(p)}} - \lambda\right]e^{-\sum \varpi_{\xi\eta}\left(\frac{x}{c}\right)},$$

M ne renfermant en dehors des constantes (car nous avons assigné à la grandeur λ une valeur quelconque) que des fonctions ϖ, on peut aussi écrire l'équation (33), eu égard aux coefficients M_i de l'équation (30), sous la forme

$$\lambda^p + \mathrm{M}_1\lambda^{p-1} + \ldots + \mathrm{M}_p = \mathrm{M}.$$

Il suffit de former cette équation p fois successivement pour autant de différentes valeurs de λ pour obtenir un nombre égal d'équations avec M_i pour inconnues, et l'on peut alors, au moyen de ce système d'équations linéaires, exprimer ces dernières quantités par les fonctions ϖ. *Les coefficients de l'équation de degré p dont les racines sont les p fonctions $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}$ deviennent conséquemment des combinaisons rationnelles des différentes transcendantes $e^{\varpi_{\xi\eta}}$.*

Il ne s'agit donc plus que d'une étude plus approfondie de la fonction $\varpi_{\xi\eta}$, et la théorie des fonctions abéliennes fait voir que cette fonction est représentable par les fonctions Θ dont les arguments dépendent essentiellement des grandeurs données v_h et de certaines constantes. Pour la détermination de ces constantes, il est avantageux de choisir, au lieu des grandeurs $c^{(i)}$, d'autres grandeurs $\alpha^{(i)}$ définies de la manière suivante : Menons en un point quelconque μ la tangente à $f = 0$; cette tangente coupe encore f en $n - 2$ points; faisons passer par ces derniers une courbe adjointe du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre tangente à $f = 0$ en tous les points où elle rencontre f, c'est-à-dire en p points. Pour chaque point μ, on peut trouver 2^{2p} courbes de cette espèce C_{n-2}, comme nous le verrons plus tard; mais parmi elles il en est une qui se trouve désignée d'une façon complètement déterminée pour les limites inférieures (elle dépend du choix du système canonique de sections transverses de la surface de Riemann employé pour la définition des périodes a_{ik}, p. 181 et suiv.); nous désignerons ses points de contact par $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(p)}$. En substituant ces points aux points $c^{(i)}$ dans les équations (29) du problème d'inversion et écrivant en

même temps ω_h au lieu de v_h, en sorte que, pour $h = 1, 2, \ldots, p$, on ait

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = \omega_h \left(\equiv v_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} du_h \right),$$

on trouve le résultat suivant (¹) :

$$(35) \qquad \mathfrak{T}_{\xi\eta}\left(\frac{x}{c}\right) = \log \frac{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)}{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)},$$

en sorte que l'équation (33) se transforme en

$$(36) \qquad \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha^{(i)}} - \lambda} = \prod_{\xi\eta} \frac{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)}{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)},$$

la fonction Θ étant définie par la série p fois infinie

$$\Theta(w_h) = \Theta(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \sum_{r_1=-\infty}^{r_1=+\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{r_2=+\infty} \cdots \sum_{r_p=-\infty}^{r_p=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum_h \sum_k r_h r_k a_{kh} + \sum_i r_i w_i}.$$

La solution du problème est donnée dans l'équation (36), ainsi qu'il ressort des explications précédentes. Maintenant, à la place des $\alpha^{(i)}$ et des ω_h, on peut réintroduire les grandeurs $c^{(i)}$ et v_h.

(¹) *Voir* Clebsch et Gordan, *loc. cit.* On peut aussi établir ces formules et, en particulier, la détermination des arguments des fonctions Θ, par les points μ et $\alpha^{(i)}$, au moyen des principes de Riemann, en faisant usage de ce qui est dit au § 25 des *Fonctions abéliennes* de Riemann; consulter sur ce point Weber, *Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale* (*Journal de Crelle*, t. 70), et Fuchs, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen* (*ibid.*, t. 73, p. 306). Pour $p = 2$, la formule correspondante a déjà été établie par Roch, *ibid.*, t. 65, p. 42, suivant la marche indiquée par Weber; *voir* aussi pour ce cas Brill, *ibid.*, p. 275.

Car si l'on pose

$$(37)\qquad k_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{c^{(i)}} du_h,$$

en sorte que

$$\omega_h = v_h + k_h,$$

on a naturellement aussi, comme dans (36),

$$(38)\qquad \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha^{(i)}} - \lambda} = \prod_{\xi\eta} \frac{\Theta\left(k_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)}{\Theta\left(k_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)};$$

et, en divisant le premier membre de (38) par celui de (36), on obtient de nouveau le premier membre de l'équation (33). *Les grandeurs ω_h et k_h qui interviennent dans les arguments de la fonction Θ sont ici définis par les équations* (34) *et* (37); *et les $\alpha^{(i)}$ sont les points de contact d'une courbe déterminée comprise parmi les 2^{2p} courbes du $(n-2)^{ième}$ ordre* (¹) *qui passent par les $n-2$ autres points de rencontre de la tangente menée en μ à $f=0$, et touchent en outre la courbe $f=0$ en p points.*

Dans un système de points d'intersection, p points, comme on sait, ne sont pas déterminés par les autres si le système est découpé par une courbe adjointe du $(n-3)^{ième}$ ordre, et cette circonstance doit aussi se présenter dans le problème de l'inversion, ce dernier ne pouvant plus alors donner de résultat. En effet, dans ce cas, les fonctions Θ employées s'annulent identiquement, c'est-à-dire indépendamment des points ξ, η qui entrent dans les limites supérieures de leurs arguments, car il existe une proposition (²) d'après

(¹) Le choix à faire parmi ces courbes dépend du système de modules normaux de périodicité que l'on prend pour base, c'est-à-dire de la manière dont on choisit le système canonique de sections sur la surface de Riemann (p. 183). A chaque système semblable de périodes correspond, μ étant donné, *une* des courbes C_{n-2}, dont il s'agit, et réciproquement; *voir* sur ce sujet Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 314 et 331, ainsi que Fuchs, *loc. cit.*, et pour $p=2$ la Section XI de ce Chapitre.

(²) *Voir* Riemann, § 22 et 23; Clebsch et Gordan, p. 206.

laquelle, en supposant les arguments w déterminés comme dans (35), la fonction $\Theta(w)$ considérée comme fonction de ξ s'annule aux points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$, c'est-à-dire pour $\xi = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$; elle devient conséquemment nulle si les p arguments w_h ont la forme (pour $\xi = x^{(p)}$ par exemple)

$$(39)\qquad w_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

$x^{(1)}, \ldots, x^{(p-1)}$ étant des points *entièrement arbitraires,* tandis que les $\alpha^{(i)}$ dépendent de μ. Si maintenant les points $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}$ sont situés avec $p-2$ autres points $x^{(p+1)}, \ldots, x^{(2p-2)}$ sur une courbe adjointe C_{n-3}, cette dernière forme, ensemble avec la tangente de μ une adjointe C_{n-2}. Par $n-2$ intersections de cette dernière avec f (savoir les $n-2$ intersections restantes de la tangentes en μ) passe aussi la courbe C_{n-2} qui est tangente aux points $\alpha^{(i)}$. On a donc, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-2} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p-1)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0,$$

et les arguments w_h prennent en conséquence la forme

$$w_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\xi}^{\mu} du_h = - \sum_{i=1}^{i=p-2} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p-1)}}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h.$$

Mais, à cause de $\Theta(w_h) = \Theta(-w_h)$, la forme des arguments concorde précisément avec la forme (39), car, à part le signe, on n'a fait que mettre ξ à la place de $x^{(p-1)}$, ce qui est indifférent, puisque la position des $p-1$ points $x^{(i)}$ dans (39) était complètement arbitraire. *La fonction* $\Theta\left(\omega_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right)$ *s'évanouit donc identiquement (c'est-à-dire indépendamment de* ξ*) lorsque les* p *points* $x^{(i)}$ *des équations* (29) *sont situés avec* $p-2$ *autres points sur une courbe adjointe du* $(n-3)^{\text{ième}}$ *ordre, et que les quantités* ω_h *sont définies par* (34).

Le problème de l'inversion devient alors indéterminé, et il faut supposer connu un autre $(p-1)^{\text{ième}}$ point pour pouvoir déterminer

encore sans ambiguïté les $p-1$ points restants. D'autres particularités se présentent encore si les points $x^{(i)}$ sont découpés par une courbe adjointe dont l'ordre est inférieur à $n-3$, les dérivées de la fonction Θ par rapport à w_h s'annulant alors jusqu'à un certain ordre; mais nous n'entrerons pas davantage dans l'examen du sujet (1).

IX. — Les courbes de contact. — Les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre (2).

Tandis que le théorème d'Abel apprend à exprimer dans des formules simples l'objet du *théorème du reste* (p. 193), la possibilité et la déterminabilité du problème d'inversion permettent une série d'autres applications géométriques dont les résultats (tant qu'il s'agit de questions relatives à la géométrie du nombre) peuvent s'établir aussi par voie purement algébrique si l'on fait usage du principe de correspondance précédemment traité (t. II, p. 146 et suiv.). Ces applications, de même que celles données plus haut pour le cas de $p=1$, c'est-à-dire pour la théorie des fonctions elliptiques (t. II, p. 355 et suiv.), ont pour point de départ le problème de la division, et montrent comment les solutions de certaines équations algébriques qui se présentent dans la Géométrie peuvent être représentées d'une manière simple à l'aide de la division des fonctions abéliennes. Le fait a une valeur d'autant plus grande que les relations particulières, ou autrement dit *les groupements des racines entre elles*, seront, par cette méthode, mis parfaitement en lumière, tandis que le principe de correspondance ne fournirait d'abord que le *nombre* des solutions, et qu'il faudrait encore faire une application compliquée des théorèmes sur les systèmes de points d'intersection pour étudier le groupement. Nous traiterons d'abord le problème suivant, dans lequel nous supposerons que la courbe $f=0$ soit d'ordre n et de genre p, et

---

(1) *Voir* RIEMANN, *Ueber das Verschwinden der* Θ *Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 65), et *Theorie der Abel'schen Functionen*, § 14 et 16.

(2) *Voir*, pour les matières traitées dans cette Section, CLEBSCH, *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie* (*Journal de Crelle*, t. 63, p. 189 et suiv.).

qu'elle ait α_i points multiples d'ordre i sans qu'entre leurs modules existent des relations spéciales.

Soit $m > n - 3$, *et soient* $mn - \Sigma\alpha_i i(i-1) - pr$ *points donnés d'une façon quelconque sur la courbe primitive; on demande de faire passer par ces points une courbe adjointe du* $m^{\text{ième}}$ *ordre ayant en* p *points un contact d'ordre* $r-1$ *avec la courbe primitive.*

Nous poserons, pour abréger,

$$mn - \Sigma\alpha_i i(i-1) - pr = \lambda. \tag{1}$$

Soient maintenant $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(p)}$ les points où la courbe primitive $f = 0$ a un contact de l'ordre $r-1$ avec une courbe adjointe C_m. Supposons en outre que cette dernière courbe passe en outre par certains points $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(\lambda)}$. Nous prenons cette courbe unique comme connue [1]; notre problème consiste alors à faire passer par les λ points donnés $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\lambda)}$ une autre courbe adjointe C_m ayant avec $f = 0$ en p points un contact d'ordre $r-1$, ou, en d'autres termes, à trouver les points de contact $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}$ de celle-ci. Or ces derniers, d'après le théorème d'Abel, satisfont aux p équations transcendantes

$$r\sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = 0 \tag{2}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, p),$$

quelques-uns des termes de la seconde somme disparaissant si quelques-uns des points $x^{(i)}$ devaient coïncider avec les points $a^{(i)}$; cette circonstance peut toujours se présenter sans que les explications suivantes en soient influencées. Si l'on entend par intégrales de cette seconde somme les valeurs que lesdites intégrales prennent sur des contours d'intégration *arbitrairement* choisis, on peut, dans le second membre de (2), remplacer la valeur zéro par le système le plus général de modules de périodicité

---

[1] Cela est permis, parce que l'existence de semblables courbes résulte d'une simple numération de constantes. Nous n'introduisons d'ailleurs cette courbe que pour faciliter la désignation des termes constants qui entrent dans le théorème d'Abel.

P_h de l'intégrale u_h, P_h satisfaisant à la relation

$$(3)\qquad P_h = 2m_h i\pi + q_1 a_{1h} + q_2 a_{2h} + \ldots + q_p a_{ph},$$

et il nous faut faire cette substitution si nous voulons avoir tous les systèmes de points $y^{(i)}$. On trouve, en divisant par r (¹),

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \frac{1}{r} P_h$$
$$(h = 1, 2, \ldots, p),$$

relation où, au second membre, ne figurent que des grandeurs connues, en sorte que ces équations sont celles du problème de l'inversion, problème qui est en général résoluble pour $m > n - 3$, quelle que puisse être la nature des grandeurs ν_h qui entrent dans les équations (29) (p. 220). On voit aussi par là que, par un choix déterminé des modules de périodicité P_h, le système des p points $y^{(i)}$, et conséquemment aussi la courbe de contact cherchée, peut être déterminé *sans ambiguïté* au moyen du problème de l'inversion. Mais les points obtenus $y^{(i)}$ ne varient pas si l'on augmente ou si l'on diminue simultanément les quantités P_h de r fois un système de modules de périodicité, car, dans cette circonstance, les valeurs des fonctions Θ que l'on a à employer dans le problème de l'inversion ne subissent absolument aucune modification. Il suffit donc, pour obtenir toutes les courbes de contact possibles, d'assigner aux nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $q_1, q_2, \ldots, q_p$, qui entrent dans les fonctions P_h, les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$. On obtient ainsi r^{2p} systèmes de grandeurs P_h et conséquemment aussi un nombre pareil de courbes de contact : *Le problème proposé a r^{2p} solutions* (²). Parmi les courbes de contact trouvées est

---

(¹) Si l'on voulait choisir autrement les limites inférieures $c^{(i)}$, les seconds membres de ces équations ne varieraient que de quantités constantes. Soient, par exemple, $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(rp)}$ les autres points de rencontre d'une courbe C_m passant par les points $a^{(i)}$, et soit z un point quelconque de la courbe, on obtiendrait, à la place de (2),

$$r \sum_{i=1}^{i=p} \int_z^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=rp} \int_{c^{(i)}}^{z} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = 0.$$

(²) On peut effectuer par extraction de racines la résolution de l'équation du

encore en particulier comprise celle supposée connue qui est tangente aux points $c^{(i)}$. On l'obtient en attribuant simultanément à tous les nombres m_i, q_i la valeur zéro.

Les r^{2p} systèmes correspondants de chacun p points de contact y occupent les uns par rapport aux autres une situation très digne d'attention. Si l'on distingue par l'addition d'indices supérieurs r systèmes de l'espèce en question choisis arbitrairement (en sorte que les points de ces systèmes soient respectivement désignés par $y^{(1i)}, y^{(2i)}, \ldots, y^{(ri)}$, et les valeurs correspondantes P_h par $P_h^{(1)}, P_h^{(2)}, \ldots, P_h^{(r)}$), et que l'on ajoute les expressions correspondantes (4), on obtient, pour $h = 1, 2, \ldots, p$,

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(1i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(2i)}} du_h + \ldots + \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(ri)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \equiv \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{i=r} P_h^{(i)}.$$

Si donc on détermine les nombres m, q qui entrent dans les quantités P_h de telle façon que

$$(6)\quad \begin{cases} m_h^{(1)} + m_h^{(2)} + \ldots + m_h^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}, \\ q_h^{(1)} + q_h^{(2)} + \ldots + q_h^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}, \end{cases}$$

on peut poser zéro au lieu du second membre de (5), et cette équation exprime alors que les r systèmes de points de contact y sont situés avec les points donnés x sur une courbe adjointe du $m^{\text{ième}}$ ordre. Il est visible, d'après (6), que, parmi les r systèmes, $r - 1$ peuvent être choisis arbitrairement, le $r^{\text{ième}}$ se déterminant conformément aux lois du problème d'inversion de Jacobi. On a, par suite, ce théorème :

Si l'on fait passer une courbe adjointe du $m^{\text{ième}}$ ordre par les

---

degré r^{2p} correspondante, si l'on considère comme résolu un *problème spécial de division en parties égales*, qui prend naissance lorsque dans (4) on fait coïncider les a avec les x, d'une façon analogue à ce qui se produit pour les fonctions elliptiques. (*Voir* Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 235 et suiv.) Dans des cas particuliers (par exemple pour des courbes à modules spéciaux), il peut se présenter un nombre infini de solutions. Il résulte en particulier du théorème du texte qu'il existe r^{2p} courbes d'ordre $n - 2$ passant par les autres $n - 2$ points d'intersection d'une tangente de f et touchant encore cette dernière courbe en p points (p. 225). Mais nous verrons plus tard que certaines de ces courbes C_{n-2} se décomposent en la susdite tangente et en une courbe C_{n-3}.

λ points donnés et par $r-1$ systèmes de points de contact, cette courbe passe encore par un $r^{\text{ième}}$ système (¹).

Dans le problème précédent, nous ferons, parmi les points donnés dont le nombre sera supposé supérieur à μr (μ étant un nombre entier), coïncider μ fois r points, en sorte que les autres $\lambda-\mu r$ points soient seuls donnés; alors se présente le problème indéterminé qui suit : *Une courbe adjointe d'ordre m doit passer par $\lambda-\mu r = mn - \Sigma\alpha_i i(i-1)-(p+\mu)r$ points donnés sur la courbe primitive du $n^{\text{ième}}$ ordre, et avoir, en outre, en $p+\mu$ points un contact d'ordre $r-1$ avec cette courbe.*

Ce problème est, en général, pour le cas de $m > n-3$, résoluble comme le précédent; μ points de contact restent encore arbitraires, mais les p autres sont alors déterminés (d'après le problème d'inversion de Jacobi). On peut donc faire passer par les points donnés un nombre μ fois infini de courbes de l'espèce cherchée, et encore r^{2p} différents si μ points de contact sont pris arbitrairement. Si l'on part, dans ce dernier cas, de l'une des r^{2p} courbes, pour laquelle le système de périodes qui figure dans les équations (4) sera supposé avoir la valeur P'_h, et qu'on fasse prendre successivement sur la courbe primitive aux μ points arbibitrairement choisis toutes les positions possibles (le nombre de celles qui sont différentes étant infini d'ordre μ), on obtient ∞^{μ} autres courbes de contact, et à toutes celles-ci répond, dans les équations (4), le *même* système de périodes P'_h. Et, par la variation des μ points en question, on ne peut arriver à aucune autre courbe qui soit donnée par un autre système de périodes; car ces derniers systèmes sont complètement distincts, et caractérisés indépendamment des μ points mobiles. Toutes les courbes que l'on peut ainsi déduire par un procédé continu forment ce qu'on ap-

(¹) Il se peut que, par suite de situations spéciales des λ points donnés, plusieurs des premiers systèmes coïncident par groupes; mais il peut aussi arriver que le $r^{\text{ième}}$ système se confonde avec l'un des premiers. Cette dernière circonstance se produit toujours au cas de $r=2$, parce que p points d'intersection sont précisément déterminés par les autres; on ne peut donc plus faire passer par les λ points et par l'un des r^{2p} systèmes qu'une *seule* courbe adjointe. Cette courbe *unique* est précisément alors la courbe de contact trouvée. Si μ systèmes se confondent, la nouvelle courbe C_m a, aux points dont il s'agit, un contact d'ordre $\mu-1$ avec $f=0$.

pelle un système de courbes de contact [1]. Nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

On peut, pour $m > n - 3$, déterminer un nombre infini de courbes adjointes du $m^{\text{ième}}$ ordre ayant, avec la courbe primitive de la question, un contact d'ordre $r - 1$ en $p + \mu$ points, le reste des points d'intersection étant supposé connu et μr étant égal ou inférieur à $mn - \Sigma \alpha_i i(i-1) - rp$. Ces courbes se partagent en r^{2p} systèmes, complètement séparés, *et tels qu'il est impossible d'arriver d'une façon continue d'une courbe d'un système à une courbe d'un autre système en ne passant que par des courbes de contact.*

Soit maintenant donnée une courbe adjointe d'ordre m ayant, en $p + \mu$ points $c^{(i)}$, un contact d'ordre $r - 1$, et passant par $\lambda - \mu r$ points fixes $a^{(i)}$; nous avons

$$\sum_{i=1}^{i=p+\mu} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\lambda-\mu r} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \frac{1}{r} \mathrm{P}_h.$$

Considérons actuellement r courbes du même système (pour lesquelles P_h a conséquemment la même valeur), et ajoutons les équations correspondantes ; il vient semblablement aux équations (5)

$$\sum_{i=1}^{i=p+\mu} \sum_{k=1}^{k=r} \int_{c^{(i)}}^{y^{(ki)}} du_h \equiv - \sum_{i=1}^{i=\lambda-\mu r} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \quad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Par conséquent, *les points de contact de r courbes de contact d'un même système sont toujours situés sur une courbe adjointe du $m^{\text{ième}}$ ordre qui passe par les points fixes donnés.*

Dans le cas précédemment traité, on obtient en outre la proposition qui suit :

Si, par les points donnés et par $r - 1$ systèmes chacun de

---

[1] Cette notion a été introduite dans la Géométrie par HESSE et appliquée par lui aux courbes du troisième et du quatrième ordre (*Journal de Crelle*, t. 49 ; *voir* aussi p. 58 et suiv. et p. 47). Nous mentionnerons incessamment différents exemples pour le cas de $n = 4$. Pour $n = 3$, $m = 2$, *voir* t. II, p. 266 et suiv.

$p+\mu$ points de contact appartenant à des systèmes identiques ou différents de courbes de contact, on mène une courbe adjointe du $m^{\text{ième}}$ ordre, celle-ci passe toujours par un $r^{\text{ième}}$ système.

La proposition ci-dessus (p. 232 et suiv.) peut être envisagée comme un cas particulier du présent théorème.

Sont particulièrement intéressants les cas dans lesquels le nombre $mn - \Sigma\alpha_i i(i-1)$ est divisible par r, de telle sorte que

$$mn - \Sigma\alpha_i i(i-1) = (p+\mu)r.$$

Alors se présentent des courbes de contact adjointes ayant, avec la courbe primitive f, un contact d'ordre $r-1$ partout où elles la rencontrent (les points singuliers de f exceptés), et les systèmes qui prennent naissance dépendent uniquement de la courbe primitive elle-même et de l'ordre m de la courbe de contact; ils ne sont donc plus caractérisés en outre, comme précédemment, par certains points particuliers choisis arbitrairement sur la première. Le nombre des systèmes distincts peut ici, suivant les cas, différer de celui indiqué par le nombre r^{2p}, les autres propositions trouvées plus haut continuant à être exactes.

Admettons en effet que le nombre $M[=mn - \Sigma\alpha_i i(i-1)]$ des points d'intersection mobiles d'une courbe adjointe C_m ait, avec r, un facteur commun, en sorte que $M = M'.s$, $r = r'.s$, d'où aussi $r'(p+\mu) = M'$, M', r' étant des nombres premiers entre eux. Aussi souvent que tous les nombres m, q entrant dans les quantités P_h renferment le facteur s, on a

$$\frac{1}{r}P_h = \frac{1}{r'}P'_h \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

les P'_h étant des expressions analogues aux P_h. On a constamment alors

$$r'\left[\int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p+\mu)}}^{y^{(p+\mu)}} du_h\right] \equiv 0 \pmod{P'_h},$$

et cette équation nous apprend que la courbe répondant aux $y^{(i)}$ a un contact non d'ordre $r-1$, mais seulement d'ordre $r'-1$, et

n'intervient conséquemment dans la question que parce que, comptée s fois, elle représente une courbe improprement dite ayant un contact d'ordre $r-1$. En faisant abstraction de ces courbes exceptionnelles et observant que, d'après ce qui précède, le nombre de tels systèmes particuliers est égal à r'^{2p} (1), on arrive à ce théorème :

Si le nombre total M *des points d'intersection mobiles d'une courbe adjointe du* $m^{ième}$ *ordre* (m *étant supérieur à* $n-3$) *est égal à* $(p+\mu)r$, *il existe des systèmes de courbes de contact ayant, avec la courbe primitive, un contact d'ordre* $r-1$ *en* $p+\mu$ *points dont* μ *sont quelconques. Si l'on a* $M = M'.s$, $r = r's$, M', r' *étant des nombres premiers entre eux, le nombre de ces systèmes est égal à* $r^{2p} - r'^{2p}$; *dans le cas seulement où* M *et* r *sont des nombres premiers entre eux, le nombre des systèmes dont il s'agit est égal à* r^{2p}.

On devra, en général, supposer que le nombre r est de la forme $r_1^{\alpha_2}, r_2^{\alpha_1}, \ldots$; $r_1, r_2, \ldots$ étant des nombres premiers, et alors, suivant le caractère de ce nombre r, il se présente encore d'autres particularités, mais nous ne développerons pas ici ce sujet (2), parce qu'il s'agit uniquement de distinctions prolixes et non de recherches nouvelles. Au résultat trouvé en dernier lieu se rattachent diverses propositions relatives aux cas où les points de contact de plusieurs courbes de contact sont situés encore ensemble sur une courbe adjointe. Ces propositions sont encore vraies alors même qu'on ne considère pas des courbes de contact d'ordre égal. En effet, si M' r', μ'; M'', r'', μ'', ...; $M^{(\rho)}$, $r^{(\rho)}$, $\mu^{(\rho)}$ désignent les nombres qui correspondent aux différentes courbes de contact considérées ensemble [en sorte que $M^{(i)} = (p+\mu^{(i)})r^{(i)}$], il suffit

---

(1) Si un semblable système est formé par des courbes adjointes d'ordre $n-3$ ou d'un ordre moins élevé, sa multiplicité peut être supérieure à μ, $p-1$ points seulement ou un plus petit nombre étant déterminés par le problème d'inversion (p. 227 et suiv.). Ainsi, par exemple, il existe, pour une courbe du quatrième ordre C_4, 2^6-1 systèmes distincts de courbes proprement dites C_2 en nombre *simplement* infini dont chacune a avec C_4 quatre contacts du premier ordre; en même temps se présente le système des droites comptant double, or ce dernier se compose d'un nombre *doublement* infini de courbes.

(2) *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 242 et suiv.

que les équations

$$\frac{1}{r'} P'_h + \frac{1}{r''} P''_h + \ldots + \frac{1}{r^{(\rho)}} P_h^{(\rho)} = 0$$

soient satisfaites pour que les $\rho p + \Sigma \mu^{(i)}$ points de contact des courbes ayant respectivement $M', M'', \ldots, M^{(\rho)}$ points d'intersection mobiles soient situés sur une nouvelle courbe adjointe. On suppose ici que le nombre

$$\rho p + \mu' + \mu'' + \ldots + \mu^{(\rho)}$$

peut être fait égal à

$$hn - \Sigma \alpha_i i(i-1),$$

h étant précisément l'ordre de cette nouvelle courbe. Nous n'attirerons l'attention que sur un seul exemple des nombreuses propositions qui découlent de cette source.

Pour le cas où M devient égal à pr, nous obtenons, par les théorèmes précédents, des classes de courbes de contact complètement déterminées, dont aucun point de contact ne peut plus être choisi arbitrairement. C'est ce qui arrive, par exemple, pour $n = 4$, $p = 3$, $m = 3$ (d'où $M = 12$), $r = 4$, et nous obtenons immédiatement ce théorème :

Il existe $4^6 = 4096$ *courbes du troisième ordre ayant en trois points un contact du troisième ordre avec une courbe donnée du quatrième ordre sans point double.*

Si l'on désigne ici les nombres correspondant aux différentes courbes de contact qui entrent dans les systèmes de périodes P_h par des indices supérieurs, *les points de contact de trois courbes sont toujours situés sur une nouvelle courbe du troisième ordre lorsque*

$$m'_h + m''_h + m'''_h + m''''_h \equiv 0 \pmod{4},$$
$$q'_h + q''_h + q'''_h + q''''_h \equiv 0 \pmod{4}.$$

Les courbes du troisième ordre ainsi obtenues se groupent en trois classes. Les courbes de la première classe ont un contact simple aux points de contact de deux des courbes trouvées, celles de la seconde classe ont un contact simple aux points de contact d'une courbe et passent par les points de contact de deux autres,

enfin celles de la troisième classe passent par les points de contact de quatre courbes différentes.

On obtient la première classe en prenant deux fois deux des nombres m, q égaux entre eux, en posant par exemple $m' = m'''$, $m'' = m''''$, $q' = q'''$, $q'' = q''''$, ce qui entraîne l'existence des équations

$$2(m'_h + m''_h) \equiv 0, \quad 2(q'_h + q''_h) \equiv 0 \pmod{4}.$$

La deuxième classe s'obtient en choisissant m''' égal à m'''', et m' et m$''$ différents, en sorte que

$$m'_h + m''_h + 2m'''_h \equiv 0, \quad q'_h + q''_h + 2q'''_h \equiv 0 \pmod{4}.$$

Au contraire, dans la troisième classe, il faut prendre les quatre nombres m, q tous différents.

A la classe des problèmes *complètement déterminés* appartient aussi le suivant qui présente une importance considérable pour la géométrie sur la courbe f, ainsi que pour le problème de l'inversion des intégrales abéliennes, mais se distingue des questions traitées jusqu'ici en ce qu'il s'agit à présent de courbes du $(n-3)^{\text{ième}}$ *ordre*. Nous serons conduits ensuite par la succession des idées à des considérations relatives aux tangentes doubles de la courbe générale du quatrième ordre et à la situation des points $\alpha^{(i)}$ qui, dans le problème de l'inversion, ont été choisis conformément à la nature de la question pour limites inférieures de l'intégrale. Il s'agit, dans le problème que nous abordons, de *construire une courbe adjointe du* $(n-3)^{\text{ième}}$ *ordre, telle qu'elle ait un contact simple en* $p-1$ *points avec la courbe donnée d'ordre* n *et de genre* p.

Nos notations précédentes continuant à être observées, les équations entre les intégrales auxquelles conduit ce problème se représentent de la manière suivante, R_h désignant une combinaison numérique entière des périodes [1]

$$(7) \qquad \int_{c^{(1)}}^{\gamma^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\gamma^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p-1)}}^{\gamma^{(p-1)}} du_h \equiv \frac{1}{2} R_h$$

$$(h = 1, 2, \ldots, p).$$

---

[1] Une courbe de cette espèce ayant pour points de contact $c^{(i)}$ est présupposée connue. (*Voir* la note de la page 230.)

Le nombre de ces équations est supérieur d'une unité à celui des inconnues. Elles sont toutefois compatibles, car il existe une relation entre les sommes des intégrales u_h si leurs points-limites supérieurs sont situés sur une courbe adjointe C_{n-3} ; et cette relation, comme il a déjà été mentionné plus haut (p. 228), est donnée par l'évanouissement identique de la fonction $\Theta(v_1 \ldots v_p)$, où

$$v_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{\gamma^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

les $\alpha^{(i)}$ désignant encore les points de contact de la courbe C_{n-2} qui répond à μ suivant un mode déterminé (p. 225), tandis que μ est quelconque. Or la tangente de μ, ensemble avec la courbe C_{n-3} dont les points de contact $c^{(i)}$ figurent dans les limites inférieures de (7), forme également une adjointe C_{n-2} qui passe par les autres $n-2$ intersections de cette tangente avec f, et, par conséquent, a deux points communs avec la courbe partout où elle la rencontre encore. Il doit donc exister un certain système Q_h de modules de périodicité pour lequel, d'après le théorème d'Abel,

$$(8) \quad \int_{c^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p-1)}}^{\alpha^{(p-1)}} du_h + \int_{\mu}^{\alpha^{(p)}} du_h \equiv \frac{1}{2} Q_h.$$

Les arguments v_h des fonctions Θ récemment mentionnées deviennent, eu égard à (7),

$$v_h = \frac{1}{2} R_h - \frac{1}{2} Q_h.$$

Si donc les équations (7) doivent avoir lieu simultanément, il faut qu'il y ait évanouissement de la fonction $\Theta\left(\frac{1}{2} R_h - \frac{1}{2} Q_h\right)$ ou $\Theta\left(\frac{1}{2} P_h\right)$, si l'on pose $P_h = R_h - Q_h$, en sorte que P_h désigne encore un système de périodes. Or, des propriétés de périodicité des fonctions Θ résulte immédiatement ce théorème [1] que *la fonction* $\Theta\left(\frac{1}{2} P_h\right)$ *s'annule toujours et en général uniquement*

---

[1] *Voir* CLEBSCH, *loc. cit.*, § 8, et entre autres auteurs CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 260, NEUMANN, *op. cit.*, p. 37.

lorsque ses arguments sont un des systèmes de demi-périodes

$$\frac{1}{2}P_h = m_h \pi i + \frac{1}{2}\Sigma_k a_{kh} q_k,$$

pour lesquels la somme $m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p$ *est un nombre impair, c'est-à-dire pour lesquels on a*

$$(10) \qquad m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p = 2H + 1.$$

Il y a donc autant de fonctions $\Theta\left(\frac{1}{2}P_h\right)$ s'évanouissant que l'équation (10) a de solutions entières. Pour trouver le nombre de ces dernières, admettons que k des nombres m soient égaux à zéro, et que les $p-k$ autres soient égaux à 1 ; les nombres q qui répondent aux premiers nombres m peuvent alors être zéro ou l'unité, ce qui donne 2^k combinaisons. Mais la somme des autres nombres q doit être impaire, c'est-à-dire que l'un d'eux est toujours déterminé par les $p-k-1$ autres. Ces autres nombres peuvent donc encore être choisis de 2^{p-k-1} manières différentes ; autrement dit, il existe, dans ce cas, 2^{p-2} systèmes des quantités q. Suivant la manière dont parmi les p nombres m_h on choisit les k qui doivent être nuls, on a

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots k}$$

différents cas, et par conséquent en tout

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots k}.2^{p-1}$$

systèmes des nombres m, q pour une valeur donnée de k. Enfin k peut prendre les valeurs 0, 1, ..., $p-1$; le nombre total des solutions possibles est donc

$$2^{p-1}\left[1 + \frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1.2} + \ldots + p\right] = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

C'est là conséquemment le nombre des systèmes P_h *des demi-modules de périodicité pour lesquels la fonction* $\Theta\left(\frac{1}{2}P_h\right)$ *s'annule.*

Nous avons posé $P_h = R_h - Q_h$, Q_h étant complètement déterminé par l'équation (8), puisque Q_h dépend uniquement des points $c^{(i)}$ et $\alpha^{(i)}$. A chacun des $2^{p-1}(2^p - 1)$ systèmes de valeurs P_h répond par conséquent un système complètement déterminé de périodes R_h à l'égard duquel les équations (γ) peuvent avoir lieu, et par suite aussi un système entièrement déterminé de points de contact $y^{(i)}$ d'une courbe adjointe C_{n-3}. Nous avons donc ce théorème :

Il existe $2^{p-1}(2^p - 1)$ courbes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre simplement tangentes à la courbe $f = 0$ en $p - 1$ points.

Ces courbes se déterminent, si nous résumons les explications précédentes, au moyen des équations

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h \equiv \frac{1}{2} P_h \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

dans lesquelles μ et $\alpha^{(i)}$ ont les significations connues (p. 225), et qui sont compatibles lorsque les nombres entiers m, q qui entrent dans les quantités P_h satisfont à l'équation (10).

On remarque immédiatement que les équations (11) se tirent des équations (p. 231)

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv \frac{1}{2} P_h \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

si l'on fait coïncider un des points $y^{(i)}$ avec le point μ. Ces dernières équations déterminent d'ailleurs en premier lieu les $2^{2p} - 1$ courbes de contact adjointes du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre qui passent par les $n - 2$ autres points de rencontre de la tangente de μ si l'une de ces courbes (dont les points de contact sont $\alpha^{(i)}$) est connue. Mais, comme chacune des courbes trouvées C_{n-3}, tangentes en $p - 1$ points, forme, ensemble avec la tangente de μ, une courbe C_{n-2} de l'espèce précitée, il n'y aura plus que

$$2^{2p} - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p + 1)$$

courbes C_{n-2} non décomposables dont les points de contact satis-

font aux équations (12). Nous avons par suite le théorème suivant, qui complète le précédent :

Il existe $2^{p-1}(2^p+1)$ *courbes adjointes du* $(n-2)^{ième}$ *ordre passant par les* $n-2$ *points où la tangente en un point quelconque* μ *rencontre la courbe* $f=0$ *et simplement tangentes à* $f=0$ *en* p *points.*

On trouve les points de contact de ces courbes au moyen des équations (12) en mettant pour les quantités P_h tous les systèmes de modules de périodicité pour lesquels l'équation (10) n'est pas satisfaite, c'est-à-dire pour lesquels

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p = 2H \text{ [1]}.$$

Parmi eux est compris en particulier le système pour lequel $m_i = q_i = 0$, corrélatif à la courbe tangente aux points $\alpha^{(i)}$ eux-mêmes qui est caractérisée entre les autres courbes C_{n-2} par le choix du système employé de modules normaux de périodicité (p. 227, note 1). La recherche effective des différents systèmes de points de contact est réalisable par une équation du degré $2^{p-1}(2^p+1)$; mais il est à remarquer que les racines de cette équation peuvent s'exprimer rationnellement par les racines de l'équation du degré $2^{p-1}(2^p-1)$ dont dépend la détermination des courbes adjointes C_{n-3} tangentes en $p-1$ points, ainsi qu'il est enseigné dans la théorie de la division des fonctions abéliennes [2].

De même que les courbes de contact du $(n-2)^{ième}$ ordre répondant au point μ se répartissent en deux classes complètement distinctes, de même tous les systèmes de courbes de contact adjointes qui touchent la courbe primitive partout où elles la rencontrent se séparent en deux classes différentes, et les systèmes de l'une de ces classes sont en relation spéciale avec les $2^{p-1}(2^p-1)$

---

[1] Un système de nombres qui satisfait à cette relation est appelé un *système de caractéristiques pair,* tandis que les nombres satisfaisant à (10) forment un système de caractéristiques *impair*. Comme nous le verrons pour le cas de $p=3$, il existe entre les nombres de ces systèmes d'assez nombreuses relations, qui sont interprétées dans la géométrie par le groupement des courbes C_{n-3} et C_{n-2}. La théorie des caractéristiques a été particulièrement étudiée par SCHOTTKY dans l'Ouvrage cité (p. 135).

[2] *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 266 et suiv.

groupes de points de contact des courbes adjointes C_{n-3}. Supposons en effet qu'une courbe adjointe coupe la courbe primitive, abstraction faite des points singuliers de cette dernière, en $M = 2\mu$ points, et qu'une semblable courbe touche la courbe primitive en $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(\mu)}$; alors, pour les autres $2^{2p}-1$ systèmes de courbes de contact ont lieu les équations

$$(13) \qquad \int_{a^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(\mu)}}^{x^{(\mu)}} du_h \equiv \frac{1}{2} R_h,$$

R_h désignant un système quelconque de périodes. Actuellement nous attribuerons aux nombres entiers qui entrent dans R_h des valeurs, telles que les équations (7) puissent aussi avoir lieu; il viendra alors, si nous entendons par R_h les mêmes grandeurs dans (13) et (7),

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv 0.$$

Si donc le nombre $\mu + p - 1 + \Sigma\alpha_i i(i-1)$ est divisible par n [1], les points $x^{(i)}$ et $y^{(i)}$ sont encore situés sur une courbe adjointe, ou, en d'autres termes, le groupe des points $x^{(i)}$ est résiduel du groupe des points $y^{(i)}$ (t. II, p. 137). Nous avons donc ce théorème :

Parmi les 2^{2p} systèmes de courbes de contact adjointes, qui sont simplement tangentes à la courbe primitive f en μ points, et ne la rencontrant plus ailleurs, les points singuliers exceptés, il en existe toujours

$$[\mu + p - 1 + \Sigma\alpha_i i(i-1) \text{ étant égal à } hn],$$

---

(1) Dans le cas contraire, les points $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ seraient situés, avec un certain nombre de points fixes, sur une courbe adjointe, et avec ces mêmes points fixes se trouveraient les points $a^{(i)}$ et $c^{(i)}$ sur des courbes adjointes. Si l'on a $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ et $2\mu = mn$, il vient $h = \frac{1}{2}(m+n-3)$; il faut donc que l'un des nombres m, n soit pair et l'autre impair; si ici $m(=2\nu)$ est le nombre pair, parmi les 2^{2p} systèmes st compris celui des courbes du $\nu^{\text{ième}}$ ordre comptant double.

$2^{p-1}(2^p - 1)$, *tels que le groupe des points de contact de chaque courbe du système est situé, avec les* $p - 1$ *points de contact d'une courbe déterminée faisant partie des précédentes courbes de contact du* $(n-3)^{ième}$ *ordre, sur une courbe adjointe d'ordre* h. *Si, au contraire,*

$$\mu + p + \Sigma \alpha_i i(i-1) = hn,$$

il existe parmi les 2^{2p} *systèmes précités, ainsi qu'on le reconnaît d'une manière analogue,* $2^{p-1}(2^p + 1)$ *systèmes, tels que leurs points de contact sont situés, avec les p points de contact d'une des courbes* C_{n-2} *ci-dessus, sur une courbe* C_h.

Si nous prenons, par exemple, $n = 4$, $p = 3$, les courbes C_{n-3} relatives à ce cas sont données par les $2^2(2^3 - 1) = 28$ tangentes doubles de la courbe C_4. Que l'on fasse maintenant passer par les points de contact de l'une de ces tangentes doubles un système de coniques; ces dernières déterminent un système de six points mobiles sur C_4, et aux six points de chacun des groupes G_6 ainsi obtenus une courbe C_3 peut avoir un contact simple. Mais il existe aussi des courbes C_3, tangentes partout en leurs points de rencontre qui ne peuvent être déterminées de cette façon.

Nous nous proposons maintenant d'appliquer les résultats généraux obtenus à la recherche des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre.

Ainsi qu'il vient d'être énoncé, le nombre de ces dernières, tel au surplus qu'il est connu d'après les formules de Plücker, est égal à 28. Chacune d'elles sera désignée par la suite (placée entre parenthèses) des nombres correspondants m, q qui entrent dans les systèmes de périodes P_h des équations (12), c'est-à-dire par

$$(m_1, m_2, m_3; q_1, q_2, q_3).$$

Ces nombres peuvent être 0 ou 1, tels cependant que l'on ait toujours

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Si donc nous prenons, pour les quantités m, tous les systèmes possibles composés des nombres 0 et 1, le système 0, 0, 0 seul excepté, et que nous déterminions, conformément à l'équation pré-

cédente, les quantités correspondantes q, nous obtenons les vingt-huit tangentes doubles dans le tableau suivant :

(100,100)	(010,010)	(001,001)	(011,010)
(100,110)	(010,110)	(001,011)	(011,001)
(100,101)	(010,011)	(001,101)	(011,110)
(100,111)	(010,111)	(001,111)	(011,101)
(101,100)	(110,100)	(111,100)	
(101,110)	(110,101)	(111,010)	
(101,001)	(110,010)	(111,001)	
(101,011)	(110,011)	(111,111).	

On peut considérer m tangentes doubles de cette espèce comme une courbe de contact adjointe décomposable de l'ordre m ; suivant que l'on choisit le nombre m, il résulte alors immédiatement des théorèmes généraux qui précèdent une série de théorèmes sur la situation respective des tangentes doubles, dont la plupart ont été trouvés par Hesse et Steiner par voie algébrique [1].

---

[1] *Voir* HESSE (*Journal de Crelle*, t. 49, 55 et 59; STEINER, *ibid.*, t. 49, et CAYLEY, *ibid.*, t. 68). Des démonstrations algébriques d'autres propositions sur les tangentes doubles, publiées sans démonstrations par Steiner, ont été données par CLEBSCH : *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen*, etc., § 10 (*Journal de Crelle*, t. 63); des démonstrations géométriques l'ont été par GEISER (*Journal de Crelle*, t. 73). Le dernier paragraphe de ce dernier Mémoire doit être corrigé d'après une note de FRAHM. (*Math. Annalen*, t. VII, p. 635.)

D'après une remarque précédente (note 1 de la page 242), la théorie des tangentes doubles est étroitement liée à ce qu'on appelle la théorie des caractéristiques paires et impaires, pour $p = 3$. Riemann s'en était aussi occupé; mais ses recherches n'ont été publiées qu'après sa mort (*Gesammelte Werke*, Leipzig, 1876, p. 456); une étude détaillée des caractéristiques a été donnée par H. WEBER dans l'Ouvrage cité (p. 135).

Une question d'une autre espèce est celle de la *réalité* des tangentes doubles. Déjà Plücker avait montré qu'elles peuvent être toutes réelles. (*Voir* sa *Théorie des Courbes algébriques*). Toutefois ses résultats numériques ne sont pas tous corrects. Une exposition complète de tous les cas qui peuvent se présenter (comme en général de toutes les formes possibles d'une courbe du quatrième ordre) a été donnée par ZEUTHEN (*Math. Annalen*, t. VII, p. 410). Sur la connexion de ces théories avec celle des vingt-sept droites sur une surface de troisième ordre, *voir* GEISER (*Math. Annalen*, t. I, et ZEUTHEN, *ibid.*, t. VIII). On trouve un résumé des différentes méthodes d'exposition dans SALMON, *Higher plane curves*, art. 251 et suiv. Nous avons déjà fait observer, dans la note de la page 64 (t. II), que l'on peut, d'après Hesse, obtenir une courbe du quatorzième ordre, déterminant par ses intersections avec C_4 les cinquante-six points de contact des tangentes doubles.

En partant de la théorie des intégrales abéliennes, et en étudiant la réalité de leurs périodes et la fixation de leurs intégrales normales, KLEIN a été conduit à déter-

Nous considérons d'abord les cas les plus simples où $m = 2$ et $m = 3$.

Il existe (p. 234) $2^6 - 1 = 63$ systèmes de coniques ([1]) qui touchent C_4 en quatre points. Une semblable conique de contact, le système de périodes qui la concerne étant déterminé par les nombres $m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3$ (avec la seule condition que les nombres m, q ne soient pas tous égaux à zéro, ces nombres pouvant du reste prendre toutes les valeurs 0 et 1), se décompose toujours en deux tangentes doubles

$$(m'_1, m'_2, m'_3\,;\, q'_1, q'_2, q'_3), \quad (m''_1, m''_2, m''_3\,;\, q''_1, q''_2, q''_3),$$

lorsqu'on a, en même temps ($i = 1, 2, 3$),

$$(14) \qquad m'_i + m''_i \equiv m_i, \quad q'_i + q''_i \equiv q_i \quad (\text{mod. } 2),$$

en supposant (toujours pour le module 2)

$$(15) \qquad m'_1 q'_1 + m'_2 q'_2 + m'_3 q'_3 \equiv 1, \quad m''_1 q''_1 + m''_2 q''_2 + m''_3 q''_3 \equiv 1.$$

Il faut ici, ou bien que les nombres q ou bien que les nombres m ne soient pas tous nuls. Nous admettrons que l'un au moins des nombres q_1, q_2 soit différent de zéro (au cas contraire, il suffirait, dans la détermination suivante, de permuter les nombres q avec les nombres m). Alors, en premier lieu, les équations (14) montrent que, pour des nombres donnés q_i, les nombres q'_i, q''_i peuvent être choisis de six manières différentes. Il existe, en effet, généralement huit combinaisons qui satisfont aux équations ci-dessus; mais de ces dernières il faut retrancher les deux dans lesquelles tous les nombres q' ou tous les nombres q'' sont nuls, ce qui ne peut se présenter d'après notre tableau. Ces six manières donnent trois couples de systèmes q'_i, q''_i, parce que deux combinaisons du même couple ne diffèrent que par permutation des q' avec les q''. Or, dans chacun de ces couples, il y a au moins un

miner les caractéristiques qu'il faut attribuer à une tangente double donnée, si la courbe est supposée donnée par une figure, et à indiquer les systèmes de coniques réelles qui touchent C_4 en quatre points (*Math. Annalen*, t. X, p. 365, et t. XI, p. 293). La méthode suivie par lui est analogue à celle dont nous avons parlé pour les courbes C_3 où $p = 1$ (t. II, p. 369).

([1]) Il faut, en effet, retrancher des soixante-quatre systèmes trouvés d'abord celui des droites qui comptent double. (*Voir* la note 1 de la page 236.)

couple de nombres q', q'' différents entre eux et qui ont conséquemment les valeurs 0 et 1, de sorte que les nombres d'un autre des trois couples doivent être 1 et 0 ou 1, 1 (car autrement tous les nombres q devraient être nuls, ce qui est exclus par hypothèse).

Il existe donc un nombre q' et un nombre q'' à indices inférieurs différents qui sont égaux à 1. Actuellement si l'on détermine les nombres m qui répondent au troisième indice inférieur de telle manière qu'ils satisfassent à l'équation (14) (ce qui peut avoir lieu de deux façons différentes), les autres nombres m se déterminent successivement au moyen de (14) et (15). A chacun des trois couples q', q'' correspondent donc deux couples m', m''; autrement dit, on a ce théorème :

Dans chacun des trente-six systèmes de coniques de contact figurent six couples de tangentes doubles.

Comme, pour deux couples appartenant au même système, la somme de tous les nombres m_i, ainsi que la somme de tous les nombres q_i, est constamment paire, on a encore ce théorème (qui est d'ailleurs un cas particulier d'une proposition donnée, p. 232) :

Les points de contact de deux couples appartenant au même système sont situés sur une conique [1].

---

[1] Soient

$$uu' = 0, \quad vv' = 0, \quad ww' = 0$$

les équations de trois couples de tangentes doubles du même système. Par les points de contact du quatrième couple de ce système et par les points de contact de chacun des trois couples précités, on peut faire passer une conique. On obtient ainsi trois coniques $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ qui appartiennent au même faisceau, en sorte que

$$k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3 = 0.$$

Les quotients $\sqrt{uu'} : \sqrt{ww'}$ et $\sqrt{vv'} : \sqrt{ww'}$ deviennent respectivement aux mêmes points que les quotients $\sigma_1 : \sigma_3$ et $\sigma_2 : \sigma_3$ nuls ou infinis du premier ordre; en déterminant convenablement les constantes, on peut donc poser

$$\sqrt{uu'} : \sqrt{vv'} : \sqrt{ww'} = \sigma_1 : \sigma_2 . \sigma_3;$$

et *il existe par suite entre trois couples du même système une équation de la forme*

$$k_1 \sqrt{uu'} + k_2 \sqrt{vv'} + k_3 \sqrt{ww'} = 0.$$

Il existe de même, entre trois coniques de contact quelconques $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$,

Le nombre des coniques ainsi obtenues est égal à celui des soixante-trois systèmes multiplié par le nombre 15 des combinaisons de six couples deux à deux et divisé par trois, parce que chaque groupe de quatre tangentes dont les points de contact sont situés sur une conique peut être décomposé de trois manières en deux couples, en sorte que chaque conique se présente trois fois. *On trouve ainsi que le nombre de ces coniques est égal à* 315. Ce qui précède permet immédiatement de grouper les tangentes doubles qui leur correspondent respectivement.

De plus, il existe soixante-quatre systèmes de courbes du troisième ordre qui touchent chacune la courbe du quatrième ordre en six points (p. 234). Les intégrales qui correspondent aux points de contact satisfont alors toujours aux équations

$$\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(6)}}^{y^{(6)}} du_h \equiv \frac{1}{2} R_h;$$

et les soixante-quatre systèmes se séparent, ainsi qu'il a été indiqué, en deux classes suivant que le système de périodes R_h figure aussi en même temps ou non dans les équations (7)

$$\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h \equiv \frac{1}{2} R_h,$$

c'est-à-dire suivant que, dans le système $P_h = R_h - Q_h$ qui se présente dans (11), on a $\Sigma mq \equiv 1$ (ce qui arrive vingt-huit fois), ou $\Sigma mq \equiv 0 \pmod{2}$ (ce qui arrive trente-six fois). On a, en conséquence, la proposition suivante (*voir* p. 243 et suiv.) :

Parmi les soixante-quatre systèmes de courbes du troisième ordre, vingt-huit ont la propriété que dans chacun d'eux les six points de contact de chaque courbe sont situés sur une conique,

---

faisant partie du même système, en vertu de $f = 0$, une identité de la forme

$$k_1\sqrt{S_1} + k_2\sqrt{S_2} + k_3\sqrt{S_3} = 0$$

(*voir* aussi Hesse, *loc. cit.*). Nous reviendrons, à l'occasion du connexe [1, 2], sur les recherches de Aronhold, qui sont liées à celles-ci.

Les rapports $\sqrt{u} : \sqrt{w}$, $\sqrt{v} : \sqrt{w}$ sont alors des fonctions abéliennes dans le sens de Riemann (*voir* Roch, *Journal de Crelle*, t. 66, p. 105, et les Ouvrages de Riemann, Weber et Klein que nous venons de citer, ainsi que la note ci-dessus, p. 222).

laquelle passe encore par les points de contact d'une tangente double déterminée; cette tangente double est toujours la même pour le même système. Les points de contact des courbes des trente-six systèmes restants ne sont pas situés sur une conique avec ceux d'une tangente double.

Mais, d'autre part (p. 234), les deux classes ont la propriété commune que *les points de contact de deux courbes du même système sont situés sur une courbe du troisième ordre.*

Les trente-six systèmes, dont la seconde classe est formée, et dont chacun est au surplus triplement infini, parce que, pour chaque courbe, trois points de contact restent encore arbitraires, sont en relation spéciale avec les trente-six systèmes simplement infinis de coniques tangentes en trois points et passant par les deux points de rencontre d'une tangente quelconque de f. En effet, chacune de ces coniques réunie à la tangente forme également une courbe C_3 tangente en six points; seulement, en deux de ces points (les points de rencontre de la tangente choisie), le contact est un contact improprement dit, parce que C_3, aux points dont il s'agit, a des points doubles. D'après cela, on reconnaît immédiatement l'exactitude de la proposition suivante : *Chacun des trente-six systèmes de courbes de contact du troisième ordre qui n'ont pas, avec les tangentes doubles, la relation caractérisée dans ce qui précède renferme un système simplement infini de courbes dont chacune se décompose en une tangente de f et en l'une des trente-six coniques répondant à cette dernière. Ces coniques, pour le même système de courbes* C_3, *appartiennent toutes à un même système de courbes* C_2. — *Les six points de contact de chaque courbe d'un système de courbes* C_3, *les trois points de contact de chaque conique faisant partie du système correspondant, les deux points de rencontre de la tangente précitée et le point de contact de cette dernière sont encore situés sur une courbe* C_3 [1].

Aux systèmes de courbes C_3 considérés ici appartiennent aussi les quatre mille quatre-vingt-seize courbes du troisième ordre précé-

---

[1] Un théorème entièrement analogue a naturellement lieu pour les courbes de contact adjointes d'ordre $n-2$ relatives aux courbes d'ordre n et de genre p. (Comparer p. 243.)

demment mentionnées qui ont, avec C_4 en trois points, un contact du troisième ordre ([1]), les six points de contact étant ici réunis par couples (p. 237). On a, en effet, pour ces courbes,

$$2\left(\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{a^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h\right) \equiv \frac{1}{2}\mathrm{R}_h;$$

chacune d'elles fait donc partie du système de courbes de contact auquel appartient le système de périodes R_h. Mais réciproquement de cette équation résulte

$$\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{a^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h \equiv \frac{1}{4}\mathrm{R}_h + \frac{1}{2}\mathrm{R}'_h,$$

les nombres m, q dans R_h et R'_h ne pouvant actuellement acquérir que les valeurs 0 et 1. En conséquence, si l'on a disposé des R_h, les R'_h peuvent encore être choisis de soixante-quatre manières différentes. *Donc, dans chacun des soixante-quatre systèmes de cubiques de contact, il y a soixante-quatre courbes ayant en trois points un contact du troisième ordre.* Cela concorde avec ce fait que (p. 231) par deux points quelconques d'une courbe C_4 on peut faire passer soixante-quatre coniques tangentes à C_4 en trois points. Or si l'on fait passer ces coniques par les points de contact d'une tangente double, leurs points de contact à elles sont en même temps ceux où une courbe C_3 peut avoir avec C_4 trois contacts de troisième ordre (p. 248). *On obtient ainsi les* 28.64 *courbes de contact qui appartiennent aux vingt-huit systèmes mentionnés*, mais on voit qu'il existe encore 36.64 courbes de contact aux points de contact desquelles une conique qui passe par les points de contact d'une tangente double ne peut pas en même temps toucher C_4. Ces exemples suffiront pour signaler le caractère des propositions qui se présentent ici. Nous pouvons résumer ces dernières dans le théorème plus général qui suit :

Il existe soixante-trois systèmes de courbes de l'ordre $2m$ *et soixante-quatre systèmes de courbes de l'ordre* $2m+1$ *simple-*

([1]) L'équation du degré $4^6 = 4096$, dont dépend la détermination de ces courbes, a été étudiée par C. Jordan, *Traité des Substitutions*, p. 305.

ment tangentes à la courbe C_4 *aux points où elles la rencontrent. Et ces derniers se partagent en deux groupes, l'un de vingt-huit, l'autre de trente-six; les points de contact de toute courbe des vingt-huit systèmes du premier groupe sont toujours situés, en même temps que les points de contact d'une tangente déterminée parmi les vingt-huit tangentes doubles, sur une courbe d'ordre* $m+1$, *tandis que rien de semblable ne se produit pour les trente-six systèmes du second groupe. Mais tous possèdent la propriété que les points de contact de deux courbes du même système sont situés sur une courbe du même ordre.*

On peut aisément passer de ces théorèmes à la discussion détaillée des cas où les points de contact de six, huit, ..., tangentes doubles sont situés sur des courbes C_3, C_4; divers théorèmes relatifs à ces cas ont également été établis par Hesse et Steiner. Nous nous contenterons ici de donner un exemple qui se réfère à des propositions d'un autre caractère. Suivant ce qui a été dit p. 236, *il existe* $3^6 - 1 = 728$ *systèmes de cubiques ayant un contact du second ordre avec* C_4 *en quatre points.* Entre les intégrales ont lieu ici les équations

$$\int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h + \int_{c^{(4)}}^{y^{(4)}} du_h \equiv \frac{1}{3} P_h,$$

dans lesquelles le système des P_h, étant admis que les points $c^{(i)}$ soient les points de rencontre d'une droite quelconque avec C_4, ne doit jamais s'annuler, parce qu'autrement C_3 se composerait d'une seule droite comptant trois fois. Si l'on considère ici une courbe appartenant à celui des autres systèmes dans lequel $2P_h$ se présente toujours à la place de P_h, et qu'on ajoute les équations qui répondent à une semblable courbe aux précédentes, on trouve que la somme des intégrales analogues est toujours congruente à zéro. *Les sept cent vingt-huit systèmes précités se partagent deux à deux en trois cent soixante-quatre couples, tels que les points de contact de chaque courbe de l'un des systèmes et ceux d'une courbe du système correspondant sont situés sur une conique.*

On peut aisément établir une foule de théorèmes semblables pour les courbes de cet ordre et des ordres supérieurs.

Dans les problèmes que nous venons de traiter, il s'agissait toujours de plusieurs contacts d'un même ordre. Or on peut généraliser ces recherches d'une manière remarquable en se proposant le problème suivant :

Déterminer les limites supérieures $x^{(i)}$ de telle manière qu'elles satisfassent aux p équations

$$q_1 \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + q_2 \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + q_p \int_{c^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h = v_h$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

dans lesquelles les quantités q_h désignent des nombres entiers positifs ($\geqq 1$) et v_h des quantités données arbitrairement.

C'est évidemment ce problème qu'il faut résoudre pour trouver les courbes d'un système linéaire qui sont adjointes à $f = 0$, et qui touchent cette dernière en p points où elles ont avec elle des contacts des ordres $q_1 - 1$, $q_2 - 1$, ..., $q_p - 1$ respectivement. C'est encore par la théorie des fonctions Θ que l'on peut aborder cette question [1]. Nous nous bornerons à indiquer les théorèmes suivants, auxquels on est conduit par ces recherches :

Dans un système de courbes adjointes d'ordre m ($> n - 3$) qui dépendent de

$$k_1 q_1 + k_2 q_2 + \ldots + k_\sigma q_\sigma - k_1 - k_2 - \ldots - k_\sigma$$

paramètres linéaires et qui coupent la courbe $f = 0$ en des systèmes de

$$k_1(q_1 - 1) + k_2(q_2 - 1) + \ldots + k_\sigma(q_\sigma - 1) + p$$

points mobiles dont p sont déterminés par les autres, il y a

$$\frac{q_1^{2k_1} q_2^{2k_2} \ldots q_\sigma^{2k_\sigma} p(p-1)\ldots(p - \Sigma k_i + 1)}{1.2\ldots k_1 . 1.2\ldots k_2 \ldots 1.2\ldots k_\sigma}$$

courbes dont chacune a avec $f = 0$ en k_1 points des contacts

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Lindemann, cité t. II, p. 174 et suiv.

d'ordre $q_1 - 1$, *en* k_2 *points des contacts d'ordre* $q_2 - 1$, ..., *en* k_σ *points des contacts d'ordre* $q_\sigma - 1$.

Si tous les nombres k_i sont égaux à l'unité et que σ soit égal à p, ce nombre devient en particulier égal à

$$q_1^2 q_2^2 \ldots q_p^2 p(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1.$$

Si au contraire $k_1 = p$, $k_2 = k_3 \ldots = k_\sigma = 0$, $q_1 = q$, le nombre des solutions devient égal à q^{2p}, et, en effet, dans ce cas le problème n'est autre que celui de la division des fonctions abéliennes (p. 230). Aux théorèmes sur le groupement des solutions de ce dernier correspondent, dans notre généralisation, des théorèmes analogues qui se réfèrent au groupement des diverses solutions dans le cas où tous les nombres q_i sont divisibles par un facteur commun.

Le résultat énoncé n'a plus lieu si les courbes proposées sont de l'ordre $n-3$ (ou peuvent être remplacées par des courbes d'ordre $n-3$ d'après le théorème du reste). On parvient ici au théorème qui suit :

Lorsqu'il n'y a que $p - \xi$ *points entre les intersections mobiles des courbes adjointes du système linéaire proposé qui soient déterminés par les autres, et que l'on suppose, pour plus de simplicité, les nombres* q_i *tous différents entre eux, le nombre des courbes demandées devient égal à*

$$\begin{aligned}
&q_1^2 q_2^2 \ldots q_\sigma^2 p(p-1)\ldots(p-\sigma+1)\\
&\quad - \xi q_1 q_2 \ldots q_\sigma [p(p-1)\ldots(p-\sigma+2)\Sigma q_1 q_2 \ldots q_{\sigma-1}\\
&\quad + (\xi+1)(\xi+2)p\ldots(p-\sigma+4)\Sigma q_1 q_2 \ldots q_{\sigma-2}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + (-1)^{\sigma-2}(\xi+1)(\xi+2)\ldots(\xi+\sigma-2)p\Sigma q_1\\
&\quad + (-1)^{\sigma-1}(\xi+1)(\xi+2)\ldots(\xi+\sigma-1)],
\end{aligned}$$

expression où l'on a désigné de la manière connue par $\Sigma q_1 q_2 \ldots q_i$ *la somme de tous les produits à* i *facteurs différents que l'on peut former avec les* σ *nombres* q_i.

Ce nombre doit être divisé par 1, 2, 3, ..., k, si k des nombres q_i sont égaux entre eux. Pour $k = \sigma$, $m = n - 3$, $\xi = 1$, $\sigma = p - 1$,

$q_i = 2$, on retrouve ainsi le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ des courbes C_{n-3} qui ont avec $f = 0$ en $p-1$ points des contacts simples (p. 243). Pour $k=2$, $m=1$, $p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, $\xi = p - n + 2$, $\sigma = 2$, $q_1 = q_2 = 2$, le nombre en question devient égal à $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$, qui est en effet celui des tangentes doubles (t. II, p. 64).

X. — L'évanouissement de la fonction Θ. Observations sur le théorème de Riemann et Roch.

Nous avons déjà fait remarquer précédemment (p. 228) que la fonction $\Theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ dont les p arguments sont définis par [1]

$$v_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h,$$

s'évanouit indépendamment de ξ si les points $x^{(i)}$ sont situés sur une courbe C_{n-3} adjointe à $f=0$, c'est-à-dire si la courbe C_{n-3} déterminée par $p-1$ des points $x^{(i)}$ renferme aussi le $p^{\text{ième}}$ point; en d'autres termes, nous avons mentionné ce résultat qui s'obtient pour $\xi = x^{(i)}$ que la fonction Θ s'évanouit toujours si ses arguments sont de la forme

$$v_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p-1)}}^{x^{(p-1)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

les points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p-1)}$ pouvant alors être complètement arbitraires. Ce cas est un premier exemple du fait que les relations algébriques entre les systèmes de points d'intersection de courbes adjointes C_{n-3} peuvent s'exprimer de la manière la plus simple lorsqu'on a recours aux fonctions transcendantes Θ. Par le développement ultérieur de cette remarque on peut aussi obtenir toute cette catégorie de propositions relatives aux courbes adjointes C_{n-3} que nous avons précédemment traitées en nous rattachant au *théorème du reste,* et qui nous ont en particulier conduits à ce

---

(1) Pour la signification des points μ et $\alpha^{(i)}$, *voir* p. 225 et 241.

que l'on appelle le théorème de Riemann et Roch. L'examen de cet ordre de faits va nous occuper maintenant.

L'introduction des fonctions Θ dans les théories dont il s'agit repose, d'après ce qui précède, sur la solution du problème de l'inversion qu'elles permettent précisément d'obtenir. Mais on peut aussi aborder ces théories d'une autre manière, savoir par l'intermédiaire des intégrales de deuxième espèce, et à ce mode de représentation on peut rattacher de même une étude des *groupes spéciaux* et des *systèmes spéciaux*. Nous insisterons d'autant plus volontiers sur ces dernières méthodes que jusqu'ici nous n'avons pas encore trouvé l'occasion de nous occuper d'une manière un peu approfondie des intégrales de deuxième espèce.

Si nous parvenons ainsi, à l'aide de l'algorithme simple que met à notre portée la théorie des intégrales abéliennes, à traiter les questions énoncées d'une façon plus directe que nous n'avons pu le faire par voie purement algébrique (par exemple dans le théorème de la p. 143, t. II, où nous n'avons fait que conclure de q à $q+1$), si, d'autre part, c'est historiquement par la première marche que l'on a été conduit d'abord à poser et à résoudre le problème signalé plus haut, on doit néanmoins beaucoup apprécier l'intérêt capital que présente par elle-même une démonstration purement algébrique de propositions algébriques. Les recherches suivantes ne sont donc pas destinées à remplacer les démonstrations précédentes dont nous parlons, mais seulement à éclairer une autre face du problème offert par cette manière de poser la question. On peut d'ailleurs observer que la théorie des fonctions transcendantes n'a pu jusqu'ici être employée par nous à indiquer le *nombre* des groupes ou des systèmes spéciaux possibles d'une espèce déterminée tandis qu'auparavant nous avons réellement effectué des déterminations numériques de cette sorte, au moins pour des cas particuliers, à l'aide de l'extension du principe de correspondance (p. 106 et suiv. et p. 113 et suiv.).

Le fait que *toute famille spéciale* $g_Q^{(q)}$, *c'est-à-dire toute famille pour laquelle* (p. 49)

$$q > Q - p + 1,$$

peut former les intersections de courbes adjointes du $(n-3)^{ième}$ *ordre,* s'établit de la manière suivante. Considérons d'abord un

groupe de points dans lequel $p-1$ points seulement (et non p) sont déterminés par les autres. Alors, parmi les p équations du problème d'inversion

$$\int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h = v_h,$$

ou parmi les équations différentielles correspondantes

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\varphi_h[x^{(i)}].[cx^{(i)}\,dx^{(i)}]}{na_{x^{(i)}}^{n-1}\,a_c} = dv_h,$$

l'une doit être la conséquence des autres; ou, en d'autres termes, on doit pouvoir déterminer des constantes $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(p)}$, telles que l'on ait

$$(2) \qquad c_1\varphi_1[x^{(i)}] + c_2\varphi_2[x^{(i)}] + \ldots + c_p\varphi_p[x^{(i)}] = 0.$$

Mais ces p équations n'expriment précisément pas autre chose que ce fait, savoir que les points $x^{(i)}$ sont situés sur la courbe de degré $n-3$: $c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$. Si, en effet, parmi les points d'un groupe le nombre de ceux qui sont déterminés par les autres est moindre encore (précisément comme dans le cas de $q > Q - p + 1$), il faut nécessairement que plusieurs des équations (1) soient la conséquence des autres, et l'on sera semblablement conduit à un plus grand nombre de relations de la forme (2). Mais ces dernières expriment toujours que les points en question (conjointement avec les points fixes d'un groupe résiduel) sont toujours situés sur différentes courbes adjointes C_{n-3}, et peuvent en conséquence être déterminés par une famille linéaire de courbes de cette espèce, ainsi qu'il a été énoncé.

Nous effectuerons d'abord la démonstration du théorème de Riemann et Roch au moyen des fonctions Θ dans quelques hypothèses particulières. Le cas le plus simple est celui où par $p-1$ points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p-1)}$ passe encore un nombre simplement infini de courbes C_{n-3} [1]. Alors ces points sont tous situés conjointement avec un $p^{\text{ième}}$ point quelconque z de f sur une courbe

---

[1] On a par conséquent $Q = R = p - 1$, $r = 1$, et il en résulte aussi $q = 1$, car on a toujours $Q + R = 2p - 2$, $Q - R = 2q - 2r$ (*voir* p. 35 et 52).

C_{n-3}, c'est-à-dire que, d'après un théorème cité en commençant, existe indépendamment de z et ξ la relation

$$(3) \qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{z} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0.$$

D'un autre côté, suivant le théorème d'Abel, comme la courbe C_{n-3} complétée par la tangente de μ forme une courbe C_{n-2}, on a, en désignant par $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p-1)}$, les $p-1$ autres points d'intersection d'une autre courbe C_{n-3} passant par les points $x^{(i)}$,

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0.$$

Les arguments de la fonction Θ qui intervient dans (3) deviennent donc égaux à

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{z} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h - 2\int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h \\ &= -\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h + \int_{\mu}^{z} du_h. \end{aligned}$$

De l'équation (3), par suite de ce que Θ est une fonction paire de ses arguments, résulte donc, indépendamment de ξ et z, cette autre relation

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h - \int_{\mu}^{z} du_h\right) = 0,$$

laquelle exprime que les $p-1$ points $y^{(i)}$ sont situés ensemble, avec tout point quelconque ξ de f, sur une adjointe C_{n-3}, c'est-à-dire que par les points $y^{(i)}$ passe encore un système simplement infini de courbes C_{n-3}; or c'est là le théorème trouvé page 35.

Un autre exemple nous sera fourni par le cas de $Q = p$ (d'où $R = p-2$), $r = 1$, dans lequel par p points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$ passe encore un nombre simplement infini de courbes C_{n-3}. Alors tout groupe de $p-1$ de ces points $x^{(i)}$ est situé, ensemble avec

tout point quelconque z [1], sur une courbe C_{n-3}, c'est-à-dire que nous avons les p relations

$$(5)\qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p}{}_k\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{z} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

l'indice k ajouté au signe sommatoire étant supposé indiquer que dans la somme le terme correspondant à l'indice $i = k$ doit être négligé. Si les points $y^{(1)}, \ldots, y^{(p-1)}$, parmi lesquels on doit d'ailleurs négliger $y^{(k)}$, sont les $p - 2$ points résiduels par rapport aux $x^{(i)}$, nous pouvons ici, d'après le théorème d'Abel, remplacer l'équation (4) par la suivante

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0.$$

Les arguments des fonctions Θ qui figurent dans (5) deviennent par suite égaux à

$$-\sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{z} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{\mu} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{x^{(k)}} du_h$$
$$= -\sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{x^{(k)}} du_h + \int_{\mu}^{z} du_h.$$

Les équations (5) expriment donc aussi que par les $p - 2$ points $y^{(i)}$, par *l'un* des p points $x^{(i)}$ et par un point *quelconque* ξ, on peut faire passer encore une courbe C_{n-3}; conséquemment par les points $y^{(i)}$ passent p faisceaux *différents* de courbes C_{n-3} et par suite aussi une famille au moins doublement infinie de courbes de cette espèce. On reconnaît, en reprenant le même raisonnement en sens inverse, que la multiplicité de cette dernière famille ne peut non plus être supérieure à 2. Nous avons donc $q = 2$, ainsi que l'exige le théorème de Riemann et Roch.

---

[1] On suppose naturellement ici qu'il s'agit uniquement de points de $f = 0$. (*Voir* l'étude algébrique de cet exemple, p. 43 et suiv.)

Pour effectuer la démonstration générale, posons

$$Q = p - 1 + \rho, \quad \text{d'où} \quad R = p - 1 - \rho.$$

Par les Q points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(Q)}$ doivent, par hypothèse, passer des courbes C_{n-3} en nombre r fois infini, c'est-à-dire que tous les déterminants à $p - r$ dimensions doivent s'annuler dans le tableau (¹) :

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x^{(Q)}) & \varphi_2(x^{(Q)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(Q)}) \end{matrix} \right\|.$$

Mais l'évanouissement de ces déterminants exprime précisément que $p - r$ quelconques des Q points $x^{(i)}$ sont situés avec r points arbitraires sur une courbe adjointe C_{n-3}. Les relations dont il s'agit sont donc aussi représentées par le système d'équations qui suit (²) :

$$(7) \quad \Theta\left(\sum_{i=1\;\; k_1, k_2, \ldots, k_{r+\rho-1}}^{i=Q} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r} \int_{\alpha^{(k_i)}}^{z^{(k_i)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h \right) = 0,$$

où les indices $k_1, k_2, \ldots, k_{r+\rho-1}$ qui affectent le premier signe sommatoire sont censés indiquer que dans la somme les termes répondant aux valeurs $i = k_1, k_2, \ldots, k_{r+\rho-1}$ doivent être négligés, en sorte que la somme ne se compose plus que de

$$Q - r - \rho + 1 = p - r$$

termes; la notation $z^{(k_i)}$ désigne d'ailleurs r points quelconques. Dans ces équations, la distribution des limites inférieures $\alpha^{(i)}$ par rapport aux limites supérieures $x^{(i)}$ est encore très arbitraire. Pour nous affranchir de ce caractère arbitraire, et pour pouvoir donner à la notation une tournure plus simple, nous introduirons comme limites inférieures toujours le même point μ et,

(¹) *Voir* p. 53. Il faut remplacer alors dans ce passage R par Q, q par r, t par $p - 1$.

(²) Parmi les équations représentées par l'évanouissement du déterminant précité, $(r+1)(Q - p + r + 1)$ seulement sont indépendantes les unes des autres (p. 56) et, corrélativement, les relations en Θ établies ici dépendent encore aussi les unes des autres. Le fait qu'inversement les relations (7) sont également suffisantes pour entraîner l'annulation de tous les déterminants à $p - r$ dimensions du Tableau précédent se reconnaît aisément.

en outre, des constantes K_h définies par (1)

$$K_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{\mu} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h.$$

Les équations (7) se transforment alors en

$$(8)\quad \Theta\left(\sum_{i=1\;\;k_1,k_2,\ldots,k_{r+\rho-1}}^{i=Q} \int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r} \int_{\mu}^{z^{(k_i)}} du_h + K_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0.$$

Désignant ensuite par $x^{(Q+1)}, x^{(Q+2)}, \ldots, x^{(Q+R)}$ le groupe des R points résiduels des points $x^{(i)}$, on a, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{i=1}^{i=Q} \int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=R} \int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h + 2K_h = 0.$$

Les arguments de la fonction Θ (8) se transforment donc en

$$-\sum_{i=1}^{i=R} \int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h - \sum_{i=1}^{i=r+\rho-1} \int_{\mu}^{x^{(k_i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r} \int_{\mu}^{z^{(k_i)}} du_h - K_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h.$$

Or, comme en toute hypothèse r est inférieur à R, nous pouvons, dans ces formules, faire coïncider $r-1$ des points $z^{(k_i)}$ avec $r-1$ quelconques des points $x^{(Q+i)}$, poser, par exemple,

$$z^{(k_1)} = x^{(Q+1)}, \quad z^{(k_2)} = x^{(Q+2)}, \quad \ldots, \quad z^{(k_{r-1})} = x^{(Q+r-1)}.$$

Si nous écrivons ensuite, pour abréger, z au lieu de $z^{(k_r)}$, l'équation (8) devient

$$(9)\quad \Theta\left(\sum_{i=1\;\;k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}}^{i=R} \int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h + \sum_{i=1}^{=r+\rho-1} \int_{\mu}^{x^{(k_i)}} du_h + \int_{\mu}^{\xi} du_h + K_h - \int_{\mu}^{z} du_h\right) = 0.$$

D'autre part, nous aurions pu aussi, par exemple, faire coïncider $z^{(k_1)}$ avec $x^{(k_1)}$ et non avec $x^{(Q+k_1)}$, changement qui laisserait l'équation (9) invariable pour le reste ; seulement, dans la première intégrale de la seconde somme, interviendrait la limite supérieure

(1) Ce sont là les constantes désignées dans RIEMANN, *loc. cit.*, § 22, par k_μ. (*Voir* les notes des p. 226 et 227.)

$x^{(Q+k_1)}$. Or, comme les points $x^{(k_i)}$ ont été choisis à volonté parmi les Q points $x^{(i)}$, l'équation (9) subsiste alors même qu'on choisirait un autre de ces points pour $x^{(k_1)}$; le point dont il s'agit doit seulement n'être pas compris parmi les points $x^{(k_2)}, x^{(k_3)}, \ldots, x^{(k_{r+\rho-1})}$. On peut donc prendre, pour $x^{(k_1)}$, $Q-r-\rho+2=p-r+1$ autres points $x^{(i)}$ et aussi, d'après la remarque que nous venons de faire, chacun des R points $x^{(Q+i)}$. Considérée comme fonction de $x^{(k_1)}$, la fonction Θ, qui figure au premier membre de (9), s'évanouit en conséquence pour $R+p+1-r=2p-r-\rho$ valeurs différentes de $x^{(k_1)}$. Comme actuellement R est toujours supérieur à r, on a aussi

$$p-1-\rho-r>0,$$

ou

$$2p-\rho-r>p+1.$$

Donc, comme fonction de $x^{(k_1)}$, la fonction Θ s'évanouit pour plus de p valeurs de $x^{(k_1)}$ et par conséquent (¹), en général, *indépendamment de* $x^{(k_1)}$. Un fait analogue a lieu pour $x^{(k_2)}, \ldots, x^{(k_{r+\rho-1})}$; en désignant donc par $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(r+\rho)}$, ξ points quelconques de f, on aura toujours l'équation

$$(10)\quad \Theta\left(\sum_{i=1\;\;k_1,k_2,\ldots,k_{t-1}}^{i=R}\int_\mu^{x^{(Q+i)}}du_h+\sum_{i=1}^{i=r+\rho}\int_\mu^{z^{(i)}}du_h+K_h-\int_\mu^{\xi}du_h\right)=0,$$

laquelle exprime que *par* $R-r+1$ *points quelconques du groupe résiduel* G_R *passe encore une famille* $r+\rho$ *fois infinie de courbes* C_{n-3}. Or on a $R-r+1=p-r-\rho$; si donc $y^{(1)}, \ldots, y^{(p-r-\rho)}$ sont n'importe lesquels des R points $x^{(Q+i)}$, on aura toujours l'équa-

---

(¹) *Voir* RIEMANN, *loc. cit.*, § 22, et *Ueber das Verschwinden der* Θ-*Functionen*, § 2 (*Journal de Crelle*, t. 65). Les considérations présentées dans le § 3 de ce dernier Mémoire, sur quelques cas particuliers des systèmes spéciaux, concordent au fond avec celles du texte; la différence dans l'exposé est uniquement causée par le choix différent des limites inférieures. D'après les § 4 et suivants du Mémoire cité, le cas où la fonction Θ s'évanouit, indépendamment de certaines parties de l'argument, peut toujours se ramener à l'évanouissement de toutes les dérivées d'un ordre déterminé prises par rapport aux arguments.

tion

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \cdots & \varphi_p(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \cdots & \varphi_p(y^{(2)}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1(y^{(p-r-\varrho)}) & \varphi_2(y^{(p-r-\varrho)}) & \cdots & \varphi_p(y^{(p-r-\varrho)}) \\ \varphi_1(z^{(1)}) & \varphi_2(z^{(1)}) & \cdots & \varphi_p(z^{(1)}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1(z^{(r+\varrho)}) & \varphi_2(z^{(r+\varrho)}) & \cdots & \varphi_p(z^{(r+\varrho)}) \end{vmatrix} = 0,$$

car autrement il faudrait qu'il existât une relation linéaire entre les fonctions φ_p, ce qui serait en contradiction avec un théorème connu. En d'autres termes, il y a évanouissement de tous les déterminants mineurs d'ordre $r + \rho$ de la matrice (dans laquelle $y^{(i)} = x^{(Q+i)}$)

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \cdots & \varphi_p(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \cdots & \varphi_p(y^{(2)}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1(y^{(R)}) & \varphi_2(y^{(R)}) & \cdots & \varphi_p(y^{(R)}) \end{Vmatrix}.$$

Cela veut précisément dire que par l'ensemble des R points de G_R passe encore un système $r + \rho$ fois infini de courbes C_{n-3} (p. 54). *Les groupes spéciaux, dont l'un était donné comme groupe* G_Q, *forment conséquemment eux-mêmes un système spécial* $g_Q^{(q)}$, *où*

$$q = r + \rho = \frac{1}{2}(Q - R) + r,$$

ou

$$2(q - r) = Q - R,$$

ce qui est de nouveau l'équation du théorème de Riemann et Roch. On reconnaît encore que q ne peut pas être supérieur à $r + \rho$ en observant que la même marche de démonstration peut être suivie dans l'ordre inverse; la supposition $q = r + \rho + 1$ conduirait donc au nombre $r + 1$ au lieu de r pour la multiplicité des groupes G_R.

Une autre démonstration de notre théorème fondamental se rattache, ainsi qu'il a été mentionné, à la représentabilité des fonctions algébriques par des intégrales de deuxième espèce ([1]).

([1]) *Voir* Roch, *Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen*

Nous énoncerons d'abord le théorème à démontrer sous une forme un peu différente.

La multiplicité des groupes G_R résiduels d'un groupe donné G_Q peut être définie algébriquement ainsi qu'il suit. Faisons passer par G_Q une courbe adjointe quelconque $\psi = 0$ qui découpera le groupe G_R sur f; par ce dernier groupe menons une autre courbe du même ordre, $\chi = 0$, qui peut d'ailleurs elle-même être complètement arbitraire. Alors $\lambda = \frac{\chi}{\psi}$ est une fonction algébrique qui devient infinie aux points G_Q, et la multiplicité q du système $g_Q^{(q)}$ qui répond au même résidu G_R est évidemment inférieure d'une unité au nombre des constantes arbitraires dont on peut encore disposer dans la courbe $\chi = 0$ si aucune autre condition n'est imposée à cette dernière que celle de passer par les points du groupe G_R et d'être adjointe à f. Mais on verra, en examinant la chose de près, que ce nombre dépend du nombre $r+1$ des adjointes C_{n-3} linéairement indépendantes les unes des autres que l'on peut faire passer par le groupe G_Q. Le théorème que nous avons à démontrer est donc le suivant :

Si une fonction algébrique λ devient infiniment grande du premier ordre en Q points G_Q, et qu'en ces Q points puissent s'évanouir $r+1$ fonctions $\varphi(x)$, entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire (en d'autres termes, s'il passe par G_Q un système r fois infini de courbes C_{n-3}), λ renferme le nombre $Q-p+r+2$ de coefficients arbitraires (c'est-à-dire que le groupe G_Q appartient à un système q fois infini, pour lequel $q = Q-p+r+1$).

Pour la démonstration, nous représenterons la fonction λ sous une autre forme. Une fonction qui devient en Q points $x^{(1)}, \ldots, x^{(Q)}$ algébriquement infinie du premier ordre est évidemment donnée par une somme de Q intégrales de deuxième espèce, dont chacune devient infiniment grande en l'un des points $x^{(i)}$ (p. 171), et à cette somme on peut encore adjoindre des combinaisons

---

Functionen (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 372), et, pour le cas le plus simple, Riemann, *loc. cit.*, § 5. C'est encore sur cette représentabilité que repose la démonstration du principe de correspondance de MM. Brill et Cayley par l'application des intégrales abéliennes, démonstration mentionnée t. II, p. 147, note.

linéaires quelconques d'intégrales (partout finies) de première espèce, de sorte qu'on obtient l'expression [1]

$$(11) \qquad \beta_1 \mathfrak{Z}_1 + \beta_2 \mathfrak{Z}_2 + \ldots + \beta_Q \mathfrak{Z}_Q + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p,$$

où les α_i et les β_i désignent des constantes. Sous le symbole $\mathfrak{Z}_i$, on comprend ici l'intégrale normale de deuxième espèce qui devient infinie au point $x^{(i)}$ et est complètement déterminée par ce point, en sorte que

$$d\mathfrak{Z}_i = \frac{\Omega_{n-2}(c x dx)}{n^2 a_{x^{(i)}}^{n-1} a_x . a_x^{n-1} a_c},$$

tandis que la première série des modules de périodicité de $\mathfrak{Z}_i$ s'évanouit et que le module de périodicité de $\mathfrak{Z}_i$ pour la section transverse b_ν est donnée par une *fonction algébrique,* savoir (p. 188)

$$\mathfrak{H}_i^{(\nu)} = \left(\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_k} \alpha_k \right)_i = \left(\frac{\varphi_\nu(x)(c x \alpha)}{n a_x^{n-1} a_c} \right)_i,$$

avec $(a_x^{n-1} a_\alpha)_i = 0$. La somme (11) varie donc, pour une section transverse a_ν de la surface de Riemann décomposée, de $2\pi i \alpha_\nu$, et au contraire, pour une coupure b_ν, de

$$\beta_1 \mathfrak{H}_1^{(\nu)} + \beta_2 \mathfrak{H}_2^{(\nu)} + \ldots + \beta_Q \mathfrak{H}_Q^{(\nu)} + \alpha_1 a_{1\nu} + \alpha_2 a_{2\nu} + \ldots + \alpha_p a_{p\nu}.$$

Si donc on détermine les constantes α_i et β_i encore arbitraires, de telle façon qu'on ait les équations

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0,$$

$$(12) \qquad \beta_1 \mathfrak{H}_1^{(\nu)} + \beta_2 \mathfrak{H}_2^{(\nu)} + \ldots + \beta_Q \mathfrak{H}_Q^{(\nu)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

l'expression (11) représente une fonction qui est continue et uniforme dans toute la surface de Riemann répondant à $f = 0$, et reste aussi partout finie, excepté aux Q points $x^{(i)}$ où elle devient algébriquement infinie au premier ordre; autrement dit, cette expression est une fonction algébrique de x_1, x_2, x_3. Et réciproquement la fonction λ, qui devient elle-même infinie aux mêmes Q points, ne peut différer de l'expression (11) que d'une constante C.

---

[1] Pour limite inférieure de l'intégrale $\mathfrak{Z}_i$, a été choisi un point fixe quelconque de f; la limite supérieure est le point mobile x.

On a en conséquence

$$\lambda \equiv \frac{\chi}{\psi} = \beta_1 \mathfrak{Z}_1 + \beta_2 \mathfrak{Z}_2 + \ldots + \beta_Q \mathfrak{Z}_Q + C. \tag{13}$$

Ici existent entre les grandeurs β_i les p équations (12); $Q-p$ d'entre elles peuvent donc être prises à volonté. Alors la fonction λ renferme encore $Q-p+1$ coefficients arbitraires, c'est-à-dire que les courbes $\chi=0$ déterminent sur f un système $Q-p$ fois infini de groupes G_Q dont l'un est traversé par $\psi=0$. Cela concorde avec le fait qu'en général p intersections sont déterminées par les autres. Si, en particulier, $Q=p+1$, les rapports des grandeurs β_i sont complètement déterminés, et nous avons un système simplement infini de groupes G_{p+1} qui seront donnés par le faisceau $\chi - \lambda\psi = 0$. Il peut toutefois arriver, pour des positions particulières des points x, que les équations (12) ne soient pas indépendantes les unes des autres. Ainsi, par exemple, l'une sera une conséquence des autres si $Q=p$ et si le déterminant de (12) s'évanouit. Mais de ce dernier on peut séparer le produit

$$\left[\frac{(cx\alpha)}{a_x^{n-1}\,a_c}\right]_1 \left[\frac{(cx\alpha)}{a_x^{n-1}\,a_c}\right]_2 \cdots \left[\frac{(cx\alpha)}{a_x^{n-1}\,a_c}\right]_p,$$

lequel, puisque $\mu(x\alpha)_i = a_x^{n-1} a_i$, est indépendant des points $x^{(i)}$. L'équation en question se transforme donc en

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x^{(p)}) & \varphi_2(x^{(p)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(p)}) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Par conséquent, dans ce cas, les $Q=p$ points $x^{(i)}$ sont situés sur une courbe $\varphi=0$, et le nombre des constantes arbitraires dans λ est égal à $Q-p+1+1=2$, c'est-à-dire que, par le résidu de $p-2$ points, on peut encore faire passer un système simplement infini de courbes C_{n-3}, *ce qui concorde avec les résultats connus.* Semblablement, pour une valeur quelconque de Q, le nombre des constantes arbitraires est augmenté de $r+1$ si entre les équations (12) existent $r+1$ relations de la forme

$$C_1\varphi_1(x^{(i)}) + C_2\varphi_2(x^{(i)}) + \ldots + C_p\varphi_p(x^{(i)}) = 0,$$

où les quantités C_i sont des constantes, ou, en d'autres termes, si par les points $x^{(i)}$ passent $r+1$ courbes différentes φ, résultat qui fournit de nouveau le théorème énoncé plus haut, Par là se trouve aussi à nouveau démontré le fait que *tout système spécial peut être traversé par des courbes adjointes* C_{n-3}.

Pour élucider cette matière, nous considérerons un exemple; soit donnée une courbe primitive $f=0$ du cinquième ordre sans point double, d'où $p=6$. Ici toute fonction entière du deuxième ordre des x_i est une fonction φ. La fonction

$$\lambda = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3} = \frac{a_x}{b_x}$$

devient infinie aux cinq points d'intersection de $b_x=0$ avec $f=0$. En ces points s'évanouissent trois fonctions φ indépendantes les unes des autres, savoir : $b_x x_1$, $b_x x_2$, $b_x x_3$; λ renferme donc le nombre $5-6+2+2=3$ de coefficients arbitraires, lesquels sont, par le fait, les grandeurs a_1, a_2, a_3.

XI. — Systèmes de points d'intersection de courbes non adjointes avec la courbe primitive. Extension du problème de l'inversion.

Les recherches géométriques que nous avons précédemment rattachées au théorème d'Abel et au problème de l'inversion se référaient expressément aux points d'intersection de courbes adjointes, et il suffisait, dans cette étude, de considérer des sommes d'intégrales de *première* espèce (p. 203). Dans ce cas, en effet, le nombre p des équations se confond avec le nombre p des relations qui ont lieu entre les points d'intersection, et le problème d'inversion de Jacobi nous a appris la détermination de p intersections par les autres au moyen de ces p équations intégrales, en supposant que l'ordre de la courbe sécante est supérieur à $n-3$. Si l'on a au contraire affaire à des courbes non adjointes, un plus grand nombre de points d'intersection se trouvent déterminés par les autres; aux p équations précitées entre des intégrales de première espèce, qui doivent toujours continuer à avoir lieu, il doit donc se joindre encore d'autres équations, et c'est par l'ensemble de ces deux catégories que le système de points d'intersection est de nouveau caractérisé d'une manière complète. C'est ce qu'on

aperçoit aisément, si l'on imagine que la courbe primitive dégénère graduellement, de façon à acquérir un point double. Alors le genre de la courbe s'abaisse d'une unité, et, comme il a été mentionné plus haut, $p-1$ des p intégrales normales de première espèce se transforment en les intégrales *normales* de *première* espèce de la nouvelle courbe; la $p^{\text{ième}}$ intégrale, au contraire, se transforme (par un choix convenable du système de sections transverses de la surface de Riemann) en une *intégrale normale de troisième espèce* pour la nouvelle courbe, intégrale dont les infinis ξ, η se trouvent réunis l'un à l'autre dans le nouveau point double qui prend naissance (*voir* p. 190). A la place des p équations du problème d'inversion de Jacobi, interviennent donc actuellement, si nous désignons par $\pi = p - 1$ le genre de la nouvelle courbe, les $\pi + 1$ équations

$$\sum_{i=1}^{i=\pi+1} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = v_h \quad (h = 1, 2, 3, \ldots, \pi),$$

$$\sum_{i=1}^{i=\pi+1} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = v_{\pi+1},$$

au moyen desquelles on a de nouveau à déterminer les limites supérieures $x^{(i)}$. On obtient de même q équations où figurent des intégrales de troisième espèce si les courbes considérées ne passent pas par q points doubles de la courbe primitive, et q équations de cette sorte ont effectivement lieu, d'après le théorème d'Abel, pour les intégrales de troisième espèce. Le problème de la détermination des points $x^{(i)}$ au moyen des $p+q$ équations est ce que l'on appelle *l'extension du problème de l'inversion* [1].

La résolution de ce dernier problème ne résulte pas d'ailleurs, sans autre développement, de celle du problème de Jacobi, par le passage aux limites indiqué. Comme, en effet, dans ce passage, une période de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ devient infiniment grande, on ne peut

---

[1] Pour $p=1$, $q=2$ ce même problème a été traité (sous d'autres points de vue) par ROSENHAIN (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XI, p. 376); il l'a été d'une manière générale pour $p=1$, par CLEBSCH (*Journal de Crelle*, t. 64); pour $p=2$, par BRILL, *ibid.*, t. 64; pour les courbes de genre quelconque, par CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 148, 270 et suiv.

plus utiliser immédiatement la fonction Θ employée pour le problème de Jacobi; il faut, au contraire, introduire une autre fonction, qui, au surplus, est une combinaison des fonctions Θ ordinaires et de fonctions exponentielles. Dans ce qui suit, les faits dont il s'agit ([1]), et en particulier les propriétés de cette nouvelle fonction, ne seront exposés que pour le cas de $p = 2$ (nous récrivons p au lieu de π); de cet exemple ressortira suffisamment la méthode suivant laquelle on aura à procéder dans le cas général. Nous nous proposons de faire usage des résultats pour les courbes du quatrième ordre qui ont un point double, et en particulier pour *la détermination de leurs tangentes doubles.*

Nous désignerons les deux intégrales normales de première espèce par u_1, u_2 et l'intégrale normale de troisième espèce qui répond au point double de la courbe C_4 par u_3. Nous prendrons pour base de nos considérations une surface de Riemann à deux feuilles et six points de ramification, telle qu'elle correspond à l'équation de C_4 (p. 177)

$$y^2\varphi_2(x) + y\varphi_3(x) + \varphi_4(x) = 0,$$

si l'on considère y comme fonction de x. Les six points de ramification sont reliés deux à deux par trois sections de ramification; nous tracerons autour de ces derniers les coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, suivant la manière dépeinte dans la *fig.* 1 (p. 180), pour $p = 3$. Au moyen de ces coupures la surface est alors décomposée en une surface simplement connexe dont le bord est précisément formé par ces coupures. Nous désignerons les valeurs d'une fonction φ pour deux points opposés de ce bord par φ^+ et φ^-, distinguant ainsi, suivant la manière connue, un côté positif et un côté négatif de la courbe qui limite ce bord.

En vertu de nos fixations précédentes sur les intégrales normales, pour tout point de la coupure a_1, ont lieu alors les équations

$$(1)\qquad (u_1^+ - u_1^-)_{a_1} = 2\pi i, \quad (u_2^+ - u_2^-)_{a_1} = 0, \quad (u_3^+ - u_3^-)_{a_1} = 0,$$

dans lesquelles la limite inférieure de l'intégrale u_i a été choisie

---

([1]) Pour ce qui concerne le problème d'inversion de Jacobi au cas de $p = 2$, nous renvoyons encore une fois au Mémoire de Prym, déjà cité p. 135.

arbitraire et constante. Nous avons de même, pour les coupures a_2, b_1, b_2,

$$(2)\qquad (u_1^+ - u_1^-)_{a_2} = 0, \quad (u_2^+ - u_2^-)_{a_2} = 2\pi i, \quad (u_3^+ - u_3^-)_{a_2} = 0,$$

$$(3)\quad \begin{cases} (u_1^+ - u_1^-)_{b_1} = a_{11}, & (u_2^+ - u_2^-)_{b_1} = a_{12}, \quad (u_3^+ - u_3^-)_{b_1} = \displaystyle\int_\eta^\xi du_1 = \mathrm{A}_1, \\ (u_1^+ - u_1^-)_{b_2} = a_{21}, & (u_2^+ - u_2^-)_{b_2} = a_{22}, \quad (u_3^+ - u_3^-)_{b_2} = \displaystyle\int_\eta^\xi du_2 = \mathrm{A}_2, \end{cases}$$

et l'on a en même temps, en entendant par $\int_\alpha$ l'intégrale prise le long de la coupure entière α, et en choisissant convenablement le sens dans lequel on prend l'intégrale [1],

$$a_{11} = \int_{a_1} du_1, \quad a_{12} = a_{21} = \int_{a_2} du_1 = \int_{a_1} du_2, \quad a_{22} = \int_{a_2} du_2,$$

$$2i\pi = \int_{b_1} du_1 = \int_{b_2} du_2.$$

Enfin l'intégrale u_3 varie encore de $\pm 2i\pi$ à chaque circuit autour de l'un des infinis ξ, η. Les coupures c_1, c_2 n'entrent plus en considération pour les propriétés de périodicité des intégrales.

Pour la fonction Θ qui dépend des intégrales u_1, u_2 (p. 226),

$$\Theta(u_1, u_2) = \Sigma\Sigma e^{-\frac{1}{2}(r_1^2 a_{11} + 2r_1 r_2 a_{12} + r_2^2 a_{22}) + r_1 u_1 + r_2 u_2},$$

nous avons d'ailleurs, comme on sait, les équations ($\nu = 1, 2$)

$$(4)\qquad (\Theta^+ : \Theta^-)_{a_\nu} = 1, \quad (\Theta^+ : \Theta^-)_{b_\nu} = e^{u_\nu + \frac{1}{2} a_{\nu\nu}},$$

et si l'on pose

$$(5)\qquad v'_\nu = v_\nu + 2m_\nu \pi i + a_{1\nu} q_1 + a_{2\nu} q_2,$$

on a en général

$$(6)\qquad \Theta(v') = \Theta(v) . e^{q_1 v_1 + q_2 v_2 + \frac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22})}.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, NEUMANN, *op. cit.*, p. 126, note.

Actuellement le problème que nous avons à traiter consiste en ceci :

Au moyen des trois équations,

$$(7)\qquad \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h = w_h \quad (h = 1, 2, 3),$$

déterminer les points $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ en fonction des grandeurs données w_1, w_2, w_3. D'après ce qui a été dit sur le problème d'inversion de Jacobi (p. 223), on voit immédiatement que l'on peut obtenir une équation pour les valeurs d'une fonction algébrique $\frac{\varphi}{\psi}$ aux points $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ si l'on réussit à représenter comme fonction des grandeurs w_1, w_2, w_3 la somme des valeurs d'une intégrale de troisième espèce à infinis quelconques ζ, ϑ, c'est-à-dire la somme

$$(8)\qquad \varpi'_{\zeta\vartheta}\binom{x}{c} = \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} d\Pi_{\zeta\vartheta} + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} d\Pi_{\zeta\vartheta} + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} d\Pi_{\zeta\vartheta}.$$

Il s'agit donc uniquement dans ce qui suit de fournir la représentation dont il s'agit.

On y parvient à l'aide d'une fonction $\Theta'(u_1, u_2, u_3)$ ou plus brièvement $\Theta'(u)$, dépendant des trois grandeurs u_1, u_2, u_3 (quoique non symétriquement), et que nous définirons par l'équation suivante

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \Theta'(u) = {} & \Theta\left(u_1 - \frac{1}{2}A_1,\ u_2 - \frac{1}{2}A_2\right).e^{\frac{1}{2}u_3} \\ & + \Theta\left(u_1 + \frac{1}{2}A_1,\ u_2 + \frac{1}{2}A_2\right).e^{-\frac{1}{2}u_3}, \end{aligned}\right.$$

où A_1, A_2 indiquent les intégrales désignées de la même façon dans (3). En ayant égard à (3), on a, pour les coupures b_h, h étant égal à 1, 2,

$$\left[\Theta\left(u_\nu \pm \frac{1}{2}A_\nu\right)^+ : \Theta\left(u_\nu \pm \frac{1}{2}A_\nu\right)^-\right]_{b_h} = e^{u_h \pm \frac{1}{2}A_h + \frac{1}{2}a_{hh}}.$$

En vertu des propriétés de l'intégrale u_3 exprimées dans (3),

nous avons donc, d'après (9),

$$[\log\Theta'(u)^{+} - \log\Theta'(u)^{-}]_{b_h} = u_h + \frac{1}{2}a_{hh} \quad (h=1, 2), \tag{10}$$

et, en définissant ensuite v'_3 par l'équation

$$v'_3 = v_3 + 2gi\pi + q_1 A_1 + q_2 A_2, \tag{11}$$

et v'_1, v'_2, d'autre part, encore par (5), *on trouve, en général,*

$$\left\{\begin{aligned} \log\Theta'(v') = \log\Theta'(v) + q_1 v_1 + q_2 v_2 \\ + \frac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22}) + gi\pi, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

et l'on vérifie aisément que

$$\Theta'(-v) = \Theta'(v). \tag{13}$$

Les propriétés de périodicité de la fonction Θ' sont, d'après cela, complètement analogues à celles de la fonction Θ ordinaire. Au contraire, la première, sur la surface de Riemann décomposée, n'est plus, comme la dernière, une fonction qui soit partout uniforme, car, en découpant la surface le long des sections transverses, un circuit autour de l'un des points ξ, η n'est pas rendu impossible, et un tel circuit change le signe de Θ'. A chaque point de la surface correspondent donc *deux* valeurs de cette fonction; pour les points ξ, η seulement, ces deux valeurs se confondent. En ces points, en effet, u_3 devient infiniment grand, comme $\log(x-\xi)$ ou $\log(x-\eta)$ en $x=\xi$ ou $x=\eta$ respectivement, *et par suite* Θ' *devient algébriquement infini, comme* $(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}$ ou $(x-\eta)^{\frac{1}{2}}$. *Les points* ξ, η *sont donc des points de ramification de la fonction* Θ'; et, pour préciser, cette dernière (étendue sur la surface décomposée) n'a *pas d'autres* points de ramification, ainsi qu'on le reconnaît d'après la manière dont elle est formée, avec les fonctions Θ ordinaires. *Si donc* $\Theta'(u)$ *s'annule en un point de la surface, c'est au moins au premier ordre, c'est-à-dire comme* $x-a$ *pour* $x=a$.

Pour la résolution du problème d'inversion donné dans les équations (7), nous procéderons exactement comme Riemann l'a

fait pour le problème d'inversion de Jacobi ([1]). Nous désignerons par u_1, u_2, u_3 nos trois intégrales dont la limite inférieure commune sera supposée arbitraire et constante, et la limite supérieure comme variable; de plus, v_1, v_2, v_3 désigneront trois constantes données d'une façon quelconque. Nous démontrerons d'abord cette proposition que la *fonction* $\Theta'(u-v)$ *s'évanouit en* trois *points de la surface de Riemann,* à moins qu'elle ne soit identiquement nulle; mais cette dernière circonstance sera exclue pour commencer. D'après les remarques qui viennent d'être faites sur l'évanouissement de Θ', il nous suffit de montrer que le carré de $\Theta'(u-v)$ devient infini du premier ordre en *six* points; mais ces six points doivent précisément consister en trois couples de points coïncidant deux à deux pour que $\Theta'(u-v)$ y puisse devenir infini du premier ordre. Nous désignerons, pour cette raison, dans ce qui suit, par $2V$ le nombre à chercher des points d'évanouissement de $[\Theta'(u-v)]^2$; V est alors le nombre correspondant pour $\Theta'(u-v)$.

La fonction

$$[\Theta'(u-v)]^2 = \Theta^2\left(u_\nu - v_\nu - \frac{1}{2}A_\nu\right)e^{u_3-v_3} + \Theta^2\left(u_\nu - v_\nu + \frac{1}{2}A_\nu\right)e^{-u_3+v_3}$$
$$+ 2\Theta\left(u_\nu - v_\nu - \frac{1}{2}A_\nu\right).\Theta\left(u_\nu - v_\nu + \frac{1}{2}A_\nu\right)$$

est d'ailleurs, sur la surface décomposée par les coupures a, b, c, partout continue et uniforme; aux points ξ et η seulement elle devient algébriquement infinie du *premier* ordre. On a donc, d'après une proposition connue,

$$(14)\qquad \int d\log[\Theta']^2 = 2\int\frac{d\Theta'}{\Theta'} = 2i\pi(2V-1-1) = 4i\pi(V-1)$$

si l'on prend la seconde intégrale sur le bord entier de la surface décomposée, c'est-à-dire dans les deux directions le long de toutes les coupures a, b, c. Cette intégrale est, d'autre part, égale à

$$2\int d(\log\Theta'^{+} - \log\Theta'^{-})$$

prise suivant une seule direction le long des coupures a, b, c. Mais

---

([1]) *Voir* RIEMANN, *op. cit.*, § 22, et pour de plus amples développements, NEUMANN et PRYM, *loc. cit.*

il résulte de (10) et (12) pour les coupures a et c

$$\log\Theta'(u-v)^{+}-\log\Theta'(u-v)^{-}=0,$$

et pour les coupures b

$$\int[d\log\Theta'(u-v)^{+}-d\log\Theta'(u-v)^{-}]_{b_h}=\int_{b_h}du_h=2\pi i.$$

Nous tirons conséquemment de (14)

$$\int d\log\Theta'=4i\pi=2i\pi(\mathrm{V}-1),$$

où $\mathrm{V}=3$. C. Q. F. D.

Il s'agit maintenant de déterminer plus à fond comment ces trois points d'évanouissement de la fonction $\Theta'(u-v)$ dépendent des constantes données v_1, v_2, v_3. Nous aurons à montrer que *cette dépendance est représentée par les équations* (7) *de notre problème d'inversion, à la condition d'ajouter à leurs seconds membres certaines constantes* (ou, ce qui revient au même sans passer par l'intermédiaire de ces constantes, à la condition de déterminer convenablement les limites inférieures $c^{(i)}$). Les trois points d'évanouissement de $\Theta'(u-v)$ coïncideraient alors avec les points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ qui figurent dans (7), et en conséquence nous les désignerons immédiatement par ces lettres.

Sur le bord de la surface décomposée par les lignes a, b, c, nous prendrons quelque part trois points $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$. De $\zeta^{(1)}$ nous mènerons un lacet l_1 enveloppant le point $x^{(1)}$ et revenant ensuite à $\zeta^{(1)}$; nous joindrons de même les points $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ respectivement aux points $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$ par des lacets l_2, l_3, et nous imaginerons que la surface soit coupée le long des lignes l_1, l_2, l_3; enfin nous mènerons encore une coupure a_3 autour des points ξ, η, et nous la joindrons par une autre coupure à la courbe de bord de notre surface. Dans la surface ainsi décomposée, $\log\Theta'(u-v)$ est une fonction partout continue et uniforme du point variable x. Il en est de même pour les intégrales u_1, u_2, et conséquemment existe la relation

$$\mathrm{W}=\int\log\Theta'(u-v).du_\nu=0 \quad (\nu=1, 2),$$

si l'on étend l'intégrale qui figure dans le premier membre à toute la courbe du bord de la surface, c'est-à-dire dans les deux direc-

tions le long de toutes les coupures a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b_1, b_2, l_1, l_2, l_3. D'un autre côté, cette intégrale est égale à la somme des intégrales

$$W = \int [\log\Theta'(u-v)^+ - \log\Theta'(u-v)^-]\,du_\nu$$

prise sur toutes les lignes a, b, c, l. Mais nous avons, le long des lignes,

$$\begin{aligned}
l_1, l_2, l_3, &\quad \log\Theta'^+ - \log\Theta'^- = 2i\pi,\\
c_1, c_2, &\quad \log\Theta'^+ - \log\Theta'^- = 0,\\
a_h, &\quad \log\Theta'^+ - \log\Theta'^- = 2g_h i\pi \quad (h = 1, 2, 3),\\
b_\nu, &\quad \log\Theta'^+ - \log\Theta'^- = u_\nu - v_\nu + \frac{1}{2}a_{\nu\nu} + 2h_\nu i\pi.
\end{aligned}$$

Les quantités g et h indiquent ici des nombres entiers qu'il est nécessaire d'ajouter, parce que les différences de $\log\Theta'$ ne sont définies qu'à un multiple près de $2i\pi$. Si nous désignons maintenant par $\alpha_\nu^{(1)}$, $\alpha_\nu^{(2)}$, $\alpha_\nu^{(3)}$ les valeurs de u_ν aux points $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$, par $a_\nu^{(1)}$, $a_\nu^{(2)}$, $a_\nu^{(3)}$ celles aux points $x^{(i)}$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{l_k} dW = 2i\pi \int_{\xi^{(h)}}^{x^{(h)}} du_\nu = (a_\nu^{(h)} - \alpha_\nu^{(h)})\,2i\pi,\\
&\int_{a_h} dW = 2\pi i g_\nu \int_{a_h} du_\nu = 2g_\nu i\pi . a_{h\nu} \quad (h = 1, 2),\\
&\int_{a_3} dW = 2i\pi g_3 \int_{a_3} du_\nu = 0,\\
&\int_{b_h} dW = \int_{b_h} u_h^- du_\nu + \left(\frac{1}{2}a_{hh} - v_h + 2h_h \pi i\right)\int_{b_h} du_\nu.
\end{aligned}$$

Ici $\int_{b_h} du_\nu$ est égal à $2\pi i$ ou 0 suivant que $h = \nu$ ou $h \gtrless \nu$; l'intégrale $\int_{b_h} u_h^- du_\nu$ dépend seulement de la valeur initiale constante de l'intégrale u_ν; les intégrales $\alpha_\nu^{(i)}$ sont de même indépendantes des $x^{(i)}$. Si donc nous désignons par k_ν de pareilles constantes indépendantes des $x^{(i)}$, il vient finalement, pour $\nu = 1, 2$,

$$0 = W \equiv (a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + a_\nu^{(3)} - v_\nu + 2h_\nu i\pi + g_1 a_{1\nu} + g_2 a_{2\nu} + k_\nu)\,2i\pi.$$

On établit de la même manière pour u_3 une équation complète-

ment analogue. Il vient donc enfin, à part un système complet de périodes (pour $\nu = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned} v_\nu &= a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + a_\nu^{(3)} + k_\nu \\ &= w_\nu + k_\nu - b_\nu^{(1)} - b_\nu^{(2)} - b_\nu^{(3)} = w_\nu + \varkappa_\nu, \end{aligned}$$

relation où $b_\nu^{(i)}$ désigne la valeur de l'intégrale u_ν aux points $c^{(i)}$, et où de plus les quantités $\varkappa_\nu$ sont de nouvelles constantes, et les quantités w_ν doivent coïncider avec les grandeurs données dans les équations (7). Nous avons par conséquent ce théorème :

Si l'on fait les arguments de la fonction Θ' définie par (9) *égaux à $u_\nu - w_\nu - \varkappa_\nu$, les $\varkappa_\nu$ étant des constantes d'une certaine espèce, et les w_ν étant données par* (7), *la fonction Θ' s'annule aux trois points $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$.*

Pour déterminer exactement les constantes $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, nous procéderons de la manière suivante [1]. La limite inférieure constante de l'intégrale étant désignée par μ, la fonction

$$\Theta'\left(\int_\mu^x du_h - \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h - \varkappa_h\right)$$

s'évanouira pour $x = x^{(1)}$, d'après la proposition que nous venons d'énoncer, indépendamment des points $x^{(2)}, x^{(3)}$; ou, en d'autres termes, *la fonction*

$$\Theta'\left(\int_\mu^{c^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h - \varkappa_h\right) \tag{15}$$

s'évanouit indépendamment de la situation particulière des points $x^{(2)}, x^{(3)}$.

Les points $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ sont encore ici tout à fait arbitraires; seulement il faut toujours faire varier convenablement en même temps qu'eux les grandeurs $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$. Nous déterminerons ces dernières par la construction suivante. La tangente de C_4 au point μ coupe encore C_4 en deux points; par ces points faisons passer une conique qui touche de plus C_4 en trois points et ne passe pas

---

[1] Cette détermination des constantes est imitée de celle donnée par WEBER (*Journal de Crelle*, t. 70) pour le problème d'inversion de Jacobi. Le résultat concorde avec celui obtenu par une autre voie (pour le cas général) par CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 184.

par le point double. Il existe des coniques de cette espèce en nombre fini, et *nous ferons d'abord coïncider les points* $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ *avec les trois points de contact de l'une d'elles d'abord arbitrairement choisie*. Cette conique doit toutefois être une conique proprement dite, c'est-à-dire ne pas se décomposer en la tangente du point μ lui-même et en une tangente double de C_4. La ligne qui joint $x^{(3)}$ et $x^{(2)}$ coupe encore C_4 en deux points que nous désignerons par $y^{(2)}, y^{(3)}$. On a alors, d'après le théorème d'Abel, pour $h = 1, 2, 3$,

$$(16)\quad 2\int_{c^{(1)}}^{\mu} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h = 0.$$

Il résulte de là, puisque Θ' est une fonction paire, que, conjointement avec l'équation donnée par l'évanouissement de (15), a lieu aussi l'équation

$$(17)\quad \Theta'\left(\int_{\mu}^{c^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h + \varkappa_h\right) = 0,$$

et cela indépendamment de $y^{(2)}$, $y^{(3)}$. On peut donc, dans la dernière équation, poser aussi $y^{(2)} = x^{(2)}, y^{(3)} = x^{(3)}$, et alors l'équation (17) se confond avec (15), au signe près de $\varkappa_h$.

Au lieu de poser $x = x^{(1)}$, on aurait pu aussi prendre x égal à $x^{(2)}$ ou à $x^{(3)}$. Il résulte de là que, indépendamment du signe de la quantité $\varkappa_h$, la fonction

$$\Theta'\left(\int_{\mu}^{x} du_h - \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \pm \varkappa_h\right)$$

s'évanouit pour $x = x^{(1)}$, $x = x^{(2)}$, $x = x^{(3)}$. Or cela n'est possible que si les arguments de la fonction Θ' qui dépend de $\varkappa$ et de celle qui dépend de $-\varkappa$ diffèrent uniquement d'un multiple des systèmes de périodes, c'est-à-dire que nous avons

$$\varkappa_1 = \frac{1}{2}\left(2\mu_1\pi i + \mu_2.0 \;+ \mu_3.0 \;+ \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{22}\right),$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{2}\left(\mu_1.0 \;+ 2\mu_2\pi i + \mu_3.0 \;+ \gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22}\right),$$

$$\varkappa_3 = \frac{1}{2}\left(\mu_1.0 \;+ \mu_2.0 \;+ 2\mu_3 i\pi + \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_3\right),$$

les nombres μ, γ ayant des valeurs données d'une manière complètement déterminée ($\equiv$ o mod. 2) et étant précisément définis par cette circonstance que la fonction $\Theta'\left(\int_\mu^x du_h + \varkappa_h\right)$ s'évanouisse aux trois points $c^{(i)}$.

Si l'on fait passer par les deux autres points où la tangente de μ rencontre C_4 une autre conique tangente à C_4 aux points $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, on a, d'après le théorème d'Abel,

$$(18) \qquad \int_{c^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{\alpha^{(3)}} du_h \equiv \frac{1}{2} k_h,$$

k_h désignant un système déterminé de périodes. La fonction $\Theta'\left(\int_\mu^x + \frac{1}{2} k_h + \frac{1}{2} \varkappa_h\right)$ s'évanouit alors aux trois points $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$. Mais *par là se trouve spécialement caractérisé le système de points $\alpha^{(i)}$ pour lequel $k_h = \varkappa_h$ et qui possède en conséquence la propriété que la fonction $\Theta'\left(\int_\mu^x du_h\right)$ devient nulle aux points* $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$. Il est donc avantageux de choisir ce système déterminé de points pour les limites inférieures de l'intégrale dans les équations (7), ainsi que nous le ferons par la suite (conformément à nos remarques précédentes sur le problème de Jacobi (p. 225 et suiv.). Faisons encore observer que *la conique tangente en ces points $\alpha^{(i)}$ ainsi caractérisés ne peut pas, en général, se décomposer en la tangente de μ et en une tangente double de* C_4. Alors, en effet, le point μ serait compris parmi les points $\alpha^{(i)}$, et il faudrait que la fonction $\Theta'\left(\int_\mu^x du_h\right)$ s'annulât pour $x = \mu$, c'est-à-dire qu'on eût l'équation

$$\Theta'(0, 0, 0) = 0,$$

ce qui, évidemment, n'a pas lieu en général.

Nous reviendrons incessamment sur les tangentes doubles de C_4. Auparavant nous ferons usage des résultats précédemment obtenus pour la solution du problème d'inversion donné dans les équations (7). On en vient très simplement à bout si l'on emploie la

fonction Θ'. En effet, on vérifie aisément l'exactitude de l'équation

$$(19)\qquad \mathfrak{T}'_{\zeta\mathfrak{z}}\binom{x}{\alpha} = \log \frac{\Theta'\left(w_h - \int_\mu^{\mathfrak{z}} du_h\right).\Theta'\left(\int_\mu^{\zeta} du_h\right)}{\Theta\left(w_h - \int_\mu^{\zeta} du_h\right).\Theta'\left(\int_\mu^{\mathfrak{z}} du_h\right)},$$

où

$$\mathfrak{T}'_{\zeta\mathfrak{z}}\binom{x}{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=3}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\zeta\mathfrak{z}},\quad w_h = \sum_{i=1}^{i=3}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h;$$

il suffit, pour cet objet, de comparer les propriétés de périodicité, ainsi que les zéros et les infinis, dans les deux membres de l'équation. *Par là, d'après des remarques précédentes* (p. 270), *se trouve résolu le problème de l'inversion étendu.*

On peut faire usage de ce problème pour *la détermination de courbes de contact qui ne passent pas par le point double,* ce qui n'a pas besoin d'être développé plus longuement (*voir* p. 229 et suiv.). Observons seulement que, dans le cas actuel, ainsi qu'on l'aperçoit facilement, les équations

$$(20)\qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \equiv \frac{1}{r}(v_h + k_h),$$

où les v_h désignent des constantes et les k_h des systèmes de périodes, admettent $r^5 = r^{2p+1}$ solutions [1]. Pour $r = 2$, il résulte de là qu'*il existe* 31 *systèmes composés chacun d'un nombre simplement infini de coniques proprement dites qui ne passent pas par le point double et touchent la courbe* C_4 *partout où elles la rencontrent;* car, parmi les 32 systèmes primitivement trouvés, est compris celui des droites dont chacune compte double.

Un intérêt particulier s'attache ici encore au *problème des tangentes doubles* déjà traité au cas de $p = 3$ et à la solution duquel nous passons maintenant. Si $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ ont de nouveau la signification indiquée et que $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ doivent être les points de

---

[1] Ce nombre est au contraire encore égal à r^{2p} si le point double se transforme en un point de rebroussement, car alors l'intégrale de troisième espèce se transforme en une intégrale de deuxième espèce, et cette dernière n'a plus de période logarithmique.

contact d'une tangente double, cette dernière forme, ensemble avec la tangente de μ, une conique pour laquelle, suivant le théorème d'Abel, ont lieu, semblablement à (18), les équations

$$(21)\quad \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h \equiv \frac{1}{2} k_h \quad (h = 1, 2, 3),$$

les k_h étant des systèmes de périodes. Mais ici nous avons *trois* équations pour la détermination des *deux* inconnues $x^{(1)}$, $x^{(2)}$; si ces trois équations doivent coexister, il faut qu'une relation entre les constantes qui y figurent soit satisfaite. Or cette dernière est immédiatement donnée par la proposition démontrée plus haut et d'après laquelle la fonction

$$\Theta'\left(\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h\right)$$

s'évanouit indépendamment des points $y^{(1)}$, $y^{(2)}$. Si donc nous posons $y^{(1)} = x^{(1)}$, $y^{(2)} = x^{(2)}$, nous avons la condition moyennant laquelle est satisfaite l'équation

$$\Theta'\left(\int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h\right) \equiv \Theta'\left(\frac{1}{2} k_h\right) = 0.$$

Nous devons donc nous demander s'il existe des systèmes de demi-périodes $\frac{1}{2}k_1$, $\frac{1}{2}k_2$, $\frac{1}{2}k_3$ pour lesquelles, comme arguments de la fonction Θ', le premier membre de cette dernière équation s'annule. Posons

$$(22)\quad \begin{cases} k_\nu = 2i\pi m_\nu + q_1 a_{1\nu} + q_2 a_{2\nu} & (\nu = 1, 2), \\ k_3 = 2i\pi g \;\; + q_1 A_1 + q_2 A. \end{cases}$$

La fonction $\Theta'\left(\frac{1}{2}k_h\right)$ se forme alors de $\Theta'\left(-\frac{1}{2}k_h\right)$ lorsqu'on augmente les arguments de cette dernière d'un système entier de périodes k_h, et par suite il vient, d'après (12),

$$\begin{aligned} \log\Theta'\left(\frac{1}{2}k_h\right) &= \log\Theta'\left(-\frac{1}{2}k_h\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(q_1^2 a_{11} + 2q_1q_2a_{12} + q_2^2 a_{22} - q_1k_1 - q_2k_2\right) + gi\pi \\ &= \log\Theta'\left(-\frac{1}{2}k_h\right) - \pi i(m_1q_1 + m_2q_2 - g), \end{aligned}$$

ou

$$\Theta'\left(\frac{1}{2}k_h\right) = \Theta'\left(-\frac{1}{2}k\right).(-1)^{m_1q_1+m_2q_2-g}.$$

Mais, comme Θ' est une fonction paire, on a aussi

$$\Theta'\left(\frac{1}{2}k_h\right) = \Theta'\left(-\frac{1}{2}k_h\right).$$

Ces deux équations ne peuvent subsister ensemble que si

$$m_1q_1 + m_2q_2 - g$$

est un nombre pair, *ou bien si l'on a*

$$\Theta'\left(\frac{1}{2}k_h\right) = 0.$$

Mais cette dernière circonstance se présente toujours si

$$m_1q_1 + m_2q_2 - g$$

est un nombre impair, c'est-à-dire si

$$m_1q_1 + m_2q_2 - g \equiv 1 \pmod{2}. \tag{23}$$

C'est donc seulement dans le cas où la congruence (23) *est satisfaite que les équations* (21) *peuvent servir à la détermination des tangentes doubles.*

Par là nous obtenons le nombre des tangentes doubles et leur groupement respectif [1]. Quant à leur nombre, il est égal à seize, ce qui est d'accord avec les formules de Plücker (t. II, p. 68), et, pour préciser, nous avons, pour les tangentes doubles désignées par les chiffres 1, 2, ..., 16, les systèmes suivants de valeurs des nombres m, q :

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
g......	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
m_1.....	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
q_1......	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
m_2.....	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
q_2......	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1

[1] La recherche des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre à point double a été donnée par BRILL (*Math. Annalen*, t. VI, p. 66), comme annexe à son étude, pour le cas de $p = 2$, de l'extension du problème de l'inversion. Comparer la note de la p. 267; *voir* aussi ROCH (*Journal de Crelle*, t. 66, p. 114 et suiv.).

Les points de contact de ces seize tangentes doubles sont aussi, ainsi qu'il a déjà été observé, compris parmi les solutions des équations

$$(24) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \equiv \frac{1}{2} k_h,$$

qui déterminent les points de contact des coniques de contact passant par les autres points d'intersection de la tangente de μ. On peut ici précisément faire coïncider l'un des points $x^{(i)}$ avec le point μ si la condition (23) est satisfaite à l'égard des nombres m, q, g qui entrent dans les grandeurs k_h. Si cette condition n'est pas satisfaite, on obtient néanmoins, au moyen des équations (24), les points de contact d'une conique proprement dite. *Le nombre de ces derniers est par suite égal à* $2^{2\cdot 2+1} - 16 = 16$.

On parvient (comme dans le cas de $p = 3$) à d'autres propositions *sur le groupement respectif des tangentes doubles*, en partant des systèmes de coniques de contact (actuellement non adjointes). Les points de contact $x^{(1)}, \ldots, x^{(4)}$ d'une courbe de cette espèce se déterminent, $c^{(1)}, \ldots, c^{(4)}$ étant les points de rencontre de C_4, avec une droite quelconque (laquelle comptée deux fois donne une conique de contact), se déterminent, disons-nous, au moyen des équations

$$(25) \qquad \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{c^{(4)}}^{x^{(4)}} du_h \equiv \frac{1}{2} k_h,$$

les quantités k_h étant encore définies par (22). Il est, d'ailleurs, plus avantageux pour la solution du problème de l'inversion de prendre pour base d'autres équations dans lesquelles les points $\alpha^{(i)}$ qui répondent à μ entrent comme limites inférieures. Or, par les deux autres points d'intersection de la tangente de μ passent deux courbes du quatrième ordre dont l'une consiste en la conique tangente en $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ comptée deux fois, l'autre est formée par la conique tangente en $x^{(1)}, \ldots, x^{(4)}$ et par la tangente de μ comptée deux fois. Nous pouvons donc aussi déterminer les points $x^{(i)}$ au moyen des trois équations suivantes :

$$(26) \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(4)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h \equiv \frac{1}{2} k_h,$$

où les k_h sont différents des systèmes de périodes ainsi désignés

dans (25), quand même tous deux appartiendraient aux mêmes limites supérieures. Dans ces équations, on peut toujours prendre encore un point x à volonté; les trois autres, d'après les lois du problème de l'inversion étendu, se trouvent par là fixés; en effet, les équations (26) se confondent avec les équations (20), à la condition qu'on choisisse convenablement v_h dans ces dernières. Il existe, comme nous l'avons déjà énoncé, *trente et un systèmes de coniques de contact proprement dites;* il faut y joindre le système doublement infini des droites comptant double dont les points d'intersection s'obtiennent au moyen de (26) pour $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. En fait, toute droite forme, ensemble avec la tangente de μ, une conique, en sorte qu'on a, d'après le théorème d'Abel,

$$(27)\quad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(4)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h = 0.$$

Si maintenant une semblable conique de contact, dont les systèmes de périodes k_h sont donnés par les nombres m_1, m_2, q_1, q_2, g, doit se décomposer en deux tangentes doubles caractérisées respectivement par les nombres $m'_1, m'_2, q'_1, q'_2, g'$ et $m''_1, m''_2, q''_1, q''_2, g''$, on aura nécessairement (mod. 2)

$$m_1 \equiv m'_1 + m''_1, \quad m_2 \equiv m'_2 + m''_2, \quad g \equiv g' + g'',$$
$$q_1 \equiv q'_1 + q''_1, \quad q_2 \equiv q'_2 + q''_2,$$
$$m'_1 q'_1 + m'_2 q'_2 - g' \equiv 1, \quad m''_1 q''_1 + m''_2 q''_2 - g'' \equiv 1.$$

On reconnaît facilement par là que *chacun des trente et un systèmes, à l'exception de celui déterminé par les nombres* $q_1 = q_2 = m_1 = m_2 = 0$, $g = 1$, *comprend quatre couples de tangentes doubles (par conséquent huit tangentes doubles); et ces trente systèmes se rangeront ensuite deux à deux suivant la valeur de g, de telle sorte que deux systèmes comprennent toujours la totalité des seize tangentes doubles. Chaque tangente double peut, par conséquent, suivant la manière dont elle est groupée avec les autres, être considérée comme appartenant à quinze systèmes,* comme le fait apercevoir le tableau suivant. Ce tableau a été simplifié par la désignation des tangentes doubles au moyen des nombres 1, 2, ..., 16 introduits dans le tableau précédent. Les chiffres romains se rapportent aux quinze couples, de deux systèmes de co-

niques chacun, qui correspondent aux quinze couples de systèmes de valeurs m, q, g, les derniers nombres différant dans chaque couple uniquement par la valeur de g. Les tangentes doubles placées l'une sous l'autre forment deux à deux un couple ; à côté des chiffres romains sont placées entre parenthèses les valeurs des nombres correspondants m_1, q_1, m_2, q_2, tandis que les valeurs de g sont notées à gauche sur le bord. On obtient le tableau :

	I. (0011).	II. (1101).	III. (1110).	IV. (1100).	V. (1001).
$g=1$	1 4 7 10 11 12 14 16	2 4 6 8 11 14 15 16	3 9 5 4 11 15 16 13	4 1 2 3 11 12 14 13	5 6 7 3 11 12 14 16
$g=0$	2 5 6 13 3 8 9 14	3 5 7 12 1 10 9 13	1 6 8 12 2 7 10 14	5 6 7 15 9 8 10 16	1 2 4 13 8 10 9 15

	VI. (0110).	VII. (1000).	VIII. (1010).	IX. (0101).	X. (0100).
$g=1$	6 5 2 10 11 12 15 13	7 5 1 8 11 14 15 13	8 9 2 7 11 12 16 13	9 8 10 3 11 12 14 15	10 9 1 6 11 14 16 13
$g=0$	1 3 4 14 9 7 8 16	2 3 4 12 9 6 10 16	1 3 4 14 5 10 6 15	1 2 4 13 6 7 5 16	2 3 4 12 5 8 7 15

	XI. (1111).	XII. (0010).	XIII. (0001).	XIV. (1011).	XV. (0111).
$g=1$	2 10 7 3 13 15 16 14	2 5 9 1 12 15 16 14	3 1 8 6 12 13 15 16	10 8 4 5 12 14 16 13	7 6 4 9 12 14 15 13
$g=0$	1 5 8 11 4 6 9 12	3 6 7 11 4 10 8 13	2 5 9 11 4 7 10 14	1 2 3 11 7 6 9 15	1 2 3 11 10 8 5 16

Mais, dans chacun de ces quinze systèmes de coniques est compris, en outre des quatre couples de tangentes doubles proprement dites, un couple de tangentes improprement dites (comptant au surplus double), savoir un couple de deux des quatre tangentes menées du point double à C_4. Comme, en effet, toute conique d'un système de cette espèce touche la courbe C_4 partout où elle la rencontre, la conique tangente en ξ doit nécessairement être tangente en même temps en η, car toute courbe qui renferme ξ passe aussi

par η, et cela n'est possible que si la conique a elle-même un point double au point double. Or le point de contact y d'une tangente issue du point double se détermine, comme on sait, au moyen des deux équations ($\nu = 1, 2$)

$$(28)\qquad \int_{\beta^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\mu} du_\nu \equiv \frac{1}{2}(2m'_\nu i\pi + q'_1 a_{1\nu} + q'_2 a_{2\nu}) = \frac{1}{2}k'_\nu,$$

si $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$ sont les points associés au point μ de telle façon que la fonction $\Theta\left(\int_\mu^x du_1, \int_\mu^x du_2\right)$ s'annule pour $x = \beta^{(1)}$ et $x = \beta^{(2)}$, et si, entre les nombres figurant dans le second membre, est satisfaite la condition qui exprime l'évanouissement de la fonction $\Theta\left(\int_{\beta^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\beta_{(2)}}^{\mu} du_\nu\right)$, savoir (p. 240)

$$(29)\qquad m'_1 q'_1 + m'_2 q'_2 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Pour étudier d'ailleurs les équations (28) en connexion avec les équations (21) et (26), il est nécessaire d'y choisir les limites inférieures d'une façon semblable. Or on a, d'après le théorème d'Abel ($\nu = 1, 2$),

$$(30)\qquad \int_{\beta^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\alpha^{(3)}} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\alpha^{(2)}} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\alpha^{(2)}} du_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{R}_\nu,$$

R_1, R_2 désignant des systèmes de périodes. Par suite, les équations (28) se transforment en

$$(31)\qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\alpha^{(2)}}^{\xi} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\alpha^{(2)}}^{\eta} du_\nu \equiv \frac{1}{2}(k'_\nu - \mathrm{R}_\nu).$$

Si, de plus, k''_ν est un autre système de périodes dont les nombres satisfont à la condition (29), et z le point de contact correspondant, il existe entre z et k''_ν une équation tout à fait analogue, dans laquelle entre le même système de périodes R_ν. Par addition des deux il vient

$$(32)\qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\alpha^{(1)}}^{z} du_\nu + \int_{\alpha^{(2)}}^{\xi} du_\nu + \int_{\alpha^{(2)}}^{\eta} du_\nu + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_\nu \equiv \frac{1}{2}(k'_\nu + k''_\nu),$$

équation qui se forme de (26) pour $y = x^{(1)}$, $z = x^{(3)}$, $\xi = x^{(2)}$,

$\eta = x^{(1)}$, $k'_\nu + k''_\nu = k_\nu$. Mais la détermination des points y, z se fait uniquement par le problème de l'inversion ordinaire et est en conséquence complètement indépendante de l'intégrale de troisième espèce u_3, indépendante, par suite aussi, de la valeur des nombres g', g'', g. Ces derniers peuvent être pris arbitrairement égaux à zéro ou à l'unité. En effet, la somme correspondante d'intégrales de troisième espèce prendrait une valeur indéterminée. Il résulte de là que *chacune des tangentes issues du point double doit être comptée deux fois comme tangente double, que deux quelconques des trente systèmes de coniques qui appartiennent à un couple (c'est-à-dire diffèrent seulement par la valeur de g) comprennent le même couple de ces tangentes doubles improprement dites, et que celui-ci compte double comme conique de contact dans chacun des deux systèmes* (¹).

Désignant maintenant par $(m_1 q_1 m_2 q_2)$ les nombres qui répondent, en vertu de (28) et (29), à la tangente qui touche la courbe en y, nous avons les six tangentes [courbes de contact du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre]

1′	2′	3′	4′	5′	6′
(0011)	(1101)	(1110)	(1100)	(1011)	(0111),

et celles-ci se répartissent sur les quinze couples de systèmes de coniques, d'après le tableau :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2′3′	1′3′	1′2′	5′6′	3′6′	2′5′	1′5′	2′6′

IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
3′5′	1′6′	1′4′	3′4′	2′4′	4′6′	4′5′

Le trente et unième système de coniques de contact renferme

(¹) En effet, dans chacun des systèmes de coniques de contact appartenant à une courbe du quatrième ordre sont nécessairement compris *six* couples de coniques décomposables, car l'équation d'un tel système, si $P = 0$, $R = 0$ sont deux coniques qui en font partie, est de la forme

$$P + 2\lambda Q + \lambda^2 R = 0.$$

Alors $PR - Q^2 = 0$ est l'équation de la courbe C_4 et $Q = 0$ celle d'une conique qui passe par les points de contact de $P = 0$, $R = 0$ avec C_4. (*Voir*, par exemple, SALMON, *Higher plane curves*, n° 251).

chacune des six tangentes issues du point double comme courbe dégénérée en une droite double, ainsi qu'on le vérifie immédiatement; il contient donc les mêmes tangentes improprement dites que le trente-deuxième système répondant à la même valeur de g qui se compose des droites du plan comptant double.

Les tangentes doubles improprement dites ont encore des relations particulières avec les systèmes de coniques de contact adjointes; nous n'insisterons néanmoins pas sur ce sujet. On peut d'ailleurs établir facilement sur la situation des points de contact des propositions semblables à celles données au cas de $p = 3$. Ainsi, par exemple, les huit points de contact de deux couples de tangentes doubles du même système sont situés sur une conique, et ainsi de suite.

D'après ces explications détaillées relatives au cas de $p = 2$, on a des aperçus pour traiter, en général, le problème de l'inversion étendu. On peut énoncer, sous la forme suivante, la question qui se présente alors :

Soient p sommes chacune de $p + q$ intégrales normales de première espèce similaires ayant pour limites supérieures les points inconnus $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p+q)}$ et les points connus $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(p+q)}$ pour limites inférieures égales à des quantités données v_1, $v_2, \ldots, v_p$; soient en outre q sommes chacune de $p + q$ intégrales normales de troisième espèce similaires ayant les mêmes limites égales à des grandeurs données $w_1, w_2, \ldots, w_q$; soient enfin $\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$; $\xi^{(2)}$, $\eta^{(2)}$; ... $\xi^{(q)}$, $\eta^{(q)}$ respectivement les infinis de ces dernières intégrales; ou, en d'autres termes, soient données les $p + q$ équations suivantes :

$$(33) \qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_1 = v_1, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_p = v_p,$$

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(1)}\eta^{(1)}} = w_1, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(q)}\eta^{(q)}} = w_q.$$

Le problème est celui-ci : Représenter les coordonnées des points limites supérieurs $x^{(i)}$ comme fonctions des grandeurs v, w, ou

représenter en cette qualité les coefficients d'une équation

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q} + N_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q-1} + N_2\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q-2} + \ldots + N_{p+q} = 0,$$

dont les $p+q$ racines sont les valeurs d'une fonction algébrique $\frac{\varphi}{\psi}$ ayant son numérateur et son dénominateur du même degré qui correspondent aux limites supérieures.

Sous cette forme le problème est d'abord indépendant de la question de savoir si les infinis $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sont réunis ou non deux à deux en un point double. Toutefois le premier cas présente pour les applications géométriques une importance excessive, et le second peut s'y ramener par transformation unidéterminative de la courbe primitive. Un intérêt particulier s'attache encore à la recherche des courbes d'ordre $n-3$ qui ne passent pas par q points doubles de la courbe originaire et touchent celle-ci partout où elles la rencontrent, une relation devant alors être satisfaite entre les grandeurs $v_1, \ldots, v_p$; $w_1, \ldots, w_q$ du problème d'inversion, c'est-à-dire entre les demi-systèmes de périodes correspondantes, si le problème doit être résoluble. On pourra venir à bout de toutes ces questions en procédant d'une manière analogue à ce qui a été fait au cas de $p=2$. Mais des considérations particulières sont toujours nécessaires, si parmi les q points doubles se trouvent compris des points de rebroussement [1].

XII. — Courbes du genre $p = 0$.

Dans nos précédentes recherches relatives à la Géométrie sur une courbe algébrique, nous avions d'abord exclu les cas $p=0$ et $p=1$, au moins dans tous les problèmes qui se référaient à des courbes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre, car il n'existe pas de systèmes de courbes de cette espèce si p est inférieur à 2. Ces deux cas vont être examinés l'un après l'autre dans ce qui suit. Nous allons, en particulier, nous occuper avec soin de la représentation de la courbe primitive, au moyen d'un paramètre, représentation que nous exposerons aussi en détail

---

[1] *Voir* Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 296.

pour le cas de $p = 2$ et en général pour les courbes hyperelliptiques.

Nous commencerons par les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre du genre $p = 0$, lesquelles possèdent par suite $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles ou cuspidaux [1]. Nous nous proposons de montrer d'abord que *ces courbes peuvent toujours être transformées unidéterminativement en une ligne droite* [2].

Nous considérerons les points doubles et $2n-3$ autres points arbitrairement choisis sur la courbe comme points de base d'un faisceau de courbes d'ordre $n-1$. Ce faisceau est ainsi complètement déterminé, car par les $\left[\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-1\right]$ points fixes les constantes d'une courbe d'ordre $n-1$ sont données, à l'exception d'une seule. Cette dernière constante qui demeure arbitraire étant désignée par λ, l'équation du faisceau est de la forme

$$\varphi + \lambda\psi = 0, \tag{1}$$

φ et ψ étant des fonctions d'ordre $n-1$ qui, égalées à zéro, représentent deux des courbes du faisceau.

En joignant l'équation (1) à l'équation $f = 0$ de la courbe donnée et à une équation $u_x = 0$, nous obtenons par l'élimination des x_i le produit des $n(n-1)$ points d'intersection en coordonnées-lignes, produit qui est du degré n par rapport à λ et du degré $n(n-1)$ par rapport aux quantités u_i. Or les $n(n-1)$ points d'intersection se composent des $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles et cuspidaux fixes de f comptés chacun deux fois, des $2n-3$ points fixes choisis arbitrairement et de

$$n(n-1)-(n-1)(n-2)-(2n-3) = 1$$

points d'intersection mobiles, c'est-à-dire dépendant de λ. Du ré-

---

(1) Nous admettrons toujours que ces points soient séparés. Pour ce qui concerne les singularités élevées, *voir* ce qui a été dit t. II, p. 210 et suiv., et t. III, p. 22.

(2) Il n'en est toutefois ainsi qu'à l'égard des courbes irréductibles; ainsi, par exemple, une cubique générale C_3 forme, ensemble avec une droite, une courbe du quatrième ordre de genre zéro; cependant les coordonnées de ses points ne peuvent s'exprimer rationnellement au moyen d'un paramètre. Quant à la méthode de transformation que nous allons appliquer, *voir* Clebsch et Gordan, *op cit.*, p. 67 et suiv.

sultat de l'élimination, on doit donc pouvoir isoler un facteur du degré $[n(n-1)-1]$ par rapport aux u_i et ne renfermant pas λ; et la séparation une fois effectuée, l'équation d'élimination prend la forme

$$f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3 = 0,$$

les f_i étant des fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré en λ. C'est là l'équation du point d'intersection mobile; ses coordonnées sont donc entre elles dans le même rapport que les quantités f_i, *et l'on a les coordonnées x_i du point d'intersection mobile représentées comme fonctions rationnelles du $n^{\text{ième}}$ degré d'un paramètre λ à l'aide des équations*

$$(2) \qquad \rho x_1 = f_1, \quad \rho x_2 = f_2, \quad \rho x_3 = f_3,$$

ρ étant un facteur arbitraire.

Posant encore $\lambda = \frac{y_1}{y_2}$, nous avons les quantités x_i représentées comme fonctions homogènes du $n^{\text{ième}}$ ordre de y_1, y_2. Considérons maintenant y_1, y_2, y_3 comme coordonnées d'un point de la courbe transformée; nous pouvons envisager les x_i comme des fonctions des y_i dans lesquelles $y_3 = 0$; cette dernière équation est donc l'équation de la courbe transformée, c'est-à-dire que celle-ci est une droite comme cela devait être.

Nous pouvons ainsi transformer toute courbe à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles ou cuspidaux en une droite à l'aide de la transformation (2) *qui est du $n^{\text{ième}}$ ordre et unidéterminativement réversible.*

Que réciproquement toute courbe telle que les coordonnées de ses points puissent se représenter rationnellement au moyen d'un paramètre est du genre $p = 0$, cela est évident; car cette représentation n'est précisément pas autre chose que la transformation unidéterminative de la courbe en une droite [1]; or, dans une

---

[1] Cependant, si la représentation paramétrique rationnelle est donnée pour une courbe, il ne s'ensuit pas qu'à tout point de la courbe réponde une valeur unique du paramètre; mais on peut alors toujours introduire un nouveau paramètre tel qu'il en soit ainsi. (*Voir*, sur ce sujet, LÜROTH, *Math. Annalen*, t. IX, p. 163.)

transformation semblable le genre se conserve. Mais on peut, en allant plus loin, se proposer le problème qui consiste à établir en fait les équations dont dépendent les différents points singuliers, et à déterminer ainsi directement les nombres plückériens : c'est ce dont nous allons nous occuper dans ce qui suit, et nous verrons au surplus dans cette étude comment le théorème d'Abel et en général les propositions sur les systèmes de points d'intersection se comportent ici [1].

Actuellement, en admettant qu'une courbe soit donnée par les équations (2) ou, pour $\lambda = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho x_1 = f_1(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv a_\varkappa^n, \\ \rho x_2 = f_2(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv a_\varkappa'^n, \\ \rho x_3 = f_3(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv a_\varkappa''^n, \end{cases}$$

nous supposons d'abord que les fonctions f_i soient indépendantes les unes des autres, et avant tout *que f_3 ne soit pas représentable sous la forme $kf_1 + lf_2$*. Conformément à la nature des choses, le premier problème qui se présente est de déduire des équations (3) l'équation de la courbe elle-même en coordonnées-points. Cette dernière est ici de l'ordre n, car les paramètres des points de rencontre d'une droite quelconque u avec elle sont les racines de l'équation de degré n,

$$(4) \qquad u_1 a_\varkappa^n + u_2 a_\varkappa'^n + u_3 a_\varkappa''^n = 0.$$

L'équation cherchée [2] s'obtient par l'élimination de $\rho, \varkappa_1, \varkappa_2$

---

[1] *Voir* en particulier, pour ce qui suit, Clebsch, *Ueber diejenigen ebenen Curven deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind* (*Journal de Crelle*, t. 64). Quelques propriétés de ces courbes avaient déjà été traitées par Salmon dans la première édition de son *Traité des Courbes d'ordre élevé*. (*Voir* aussi le *Calcul barycentrique* de Möbius.) Nous ne nous occupons pas dans le texte de ce que deviennent les propositions relatives aux systèmes spéciaux de points (p. 53 et suiv. et p. 104 et 113) au cas de $p = 0$. Ces propositions peuvent ici être traitées très simplement, parce que (par suite de la représentation paramétrique) on opère seulement sur le terrain binaire, c'est-à-dire sur une droite (*voir* à ce sujet Brill, *Math. Annalen*, t. V, p. 395).

[2] Le résultat de l'élimination ne donne autre chose que la relation qui, suivant une remarque faite t. I, p. 275, doit exister entre trois formes binaires quelconques; seulement, dans le texte, les trois formes sont supposées du même ordre.

entre les équations (3); nous montrerons au surplus incessamment comment cette élimination peut être effectivement réalisée dans les cas les plus simples, c'est-à-dire dans ceux de $n=2$ et $n=3$. Mais pour les coordonnées-lignes de la courbe primitive elle-même, on peut indiquer une loi de formation générale. Si, en effet, une droite u doit être tangente à la courbe, il faut que deux racines $\varkappa_1 : \varkappa_2$ de l'équation (4) deviennent égales l'une à l'autre, ou, en d'autres termes, *l'équation de la courbe primitive en coordonnées-lignes est donnée par l'évanouissement du discriminant de l'expression qui figure dans le premier membre de* (4). On peut, d'autre part, représenter d'une manière simple les coordonnées d'une tangente dans leur dépendance du paramètre du point de contact. En effet, pour un point $x+dx$ voisin de x, nous avons, d'après (3),

$$\sigma dx_1 = a_\varkappa^{n-1} a_{d\varkappa}, \quad \sigma dx_2 = a_\varkappa'^{n-1} a'_{d\varkappa}, \quad \sigma dx_3 = a_\varkappa''^{n-1} a''_{d\varkappa}.$$

Les coordonnées de la ligne qui joint x à $x+dx$ sont donc

$$\begin{aligned} u_3 = \rho\sigma(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) &= a_\varkappa^{n-1} a_\varkappa'^{n-1}(a_\varkappa a'_{d\varkappa} - a'_\varkappa a_{d\varkappa}) \\ &= (\varkappa d\varkappa).(aa')a_\varkappa^{n-1} a_\varkappa'^{n-1}, \ldots, \end{aligned}$$

ou, puisque le facteur $(\varkappa d\varkappa)$ entre de la même manière dans les trois coordonnées,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau u_1 &= (a'a'')a_\varkappa'^{n-1} a_\varkappa''^{n-1} \equiv \mathfrak{I}_{23}, \\ \tau u_2 &= (a''a\,)a_\varkappa''^{n-1} a_\varkappa^{n-1} \equiv \mathfrak{I}_{31}, \\ \tau u_3 &= (aa'\,)a_\varkappa^{n-1}\, a_\varkappa'^{n-1} \equiv \mathfrak{I}_{12}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations correspondent dualistiquement aux équations (3); *elles donnent la représentation paramétrique des tangentes de la courbe. On obtient donc, à un facteur près, l'équation de cette dernière en coordonnées-points, en égalant à zéro le discriminant de l'expression*

$$x_1 \mathfrak{I}_{23} + x_2 \mathfrak{I}_{31} + x_3 \mathfrak{I}_{12}.$$

Actuellement, comme le point de contact d'une tangente est toujours situé sur cette tangente, on a l'identité

$$(6) \qquad f_1 \mathfrak{I}_{23} + f_2 \mathfrak{I}_{31} + f_3 \mathfrak{I}_{12} = 0,$$

facile aussi à obtenir directement.

Sous le bénéfice de cette équation, pour le cas de $n=2$, en posant

$$\mathfrak{I}_x^2 = x_1\mathfrak{I}_{23} + x_2\mathfrak{I}_{31} + x_3\mathfrak{I}_{12} = \mathfrak{I}_0\varkappa_1^2 + 2\mathfrak{I}_1\varkappa_1\varkappa_2 + \mathfrak{I}_2\varkappa_2^2,$$

on obtiendrait, par élimination de ρ, $\varkappa_1^2$, $2\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_2^2$ entre (3) et (6), l'équation de la conique sous la forme

$$\begin{Vmatrix} x_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ x_2 & a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ x_3 & a''_0 & a''_1 & a''_2 \\ 0 & \mathfrak{I}_0 & \mathfrak{I}_1 & \mathfrak{I}_2 \end{Vmatrix} = 0,$$

a_i, a'_i, a''_i désignant les coefficients des trois formes f_1, f_2, f_3. Cette élimination s'effectue plus élégamment si l'on forme préalablement l'équation en coordonnées-lignes. Cette dernière est donnée par l'évanouissement du discriminant de l'équation

$$u_1 a_x^2 + u_2 a'^2_x + u_3 a''^2_x = 0,$$

c'est-à-dire par

$$(7)\quad D_{11}u_1^2 + D_{22}u_2^2 + D_{33}u_3^2 + 2D_{23}u_2u_3 + 2D_{31}u_3u_1 + 2D_{12}u_1u_2 = 0,$$

les D_{ik} désignant les invariants formés avec deux des formes f_i, en sorte que

$$D_{12} = (ab)^2,\quad D_{12} = (aa')^2,\quad D_{13} = (aa'')^2,\quad \ldots.$$

Par suite, d'après des propositions connues de la théorie des coniques, l'équation en coordonnées-points de la conique représentée par les équations (3) *au cas de* $n=2$, *ou autrement dit le résultat de l'élimination de* ρ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *entre les équations* (3), *est* [1]

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & x_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & x_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

---

[1] Pour $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$, $x_3 = f_3$, c'est là une identité. (*Voir* CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig, 1872, p. 205.) En vertu de (5) et (7) ont lieu aussi entre les f_i et les $\mathfrak{I}_{ik}$ les trois identités

$$\rho f_i = D_{i1}\mathfrak{I}_{23} + D_{i2}\mathfrak{I}_{31} + D_{i3}\mathfrak{I}_{12},$$

Pour $n = 3$, nous avons à observer que par tout point $\varkappa$ de la courbe passe, en outre de sa propre tangente, celle du point $\varkappa + d\varkappa$, c'est-à-dire que conjointement avec (6) a lieu aussi l'équation

$$f_1 d\mathfrak{J}_{23} + f_2 d\mathfrak{J}_{31} + f_3 d\mathfrak{J}_{12} = 0.$$

Mais comme on peut toujours prendre $d\varkappa_2 = 0$ ou $d\varkappa_1 = 0$, nous pouvons remplacer cette équation et l'équation (6) par les deux suivantes :

$$(9)\qquad \begin{cases} f_1 \dfrac{\partial \mathfrak{J}_{23}}{\partial \varkappa_1} + f_2 \dfrac{\partial \mathfrak{J}_{31}}{\partial \varkappa_1} + f_3 \dfrac{\partial \mathfrak{J}_{12}}{\partial \varkappa_1} = 0 \\ f_1 \dfrac{\partial \mathfrak{J}_{23}}{\partial \varkappa_2} + f_2 \dfrac{\partial \mathfrak{J}_{31}}{\partial \varkappa_2} + f_3 \dfrac{\partial \mathfrak{J}_{12}}{\partial \varkappa_2} = 0. \end{cases}$$

Si donc nous posons

$$\mathfrak{J}_{23} x_1 + \mathfrak{J}_{31} x_2 + \mathfrak{J}_{12} x_3 = \mathfrak{J}_0 \varkappa_1^4 + 4\mathfrak{J}_1 \varkappa_1^3 \varkappa_2 + 6\mathfrak{J}_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 + 4\mathfrak{J}_3 \varkappa_1 \varkappa_2^3 + \mathfrak{J}_4 \varkappa_2^4,$$

nous obtenons pour $n = 3$ l'*équation de la courbe du troisième ordre,* par élimination des grandeurs ρ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, entre (3) et (9), sous la forme [1]

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & x_1 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 & x_2 \\ a''_0 & a''_1 & a''_2 & a''_3 & x_3 \\ \mathfrak{J}_0 & \mathfrak{J}_1 & \mathfrak{J}_2 & \mathfrak{J}_3 & 0 \\ \mathfrak{J}_1 & \mathfrak{J}_2 & \mathfrak{J}_3 & \mathfrak{J}_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous allons maintenant établir les équations dont dépend la détermination des nombres plückériens pour nos courbes. Ces équations sont évidemment indépendantes de la situation du système de coordonnées sur lequel est basée la représentation para-

---

où l'on trouve pour ρ, en continuant le calcul, la valeur

$$-R = -(aa')(a'a'')(a''a).$$

Là se trouve le sens géométrique du dualisme étudié par CLEBSCH, *loc. cit.*, p. 418, et qui existe entre trois formes quadratiques et leur déterminant fonctionnel. Le principe appelé *principe de la translation de Hesse* (*Voir* HESSE, *Journal de Crelle*, t. 66) trouve également, dans les équations (3) au cas de $n = 2$, son expression algébrique la plus simple (*Voir* aussi la note de la page 303, t. II).

[1] *Voir* ROSENOW : *Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpuncte,* Breslau, 1873, p. 48.

métrique (3). Elles ne peuvent donc varier que d'un facteur (qui est une puissance du déterminant de la substitution) si l'on prend pour base, au lieu des formes f_i, des combinaisons linéaires quelconques de ces formes, et les choses se passent, en général, d'une manière analogue pour les équations qui déterminent des propriétés invariantes relatives à des systèmes de points sur la courbe ou qui déterminent ces systèmes eux-mêmes. *Les premiers membres de toutes les équations de cette espèce sont donc des combinants des trois formes binaires f_1, f_2, f_3*. Il est d'ailleurs évident qu'ils doivent être des *invariants simultanés* de ces dernières formes, parce que la représentation paramétrique ne dépend pas essentiellement du système de coordonnées binaires $\varkappa_1 : \varkappa_2$.

Pour déterminer d'abord les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles de la courbe primitive, nous partirons de la condition pour que trois points $\varkappa$, λ, μ soient en ligne droite, condition qui se présente ici sous la forme

$$(11) \qquad R \equiv \begin{vmatrix} f_1(\varkappa) & f_2(\varkappa) & f_3(\varkappa) \\ f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant qui figure dans le premier membre s'annule pour $\varkappa = \lambda$ ou $\lambda = \mu$ ou $\mu = \varkappa$; il est donc nécessairement divisible par $(\varkappa\lambda)$, $(\lambda\mu)$ et $(\mu\varkappa)$, c'est-à-dire que nous pouvons poser

$$R = (\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) \,.\, R',$$

R' dépendant symétriquement de $\varkappa$, λ, μ et étant du degré $n-2$ par rapport à chacune de ces variables. Soit donc symboliquement [1]

$$R' = \alpha_\varkappa^{n-2}\, \beta_\lambda^{n-2}\, \gamma_\mu^{n-2},$$

de telle sorte que $n-2$ symboles α n'aient leur sens effectif que conjointement avec $n-2$ symboles β et $n-2$ symboles γ. Les points $\varkappa$, λ étant donnés, on trouve, au moyen de l'équation

---

[1] Sur la formation de l'expression R', *voir* Gordan, *Math. Annalen*, t. V, p. 118 et suiv. Pour les raisonnements employés dans ce qui suit à la détermination des nombres plückériens, consulter aussi une note de Weyr, *Zeitschrift* de Schlömilch, t. XVI.

$R' = 0$, les $n-2$ autres points μ où la ligne joignant $\varkappa$ et λ rencontre la courbe, et pour $\varkappa = \lambda$ l'équation $\alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\varkappa^{n-2}\gamma_\mu^{n-2} = 0$ fournit pour chaque point donné μ les points de contact des $2n-4$ tangentes que l'on peut mener de μ à la courbe.

Or les points doubles de la courbe sont les points pour lesquels deux systèmes de valeurs ($\varkappa_i$ et λ_i) du paramètre donnent les mêmes valeurs des coordonnées, en sorte que

$$(12) \qquad \sigma f_1(\varkappa) = f_1(\lambda), \quad \sigma f_2(\varkappa) = f_2(\lambda), \quad \sigma f_3(\varkappa) = f_3(\lambda).$$

Ici la ligne qui joint les deux points (superposés) $\varkappa$ et λ devient indéterminée; *l'équation* $\alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_\mu^{n-2} = 0$ *a donc lieu indépendamment de* μ_1, μ_2; c'est-à-dire que nous avons le système de $n-1$ équations

$$(13) \quad \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_1^{n-2} = 0, \quad \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_1^{n-3}\gamma_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_2^{n-2} = 0,$$

entre lesquelles nous pouvons éliminer les $n-1$ grandeurs λ_1^{n-2}, $\lambda_1^{n-3}\lambda_2, \ldots, \lambda_2^{n-2}$; si donc nous posons

$$\rho_{i,k} = \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_1^{n-k-2}\beta_2^k\gamma_1^{n-i-2}\gamma_2^i,$$

un point double $\varkappa$ est déterminé par l'équation [1]

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} & \cdots & \rho_{0,n-2} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} & \cdots & \rho_{1,n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \rho_{n-2,0} & \rho_{n-2,1} & \cdots & \rho_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Celle-ci est du degré $(n-1)(n-2)$ en $\varkappa$. On est conduit à la même équation, écrite en λ, si l'on élimine entre les équations (13) les grandeurs $\varkappa_i$; *deux* racines de (14) donnent donc le même point double. *Conséquemment, il existe en fait* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *points doubles* [2], *lesquels sont déterminés par* (14); *et cette dernière*

---

[1] Sur la formation de cette équation, *voir* aussi Haase, *Math. Annalen*, t. II p. 525.

[2] Le *nombre* des points doubles s'obtient également simplement par la considération du système surabondant d'équations

$$\begin{Vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \end{Vmatrix} = 0,$$

qui est équivalent aux équations (12).

équation peut être ramenée à une équation du degré $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *et à* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *équations du second degré.* Ce dernier fait résulte, d'après des théorèmes connus, de ce que de deux racines connexes, l'une peut être calculée rationnellement si l'autre est donnée.

Pour la détermination des points d'inflexion de notre courbe, nous avons à établir la condition que trois points voisins x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ soient en ligne droite. Or, comme on peut toujours prendre $dx_2 = 0$, on a pour un point d'inflexion x

$$\begin{vmatrix} a_x^n & a_x'^n & a_x''^n \\ a_x^{n-1}a_1 & a_x'^{n-1}a_1' & a_x''^{n-1}a_1'' \\ a_x^{n-2}a_1^2 & a_x'^{n-2}a_1'^2 & a_x''^{n-2}a_1''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$\Delta \equiv a_x^{n-2}a_x'^{n-2}a_x''^{n-2}\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2'^2 & a_2''^2 \\ a_1a_2 & a_1'a_2' & a_1''a_2'' \\ a_1^2 & a_1'^2 & a_1''^2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv (aa')(a'a'')(a''a)a_x^{n-2}a_x'^{n-2}a_x''^{n-2} = 0. \tag{15}$$

Le nombre des points d'inflexion est donc égal à $3(n-2)$ (¹).

D'un autre côté, les points d'inflexion doivent pouvoir se tirer de l'équation $R' = 0$ pour $x = \lambda = \mu$. Nous pouvons donc aussi poser

$$\Delta = \alpha_x^{n-2}\beta_x^{n-2}\gamma_x^{n-2}. \tag{16}$$

Les tangentes doubles se trouvent par l'interversion dualistique

---

(¹) Les points d'inflexion deviennent par suite indéterminés si le combinant Δ est identiquement nul; *mais alors les équations* (3) *ne donnent plus la représentation paramétrique d'une courbe du* $n^{\text{ième}}$ *ordre.* L'évanouissement de Δ exprime, en effet, que les $(n-2)^{\text{ièmes}}$ polaires d'un point quelconque x sont les couples de points d'une involution, t. II, p. 249, c'est-à-dire qu'on a, indépendamment de x et λ,

$$a_x^{n-2}a_\lambda^2 = \alpha \,.\, a_x'^{n-2}a_\lambda'^2 + \beta \,.\, a_x''^{n-2}a_\lambda''^2.$$

De là résulte en particulier, pour $x = \lambda$, $f_1 = \alpha f_2 + \beta f_3$, en sorte que l'élimination de x entre les équations (3) donne pour résultat $x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3 = 0$; *la courbe se compose donc d'une droite* (*n fois représentée*), cas que nous avons déjà exclu, p. 288.

du procédé employé à la recherche des points doubles, c'est-à-dire par la permutation respective des formes f_1, f_2, f_3 avec les déterminants fonctionnels $\vartheta_{23}, \vartheta_{31}, \vartheta_{12}$. On obtient par là d'abord une équation du degré $(2n-3)(2n-4)$ répondant à l'équation (14). Mais il est à remarquer que dans cette dernière équation deux racines connexes (c'est-à-dire fournissant le même point double) doivent devenir égales l'une à l'autre si l'un des points doubles dégénère en un point de rebroussement. Maintenant, comme chaque tangente d'inflexion doit être considérée corrélativement comme la dégénération d'une tangente double, l'équation ci-dessus de degré $(2n-3)(2n-4)$ fournira en même temps que les tangentes doubles les tangentes d'inflexion comptées deux fois; c'est-à-dire que de son premier membre on pourra isoler le facteur Δ^2. Comme d'ailleurs deux racines de l'équation restante se réfèrent à *la même* tangente double, *le nombre des tangentes doubles est égal à*

$$\frac{1}{2}[(2n-3)(2n-4)-6(n-2)] = 2(n-2)(n-3).$$

Si l'on établit au moyen des déterminants fonctionnels ϑ_{ik} la forme Δ' qui répond dualistiquement à la forme Δ et qui est du degré $3(2n-4)$, l'équation $\Delta'=0$ devrait, d'après les précédentes observations, fournir les points de rebroussement de f; mais ceux-ci n'existent pas sur la courbe primitive en général (c'est-à-dire si les fonctions f_i sont choisies indépendantes les unes des autres), tandis que d'autre part il n'y aurait aucun point d'inflexion si les fonctions ϑ_{ki} ont été choisies indépendantes les unes des autres. Les points de rebroussement doivent donc être absorbés tous par les tangentes d'inflexion, c'est-à-dire que *le combinant* Δ' *doit être proportionnel au carré du combinant* Δ [1].

L'équation (14) doit, ainsi qu'il vient d'être observé, avoir une racine double lorsqu'un point double se transforme en un point

[1] Et pour préciser l'on a, d'après l'équation (19), p. 207, dans la *Théorie des formes binaires*, de CLEBSCH, $\Delta' = \frac{1}{2}\Delta^2$; les calculs effectués dans ce passage pour $n=2$ restent en effet exacts si l'on ne fait que multiplier toutes les équations par des facteurs symboliques du type $a_x^{n-2}\, a_x'^{n-2}\, a_x''^{n-2}$; il faut encore dans l'équation (19), *loc. cit.*, remplacer les indices 3, 4, 5, 6, respectivement par 2, 3, 3, 1.

de rebroussement. Mais, d'autre part, lorsque le discriminant de (14) s'annule, on a à distinguer deux cas différents suivant que les deux racines de cette équation sont des racines connexes ou que ce sont des racines non connexes. Au dernier cas, il ne se produit pas de point de rebroussement, mais deux points doubles infiniment rapprochés, tels que les deux tangentes de chacun d'eux se confondent en une. Cette circonstance n'apporte à la *classe* aucune autre réduction que celle qui appartient d'une manière générale aux deux points doubles en question; mais une réduction a lieu dans le second cas, où l'on obtient en fait un point de rebroussement. On est, en effet, conduit à poser alors, dans les équations (12), $\lambda_1 = \varkappa_1 + \varepsilon$, $\lambda_2 = \varkappa_2$, en sorte que, par exemple, la première de ces équations devient

$$(\sigma - 1) a_x^n = n\varepsilon \,.\, a_x^{n-1} a_1, \tag{17}$$

ou, pour $\lambda_2 = \varkappa_2 + \eta$, $\lambda_1 = \varkappa_1$,

$$(\sigma - 1) a_x^n = n\eta \,.\, a_x^{n-1} a_2. \tag{18}$$

Mais il résulte de ces deux équations, si l'on raisonne de même à l'égard de f_2 et f_3,

$$\left\{\begin{aligned} \zeta a_x^{n-1} a_1 &= a_x^{n-1} a_2 \; (\equiv \alpha_1), \\ \zeta a_x'^{n-1} a_1' &= a_x'^{n-1} a_2' \; (\equiv \alpha_2), \\ \zeta a_x''^{n-1} a_1'' &= a_x''^{n-1} a_2'' \; (\equiv \alpha_3). \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Actuellement, l'équation en coordonnées-lignes de la courbe primitive serait donnée par l'évanouissement du discriminant de (4), c'est-à-dire par l'élimination de $\varkappa$ entre les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} u_1 a_x^{n-1} a_1 + u_2 a_x'^{n-1} a_1' + u_3 a_x''^{n-1} a_1'' = 0, \\ u_1 a_x^{n-1} a_2 + u_2 a_x'^{n-1} a_2' + u_3 a_x''^{n-1} a_2'' = 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Mais, en vertu de (19), l'une de celles-ci est la suite de l'autre, et le discriminant doit alors nécessairement renfermer le facteur $u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3$ par l'évanouissement duquel les deux équations (20) sont satisfaites, les grandeurs α_i étant d'après (3) les coordonnées du point de rebroussement dont il s'agit. *Si donc $\varkappa$ est le nombre des points de rebroussement, la classe de la courbe primitive est égale à* $2(n-1) - \varkappa$. On détermine aisément, d'une

manière semblable, l'influence d'un point de rebroussement sur les autres nombres de Plücker ([1]).

Si nous considérons maintenant *les points d'intersection de la courbe primitive avec une autre courbe,* nous serons de nouveau conduits au théorème d'Abel; mais, comme la courbe primitive dérive d'une droite en vertu des équations (3), les intégrales qui s'y rapportent ne renferment plus aucune irrationnalité et peuvent être évaluées d'une manière explicite. En entrant dans les détails, on trouve que les faits en question se passent de la manière suivante :

Nous poserons, pour abréger, $\varkappa_1 = \lambda$ et $\varkappa_2 = 1$; nous désignerons ensuite par $a^{(1)}$, $b^{(1)}$; $a^{(2)}$, $b^{(2)}$; $a^{(3)}$, $b^{(3)}$; ... $a^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}$, ν étant égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, les couples de valeurs de λ qui répondent aux divers points doubles. On trouvera les intersections de la courbe donnée avec une courbe d'ordre m

$$(21) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

en substituant dans cette équation aux quantités x_i leurs valeurs (3). On obtient alors une équation en λ de la forme

$$(22) \quad \Omega(\lambda) \equiv c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_{nm}) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dans laquelle les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{nm}$ du paramètre correspondent aux mn intersections. Si maintenant nous faisons dans (22) λ successivement égal à $a^{(i)}$, puis à $b^{(i)}$, les x restent invariables dans cette opération, à part un facteur commun $c^{(i)}$; par conséquent, φ et Ω restent invariables, sauf le facteur $[c^{(i)}]^m$, et l'on obtient

$$\Omega[a^{(i)}] = [c^{(i)}]^m \Omega[b^{(i)}]$$

ou

$$(23) \qquad \frac{[a^{(i)} - \lambda_1][a^{(i)} - \lambda_2]\ldots[a^{(i)} - \lambda_{nm}]}{[b^{(i)} - \lambda_1][b^{(i)} - \lambda_2]\ldots[b^{(i)} - \lambda_{nm}]} = [c^{(i)}]^m,$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$, ν étant égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Ces ν équations sont, pour la théorie des courbes que nous étu-

---

([1]) *Voir* Clebsch, *Journal de Crelle,* loc. cit.

dions, de la plus haute importance. Elles se présentent ici à la place du système des $\nu + p$ équations qui, pour le cas général, proviennent du théorème d'Abel et qui, à l'égard d'une courbe de genre p à ν points doubles, expriment que mn points de la courbe sont situés sur une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre ne passant pas par les points doubles (p. 286). En effet, comme pour $p = 0$ il n'existe pas d'intégrale de première espèce, il ne reste plus ici que les ν équations relatives aux intégrales de troisième espèce; ces intégrales, considérées en particulier, sont respectivement égales à $\log \frac{a^{(i)} - \lambda}{b^{(i)} - \lambda}$ pour $i = 1, 2, \ldots, \nu$; et dans (23) figurent précisément les sommes de semblables intégrales logarithmiques ([1]). *Si donc mn points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{mn}$ de la courbe représentée par* (3) *doivent être situés sur une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre ne passant pas par les ν points doubles, il est nécessaire et suffisant pour cela que leurs paramètres satisfassent aux équations* (23).

Ces dernières subissent une légère modification si l'un des points doubles (par exemple $a^{(i)}, b^{(i)}$) se transforme en un point de rebroussement. On a alors $a^{(i)} = \alpha^{(i)}$, $b^{(i)} = \alpha^{(i)} + \varepsilon$, $c^{(i)} = 1 - \varkappa^{(i)}\varepsilon$, ε étant infiniment petit, d'où

$$\frac{a^{(i)} - \lambda}{b^{(i)} - \lambda} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha^{(i)} - \lambda} \cdots.$$

L'équation (23) se change donc en la suivante (*voir* pour le cas de $n = 3$, t. II, p. 344):

$$(24) \qquad \frac{1}{\alpha^{(i)} - \lambda_1} + \frac{1}{\alpha^{(i)} - \lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{(i)} - \lambda_{nm}} = m\varkappa^{(i)}.$$

Les sommes d'intégrales de troisième et de seconde espèce qui, égalées à zéro, tiennent respectivement la place des équations (24) et (25), ainsi qu'il a été mentionné dernièrement, se trouvent en différentiant la première équation logarithmiquement, la seconde à la manière ordinaire et en intégrant ensuite respectivement depuis $\rho^{(i)}$ jusqu'à λ et depuis $\sigma^{(i)}$ jusqu'à λ. On obtient ainsi, au

---

([1]) *Voir*, pour $n = 3$, t. II, p. 337 et 344.

lieu de (23) et (24) (pour $\mu = mn$), les équations

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\rho^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{[a^{(i)} - b^{(i)}]d\lambda}{[a^{(i)} - \lambda][b^{(i)} - \lambda]} + \int_{\rho^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{[a^{(i)} - b^{(i)}]d\lambda}{[a^{(i)} - \lambda][b^{(i)} - \lambda]} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \int_{\rho^{(i)}}^{\lambda_\mu} \frac{[a^{(i)} - b^{(i)}]d\lambda}{[a^{(i)} - \lambda][b^{(i)} - \lambda]} = 0, \\ &\int_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{[\alpha^{(i)} - \lambda]^2} + \int_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{[\alpha^{(i)} - \lambda]^2} + \cdots + \int_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_\mu} \frac{d\lambda}{[\alpha^{(i)} - \lambda]^2} = 0; \end{aligned}\right.$$

et les limites inférieures ρ, σ se déterminent par comparaison avec (23), (24) au moyen des équations

$$(26)\qquad \frac{a^{(i)} - \rho^{(i)}}{b^{(i)} - \rho^{(i)}} = [c^{(i)}]^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{\alpha^{(i)} - \sigma^{(i)}} = \frac{\varkappa^{(i)}}{n}.$$

En changeant le contour d'intégration, on peut dans le second membre de ces équations transformer o en $2h\pi\sqrt{-1}$, de sorte que ces sommes d'intégrales admettent la période $2i\pi$; les intégrales de deuxième espèce ont au contraire toujours la période o, parce qu'elles possèdent des points donnant des infinis qui ne coïncident que par couples. Il en est ainsi conformément au fait que dans (23) on peut poser dans le second membre $[c^{(i)}]^m e^{2hi\pi}$ à la place de $[c^{(i)}]^m$, tandis qu'un changement semblable apporté au second membre de (24) n'altère point la deuxième des équations qui en résulte par différentiation ordinaire. On peut, d'après cela, énoncer le théorème suivant :

Dans une courbe d'ordre n à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *points doubles ou cuspidaux, si* $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ *sont les paramètres d'un point double (pour* $\varkappa_1 = \lambda$, $\varkappa_2 = 1$), *la somme des intégrales similaires* $[a^{(i)} - b^{(i)}]\int_\rho^\lambda \frac{d\lambda}{[a^{(i)} - \lambda][b^{(i)} - \lambda]}$ *est égale à* $2h\pi\sqrt{-1}$; *au contraire, si* $\alpha^{(i)}$ *est le paramètre d'un point de rebroussement, la somme des intégrales* $\int_\sigma^\lambda \frac{d\lambda}{[\alpha^{(i)} - \lambda]^2}$ *est égale à zéro ; les sommes sont ici étendues à tous les paramètres qui correspondent aux points d'intersection de la courbe primitive avec une autre courbe algébrique.*

Il ressort immédiatement de là que *tous les problèmes relatifs aux courbes de contact,* problèmes qui ont été résolus dans le cas général à l'aide de ce qu'on appelle le problème de l'*extension de l'inversion* des intégrales abéliennes et du problème de la division des transcendantes, qui interviennent dans ces questions (p. 266 et suiv.), que ces problèmes, disons-nous, reviennent dans nos courbes actuelles à la *division du cercle* et à la résolution d'une équation de degré q, si la courbe de contact est assujettie à ne pas passer par q des ν points doubles, ce qui, de fait, peut se démontrer directement au moyen des équations (23) et (24).

En effet, dans tous ces problèmes, on donne $k = nm - \mu q$ points d'intersection [dont $2(\nu - q)$ sont situés aux points doubles], tandis que parmi les autres μ doivent coïncider par groupes de q points chacun. Si nous désignons les paramètres (donnés) qui répondent aux premiers par $l_1, l_2, \ldots, l_k$, ceux des points cherchés par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, les équations (25), dont au surplus q seulement entrent ici en considération, se transforment en

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\prod_{r=1}^{r=q} \frac{a^{(i)} - \lambda_r}{b^{(i)} - \lambda_r} = e^{\frac{2h^{(i)}\pi\sqrt{-1}}{\mu}} \sqrt[\mu]{[c^{(i)}]^m \prod_{r=1}^{r=k} \frac{b^{(i)} - l_r}{a^{(i)} - l_r}} \\ &\sum_{r=1}^{r=q} \frac{1}{\alpha^{(i)} - \lambda_r} = \frac{1}{\mu}\left[m\chi^{(i)} - \sum_{r=1}^{r=k} \frac{1}{\alpha^{(i)} - l_r}\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces q équations suffisent complètement pour exprimer les fonctions symétriques des λ_r par des grandeurs connues et établir ainsi relativement à λ une équation du $q^{\text{ième}}$ degré. On remarque immédiatement que l'influence d'un point de rebroussement consiste à faire disparaître une des ν périodes $2i\pi$ (puisque celle-ci deviendrait alors infiniment grande). Si, comme cela peut arriver pour les courbes du quatrième ordre, tous les points doubles se transforment en points de rebroussement, l'emploi des équations de la division du cercle cesse d'avoir lieu. Les problèmes dont il s'agit n'ont plus alors qu'une solution.

Quant à la manière dont on devra effectuer la détermination des courbes de contact et des systèmes de ces courbes dans des cas particuliers, il est à peine nécessaire, après les explications géné-

rales données plus haut, de la formuler à nouveau. En particulier, pour $m \geqq n - 2$ et $q = \nu = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, le problème qui consiste *à faire passer par $mn - \nu r$ points de la courbe d'ordre n une courbe d'ordre m ayant avec la première en ν points un contact d'ordre $r - 1$* est toujours résoluble, et l'on trouve que le nombre total des solutions, au cas où il n'existe pas de points de rebroussement, est égal à r^ν. Toutefois, comme dans les courbes du genre le plus général et d'après nos théorèmes fondamentaux sur les systèmes de points d'intersection, les cas où m est inférieur ou égal à $n - 3$ méritent une attention particulière. Ainsi, par exemple, pour $m = n - 3$, $\frac{1}{2}n(n-3)$ points d'intersection d'une courbe C_{n-3} qui ne passe pas par les points doubles sont déterminés par les $\frac{1}{2}n(n-3)$ autres; on ne peut donc plus que poser la condition de *tracer une courbe C_{n-3} telle qu'elle soit tangente à la courbe C_n partout où elle la rencontre, c'est-à-dire en $\frac{1}{2}n(n-3)$ points.*

Le problème dont il s'agit conduit à l'établissement d'une relation entre ν des grandeurs $v^{(i)}$, relation qui doit nécessairement exister lorsque celles-ci peuvent être supposées égales à des sommes comprenant chacune $\nu - 1$ intégrales de troisième espèce de la forme précédente. Nous nous proposons de traiter ce même problème lorsque $n = 4$, cas où il fournit la détermination des *tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre à trois points doubles* [1]. Observons d'abord que les grandeurs $c^{(i)}$ qui figurent dans (23) peuvent aisément s'exprimer au moyen des grandeurs $a^{(i)}$ et $b^{(i)}$, ce qui est utile pour la suite. Si l'on sépare, en effet, le point double $(a^{(i)}, b^{(i)})$ des $\frac{1}{2}n(n-3)$ autres points doubles, ces autres points (comptant chacun deux fois) forment l'ensemble complet des intersections de C_n avec une courbe C_{n-3} qui est précisément déterminée par eux. Si l'on établit maintenant relativement aux points de rencontre de C_{n-3} les équations (23), il ne doit subsister qu'une seule équation, savoir celle qui se réfère au

---

[1] *Voir* le problème correspondant pour $n = 4$ et $p = 2$, p. 279.

point double $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ par lequel C_{n-3} ne passe pas, et dans cette équation il faudra attribuer aux $n(n-3)$ grandeurs λ les $n(n-3)$ valeurs a, b, dont l'indice est différent de i; si donc on pose, pour abréger,

$$(x-a^{(1)})(x-a^{(2)})\dots(x-a^{(\nu)})=\varphi(x),$$
$$(x-b^{(1)})(x-b^{(2)})\dots(x-b^{(\nu)})=\psi(x),$$

on a l'équation

$$(28)\qquad [c^{(i)}]^{n-3}=-\frac{\varphi'[a^{(i)}].\psi[a^{(i)}]}{\varphi[b^{(i)}].\psi'[b^{(i)}]}.$$

Le problème mentionné en dernier lieu nous donne, d'après (23), entre les $\nu-1$ grandeurs λ, les ν équations

$$(29)\quad \frac{(a^{(i)}-\lambda_1)(a^{(i)}-\lambda_2)\dots(a^{(i)}-\lambda_{\nu-1})}{(b^{(i)}-\lambda_1)(b^{(i)}-\lambda_2)\dots(b^{(i)}-\lambda_{\nu-1})}=[c^{(i)}]^{\frac{1}{2}(n-3)}e^{h^{(i)}\pi\sqrt{-1}}.$$

Entre les nombres $h^{(i)}$ il doit donc exister encore une relation, ainsi qu'il a été énoncé; pour trouver cette dernière, nous partirons d'abord du système d'équations plus général

$$(30)\qquad \frac{(a^{(i)}-\lambda_1)\dots(a^{(i)}-\lambda_{\nu-1})}{(b^{(i)}-\lambda_1)\dots(b^{(i)}-\lambda_{\nu-1})}=c^{\nu^{(i)}}[c^{(i)}]^{\frac{n-3}{2}}\equiv\zeta^{(i)},$$

et nous chercherons la relation qui existe nécessairement entre les quantités $\nu^{(i)}$ (¹). Cette dernière s'obtient directement par élimination des $\nu-1$ fonctions symétriques des λ_i entre les ν équations (30) sous la forme

$$(31)\quad \begin{vmatrix} a^{(1)^{\nu-1}}-\zeta^{(1)}b^{(1)^{\nu-1}}, & a^{(1)^{\nu-2}}-\zeta^{(1)}b^{(1)^{\nu-2}}, & \dots, & 1-\zeta^{(1)} \\ a^{(2)^{\nu-1}}-\zeta^{(2)}b^{(2)^{\nu-1}}, & a^{(2)^{\nu-2}}-\zeta^{(2)}b^{(2)^{\nu-2}}, & \dots, & 1-\zeta^{(2)} \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots, & \dots \\ a^{(\nu)^{\nu-1}}-\zeta^{(\nu)}b^{(\nu)^{\nu-1}}, & a^{(\nu)^{\nu-2}}-\zeta^{(\nu)}b^{(\nu)^{\nu-2}}, & \dots, & 1-\zeta^{(\nu)} \end{vmatrix}=0.$$

En ordonnant ce déterminant suivant les $\zeta^{(i)}$ et en remplaçant ces dernières grandeurs par les valeurs données dans (30), on

(¹) On pourrait naturellement les déduire aussi de l'étude générale de l'extension du problème de l'inversion, comme cela est indiqué plus haut et développé dans Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 270.

obtient par rapport aux e^{ν} une équation ne renfermant que linéairement chacune de ces quantités.

Pour $n = 4$, c'est-à-dire $\nu = 3$, nous obtenons donc en particulier une équation de la forme [1]

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & A + B_1 e^{\nu^{(1)}} + B_2 e^{\nu^{(2)}} + B_3 e^{\nu^{(3)}} \\ & \quad + B_{12} e^{\nu^{(1)}+\nu^{(2)}} + B_{23} e^{\nu^{(2)}+\nu^{(3)}} + B_{31} e^{\nu^{(3)}+\nu^{(1)}} + C e^{\nu^{(1)}+\nu^{(2)}+\nu^{(3)}} \end{aligned} \right\} = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C sont à déterminer. Or on a d'abord

$$A = \begin{vmatrix} a^{(1)2} & a^{(1)} & 1 \\ a^{(2)2} & a^{(2)} & 1 \\ a^{(3)2} & a^{(3)} & 1 \end{vmatrix} = [a^{(1)} - a^{(2)}][a^{(1)} - a^{(3)}][a^{(2)} - a^{(3)}],$$

et de même

$$C = -[b^{(1)} - b^{(2)}][b^{(1)} - b^{(3)}][b^{(2)} - b^{(3)}].[c^{(1)}c^{(2)}c^{(3)}]^{\frac{1}{2}}.$$

D'un autre côté, il résulte de l'équation (28) que

$$(33)\qquad c^{(1)}c^{(2)}c^{(3)} = \left\{ \frac{[a^{(1)} - a^{(2)}][a^{(1)} - a^{(3)}][a^{(2)} - a^{(3)}]}{[b^{(1)} - b^{(2)}][b^{(1)} - b^{(3)}][b^{(2)} - b^{(3)}]} \right\}^2,$$

et par conséquent il vient

$$(34)\qquad C = -A.$$

On trouve, d'autre part, pour B_1, en faisant usage de (28),

$$\begin{aligned} B_1 &= -[b^{(1)} - a^{(2)}][b^{(1)} - a^{(3)}][a^{(2)} - a^{(3)}][c^{(1)}]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\left\{ \frac{[b^{(1)} - a^{(2)}][b^{(1)} - a^{(3)}][a^{(1)} - a^{(2)}][a^{(1)} - a^{(3)}][a^{(1)} - b^{(2)}][a^{(1)} - b^{(3)}]}{[b^{(1)} - b^{(2)}][b^{(1)} - b^{(3)}]} \right\}^{\frac{1}{2}} [a^{(2)} - a^{(3)}]. \end{aligned}$$

La valeur qui figure ici dans le second membre s'obtient aussi au signe près pour B_{23}, c'est-à-dire pour

$$B_{23} = [a^{(1)} - b^{(2)}][a^{(1)} - b^{(3)}][b^{(2)} - b^{(3)}][c^{(2)}c^{(3)}]^{\frac{1}{2}},$$

si l'on y exprime $c^{(2)}$ et $c^{(3)}$, d'après (28), par a et b. Il en résulte, puisque le fait analogue a lieu pour B_2 et B_3,

$$(35)\qquad B_{23} = -B_1,\quad B_{31} = -B_2,\quad B_{12} = -B_3;$$

---

[1] *Voir*, pour l'étude générale du problème, CLEBSCH, *loc. cit.*

et l'équation (32), en vertu de (34) et (35), se transforme en

$$(36) \qquad A(1 - e^S) + \sum_i B_i[e^{\nu^{(i)}} - e^{S-\nu^{(i)}}] = 0,$$

si l'on fait $S = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \nu^{(3)}$. *Cette condition est nécessairement remplie si les équations* (30) *doivent exister simultanément.*

Supposons maintenant, comme dans (29), $\nu^{(i)} = h^{(i)}\pi\sqrt{-1}$; toutes les grandeurs e^ν deviennent égales à ± 1, et l'équation (36) se transforme simplement en $e^S = 1$ ou

$$(37) \qquad h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Les quatre tangentes doubles de notre courbe C_4 se déterminent donc au moyen des équations (29) pour $n = 4$, $\nu = 3$, si l'on pose respectivement

$$\begin{array}{lll} h^{(1)} = 0, & h^{(2)} = 0, & h^{(3)} = 0; \\ h^{(1)} = 0, & h^{(2)} = 1, & h^{(3)} = 1; \\ h^{(1)} = 1, & h^{(2)} = 1, & h^{(3)} = 0; \\ h^{(1)} = 1, & h^{(2)} = 0, & h^{(3)} = 1. \end{array}$$

Comme dans le cas de $n = 4$ et $p = 1$, la distribution des tangentes doubles sur les différents systèmes de coniques de contact présente ici de l'intérêt. Ces dernières se déterminent au moyen des trois équations

$$\frac{[a^{(i)} - \lambda_1][a^{(i)} - \lambda_2][a^{(i)} - \lambda_3][a^{(i)} - \lambda_4]}{[b^{(i)} - \lambda_1][b^{(i)} - \lambda_2][b^{(i)} - \lambda_3][b^{(i)} - \lambda_4]} = C^{(i)} e^{g^{(i)}\pi\sqrt{-1}},$$

dans lesquelles λ_4 peut être choisi arbitrairement. *Il existe donc sept systèmes, composés chacun d'un nombre simplement infini de coniques qui touchent* C_4 *en quatre points,* et l'on a (comme toujours) cette proposition que les points de contact de deux coniques du même système sont situés sur une conique. Si nous désignons par $(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)})$ le système déterminé par les trois nombres g, les sept systèmes dont il vient d'être parlé sont

$$(0,0,1), \quad (0,1,0), \quad (1,0,0), \quad (0,1,1), \quad (1,0,1), \quad (1,1,0), \quad (1,1,1);$$

car le système $(0,0,0)$ se compose de l'ensemble des droites du plan comptées chacune deux fois. On reconnaît par là que *chaque*

groupe de trois de ces systèmes renferme deux couples de tangentes doubles, savoir :

(0, 1, 1) les couples [(0, 0, 0), (0, 1, 1)] et [(1, 1, 0), (1, 0, 1)],
(1, 0, 1) » » [(0, 0, 0), (1, 0, 1)] » [(1, 1, 0), (0, 1, 1)],
(1, 1, 0) » » [(0, 0, 0), (1, 1, 0)] » [(1, 0, 1), (0, 1, 1)].

Les quatre systèmes restants ne renferment pas de tangentes doubles proprement dites. Parmi eux on doit encore signaler le système (1, 1, 1), parce qu'il renferme *trois* couples de tangentes *improprement dites,* savoir : les trois couples des tangentes que l'on peut mener des trois points doubles à C_4. On s'en assure facilement si l'on considère que les tangentes issues du point double $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ par exemple, se déterminent au moyen des équations $(k = 2, 3)$

$$\frac{a^{(k)} - \lambda_1}{b^{(k)} - \lambda_1} = [c^{(k)}]^{\frac{1}{2}} e^{h^{(k)} \pi \sqrt{-1}} \left\{ \frac{[b^{(k)} - b^{(1)}][b^{(k)} - a^{(1)}]}{[a^{(k)} - b^{(1)}][a^{(k)} - a^{(1)}]} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

et qu'on doit avoir encore ici

$$h^{(2)} + h^{(3)} \equiv 0 \pmod{2} \text{ [1]}.$$

Ces résultats subissent des modifications lorsque quelques-uns des points doubles dégénèrent en points de rebroussement; la marche à suivre alors est aisée à apercevoir d'après ce qui précède. S'il se présente *un point de rebroussement,* on a encore deux tangentes doubles, et il existe trois systèmes de coniques de contact dont l'un renferme l'ensemble des deux tangentes doubles. Au cas de *deux rebroussements,* il y a encore une tangente double et un système de coniques de contact; mais les points de contact de ces dernières et ceux de la tangente double ne sont pas situés sur une même conique. Enfin, au cas de *trois rebroussements,* on a encore une tangente double, mais plus de système de coniques de contact. La courbe est devenue de troisième classe; son étude détaillée est donc tout à fait analogue à celle de la courbe du troisième ordre à point double (t. II, p. 336 et suiv.).

---

[1] Les six autres systèmes renferment aussi des couples de tangentes doubles improprement dites groupées autrement, car dans chaque système il doit se rencontrer six couples de coniques décomposables; *voir* la note de la page 285.

L'établissement des équations relatives aux singularités de la courbe primitive s'effectue d'une manière particulièrement simple lorsque $n = 3$, et nous nous arrêterons en conséquence un peu sur ce cas [1]; nous compléterons ainsi nos recherches précédentes sur les courbes du troisième ordre à point double. Soient données à la place de (3), les équations

$$\rho x_1 = a_\varkappa^3, \quad \rho x_2 = a_\varkappa'^3, \quad \rho x_3 = a_\varkappa''^3. \tag{38}$$

Nous avons d'abord à établir la forme $\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu$ dont l'évanouissement exprime que les points $\varkappa$, λ, μ sont en ligne droite. Or nous avons, d'après ce qui précède,

$$\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu . (\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) = \begin{vmatrix} a_\varkappa^3 & a_\varkappa'^3 & a_\varkappa''^3 \\ a_\lambda^3 & a_\lambda'^3 & a_\lambda''^3 \\ a_\mu^3 & a_\mu'^3 & a_\mu''^3 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui figure ici au second membre ne varie pas si l'on permute a avec $\varkappa$, a' avec λ, a'' avec μ; il doit donc renfermer, conjointement avec le facteur effectif $(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa)$, le facteur symbolique $(aa')(a'a'')(a''a)$. Le facteur restant doit être linéaire et symétrique aussi bien en $\varkappa$, λ, μ qu'en a, a', a''; il a, par suite, la valeur

$$a_\varkappa a'_\lambda a''_\mu + a_\mu a'_\varkappa a''_\lambda + a_\lambda a'_\mu a''_\varkappa.$$

Si donc $\Delta_\varkappa^3$ désigne de nouveau le combinant introduit dans (15), et duquel dépendent les trois points d'inflexion, on peut poser [2]

$$\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu = \mathrm{C} . \Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu, \tag{39}$$

C désignant un facteur numérique.

---

(1) *Voir* ROSENOW, *loc. cit.*, ainsi que la note de la page 334, t. II.

(2) Le calcul du déterminant (11) n'a pas une marche aussi simple si n est supérieur à 3. Il faut alors traiter ce déterminant à l'aide des développements en série qui ont lieu pour les formes binaires à plusieurs séries de variables (*voir* CLEBSCH, *Theorie der binären Formen*, p. 15 et suiv.); il ne peut alors entrer dans le développement de la forme $\alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_\mu^{n-2}$ que des puissances paires de $(\varkappa\lambda)$, $(\lambda\mu)$, $(\mu\varkappa)$, car cette forme ne varie pas si l'on permute entre elle deux des grandeurs $\varkappa$, λ, μ. En ayant égard à cette observation, on trouve, par exemple, pour $n = 4$,

$$\alpha_\varkappa^2 \beta_\lambda^2 \gamma_\mu^2 = p\,\Delta_\varkappa^2 \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu^2 + q\,[(\varkappa\lambda)^2 \mathrm{D}_\mu^2 + (\lambda\mu)^2 \mathrm{D}_\varkappa^2 + (\mu\varkappa)^2 \mathrm{D}_\lambda^2],$$

p, q désignant des facteurs numériques, $\Delta_\varkappa^6$ étant défini par (15) et $\mathrm{D}_\varkappa^2$ étant égal à

$$(aa')(a'a'')(a''a)[(a'a'')^2 a_\varkappa^2 + (a''a)^2 a_\varkappa'^2 + (aa')^2 a_\varkappa''^2].$$

Il peut arriver en particulier que la forme $\mathrm{D}_\varkappa^2$ soit identiquement nulle; alors

Conséquemment l'équation $\Delta_x \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0$ *exprime que les points* x, λ, μ *sont en ligne droite;* $\Delta_x^2 \Delta_\lambda = 0$ *donne les deux points de contact* x *des tangentes issues de* λ *ou le point tangentiel du point* x, *et* $\Delta_x^3 = 0$ *donne les trois points d'inflexion.*

Si, en particulier, x est un point d'inflexion, c'est-à-dire une racine de $\Delta_x^3 = 0$, la première polaire de x relativement à Δ se com-

---

l'équation plus simple $\Delta_x^2 \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu^2$ exprime que x, λ, μ sont en ligne droite, d'où l'on déduit aisément que les points de contact des quatre tangentes sont donnés par la forme hessienne de Δ, c'est-à-dire par l'équation

$$H_\Delta \equiv (\Delta \Delta')^2 \Delta_x^4 \Delta_x'^4 = 0,$$

et les valeurs paramétriques relatives aux trois points doubles par l'équation

$$j \equiv (\Delta \Delta')^2 (\Delta' \Delta'')^2 (\Delta'' \Delta)^2 \Delta_x^2 \Delta_x'^2 \Delta_x''^2 = 0.$$

Le sens géométrique de ce cas s'obtient par le raisonnement suivant : on peut toujours envisager trois formes binaires biquadratiques comme les secondes polaires d'une forme primitive du sixième ordre; car, eu égard à la représentation typique des formes d'ordre pair par des covariants quadratiques (*voir* le Mémoire de M. Lindemann, cité t. I, p. 303), ce fait résulte de ce qu'un réseau de coniques est en général réseau de polaires d'une courbe du troisième ordre. Soit donc $f = \alpha_x^6$ cette forme primitive; on peut poser

$$a_x^4 = \alpha_x^4 \alpha_1^2, \quad a_x'^4 = \beta_x^4 \beta_1 \beta_2, \quad a_x''^4 = \gamma_x^4 \gamma_2^2,$$

et il vient

$$\Delta = \frac{1}{6} (\alpha\beta)^2 (\beta\gamma)^2 (\gamma\alpha)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 \gamma_x^2 = \frac{1}{6} j_f,$$

$$D_x^2 = -\frac{1}{6} (\alpha\beta)^2 (\alpha\gamma)^2 (\beta\gamma)^4 \alpha_x^2 = -\frac{1}{6} (i, f)_4 = -\frac{1}{6} l,$$

i et l étant les formes ainsi désignées dans Clebsch, *loc. cit.*, p. 283 et suiv. Mais si l'on a $l \equiv 0$ et $i \gtrless 0$, on peut poser (*ibid.*, p. 446) $f = x_1^6 + x_2^6$, et il vient aussi alors $j_f \equiv 0$; ce cas ne donne pas de courbe du quatrième ordre proprement dite. Si l'on a, au contraire, $l \equiv 0$, par suite de ce que i s'évanouit identiquement, alors les six points de base de f (comme il arrive pour le covariant T d'une forme binaire biquadratique) se décomposent en trois couples, dont deux quelconques sont situés harmoniquement l'un par rapport à l'autre (*ibid.*, p. 447), et l'on peut poser $f = x_1 x_2 (x_2^4 - x_1^4)$; mais on a alors $\frac{1}{6} j_f \equiv \Delta = -\frac{1}{108} x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = -\frac{1}{108} f$. Donc alors aussi j_Δ devient proportionnel à Δ, c'est-à-dire que les six points d'inflexion se trouvent réunis par couples dans les points doubles. *Sont, en conséquence, caractérisées par la condition* $D_x^2 \equiv 0$ *les courbes* C_4 *qui ont simultanément en chaque point double deux points d'inflexion* [à moins qu'il n'y ait aucune courbe C_4 proprement dite *voir* p. 269)]. Un exemple de ce cas nous est donné par la *lemniscate* ordinaire, courbe dans laquelle deux points doubles sont situés aux points circulaires imaginaires.

pose du point $\varkappa$ lui-même et du point ν, quatrième harmonique de $\varkappa$, par rapport aux deux autres racines de Δ (ν étant alors un point racine du covariant Q de Δ). L'équation $\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0$ exprime donc alors que λ et μ sont situés harmoniquement par rapport à $\varkappa$ et ν; or cette condition est remplie d'après ce qui vient d'être dit si λ et μ sont les deux autres points d'inflexion de Δ, et l'on obtient en conséquence cette proposition connue, que *les trois points d'inflexion sont en ligne droite.*

La détermination du point double s'opère au moyen de l'équation (14) ci-dessus, c'est-à-dire par élimination de λ entre les deux équations

$$\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_1 = 0, \quad \Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_2 = 0.$$

Les deux paramètres du point double sont donc les points de base de la forme hessienne $\tau_\varkappa^2$ de Δ, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\tau_\varkappa^2 \equiv 2(\Delta\Delta')\Delta_1\Delta'_2\Delta_\varkappa\Delta'_\varkappa \equiv (\Delta\Delta')^2\Delta_\varkappa\Delta'_\varkappa = 0.$$

Il suit en même temps de là que l'évanouissement du déterminant de τ, c'est-à-dire de l'invariant $R = (\tau\tau')^2$ de Δ fournit *la condition de la présence d'un point de rebroussement.*

Mais il est également aisé d'attribuer un sens à la polaire $\tau_\varkappa\tau_\lambda$ de $\tau_\varkappa^2$. L'équation $\tau_\varkappa\tau_\lambda = 0$ résulte, en effet, de l'élimination de μ entre les deux équations

$$\Delta_\varkappa^2 \Delta_\mu = 0, \quad \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu = 0.$$

On obtient d'abord le résultat $(\Delta\Delta')\Delta_\varkappa^2\Delta_\lambda'^2 = 0$. Or on a

$$\begin{aligned}(\Delta\Delta')\Delta_\varkappa^2\Delta_\lambda'^2 &= \frac{1}{2}(\Delta\Delta')(\Delta_\varkappa^2\Delta_\lambda'^2 - \Delta_\lambda^2\Delta_\varkappa'^2)\\ &= \frac{1}{2}(\Delta\Delta')^2(\Delta_\varkappa\Delta'_\lambda + \Delta_\lambda\Delta'_\varkappa)(\varkappa\lambda)\\ &= (\Delta\Delta')^2\Delta_\varkappa\Delta'_\lambda(\varkappa\lambda) = \tau_\varkappa\tau_\lambda.(\varkappa\lambda).\end{aligned}$$

L'équation $\tau_\varkappa\tau_\lambda = 0$ exprime donc que les points $\varkappa$, λ ont un point tangentiel commun [1], c'est-à-dire qu'ils forment un couple de

---

[1] Là se retrouve le théorème sur l'involution formée par les lignes qui joignent au point double deux points ayant leur point tangentiel commun, théorème que nous avons énoncé, t. II, p. 337, en le rattachant à la forme canonique de Δ (savoir, $\Delta = \lambda^3 + \mu^3$).

pôles conjugués sur la courbe primitive si l'on considère cette dernière comme la hessienne d'une autre courbe du troisième ordre (ce qui n'est plus possible que d'une seule manière en cas de point double).

On doit encore remarquer particulièrement sur la courbe les points de contact λ des trois tangentes issues des points d'inflexion $\varkappa$. On les trouve en éliminant $\varkappa$ entre les équations

$$\Delta_\varkappa^3 = 0, \quad \Delta_\varkappa \Delta_\lambda^2 = 0.$$

Mais on peut remplacer ces dernières par de plus simples. Comme, en effet, l'une des deux tangentes issues du point d'inflexion se confond avec la tangente d'inflexion, le point d'inflexion $\varkappa$ forme avec le point de contact correspondant λ lui-même un couple de pôles conjugués, en sorte que $\tau_\varkappa \tau_\lambda = 0$, et l'élimination de $\varkappa$ entre cette équation et $\Delta_\varkappa \Delta_\lambda^2 = 0$ donne

$$Q \equiv q_\lambda^3 \equiv (\Delta\tau)\Delta_\lambda^2 \tau_\lambda = 0.$$

Les points de base du covariant Q *de* Δ *sont donc les points de contact des tangentes issues des points d'inflexion* [1].

La signification des polaires de la forme Q s'obtient enfin de la manière suivante. Soient $\varkappa$, λ, μ trois points d'une droite; traçons en μ une tangente qui rencontrera encore la courbe en μ', point tangentiel de μ; de μ' menons la seconde tangente dont le point de contact sera μ'', en sorte que μ et μ'' forment un couple de pôles conjugués. Alors on a les équations

$$\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0, \quad \tau_\mu \tau_{\mu''} = 0;$$

et par élimination de μ il vient

$$\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \tau_{\mu''} (\Delta\tau) = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} 3 q_\varkappa^2 q_{\mu''} &= (\Delta\tau)[\Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''} + 2\Delta_\varkappa \Delta_{\mu''} \tau_\varkappa] \\ &= (\Delta\tau)[3\Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''} + 2\Delta_\varkappa(\Delta_{\mu''}\tau_\varkappa - \tau_{\mu''}\Delta_\varkappa)] \\ &= 3(\Delta\tau)\Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''} - 2(\Delta\tau)^2 \Delta_\varkappa . (\varkappa\mu''). \end{aligned}$$

---

[1] Observons que trois formes binaires du troisième ordre n'ont point d'autres combinants que les formes Δ, τ, Q et R. (*Voir* GORDAN, *Math. Annalen*, t. V, p. 117 et suiv.).

Mais comme, d'après l'équation (10), t. I, p. 272, le second composé de Δ avec τ est identiquement nul, il vient $q_x^2 q_{\mu''} = (\Delta\tau)^2 \Delta_x^2 \tau_{\mu''}$, d'où, aussi par formation polaire,

$$q_x q_\lambda q_{\mu''} = (\Delta\tau)^2 \Delta_x \Delta_\lambda \tau_{\mu''}.$$

L'équation $q_x q_\lambda q_{\mu''} = 0$ *exprime par conséquent que la ligne joignant* x *et* λ *rencontre la courbe primitive en un troisième point qui forme avec* μ'' *un couple de pôles conjugué* (¹).

A l'aide des relations qui viennent d'être développées, on peut traiter le problème de la continuation du tracé des tangentes (t. II, p. 339) et d'autres questions de la même espèce; toutefois nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet. Faisons seulement observer encore que les propositions précédentes relatives aux points d'intersection d'une droite avec une courbe du troisième ordre peuvent être appliquées immédiatement aux systèmes de trois points mobiles qui sont, sur une courbe C_n de genre $p = 0$, les intersections d'un nombre doublement infini de courbes C_{n-2} passant par $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles et par $n-3$ points simples fixes de C_n. En effet de trois de ces points (comme dans une courbe C_3), l'un est déterminé par les deux autres, et l'on peut conséquemment, en faisant usage d'un semblable réseau de courbes C_{n-2}, transformer unidéterminativement la courbe dont il s'agit en une courbe du troisième ordre à point double; sur cette dernière les systèmes doublement infinis de trois points qui correspondent aux précédents seront déterminés par les lignes droites du plan.

XIII. — Les courbes du genre $p = 1$.

Nous passons maintenant aux courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre à $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles, pour lesquelles $p = 1$. Nous examinerons d'abord (comme au cas de $p = 0$) les questions purement algébriques non

---

(¹) Il résulte encore de là que x, λ, μ'' sont trois points en chacun desquels une conique peut avoir un contact simple avec la courbe primitive, car les points tangentiels de x, λ, μ'' sont encore en ligne droite (t. II, p. 266; *voir* aussi STEINER, *Journal de Crelle*, t. 66, et l'Ouvrage de SCHRÖTER : *Steiner's Vorselungen über synthetische Geometrie*, t. II).

assujetties aux règles générales qui ont été développées ci-dessus (1), savoir la transformation en une *courbe normale* et la détermination *du nombre et du sens des modules*. Nous y joindrons encore quelques remarques sur l'introduction des fonctions et des intégrales elliptiques dans ce sujet; toutefois, dans ces observations, nous pourrons nous borner à un court résumé, parce qu'elles ne nous offrent que des applications de nos théories générales et que nous avons déjà insisté sur les faits correspondants dans les courbes du troisième ordre.

Comme courbe normale on trouve ici *la courbe générale du troisième ordre*, et cela de la manière suivante (2). On considérera les $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles et cuspidaux conjointement avec $2n-3$ autres points fixes choisis arbitrairement sur la courbe comme les $\left[\frac{1}{2}(n+2)(n-1)-2\right]$ points de base d'un réseau du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre. Les courbes de ce dernier rencontrent encore C_n en

$$n(n-1)-n(n-3)-(2n-3)=3$$

points mobiles; si donc on les emploie comme courbes de transformation, on obtient de fait une courbe du troisième ordre. Une réduction subséquente de l'ordre est impossible, parce qu'il n'existe aucune courbe du genre $p=1$ qui soit d'un ordre inférieur au troisième.

Aux courbes du réseau qui passent par un point quelconque x de C_n répondent unidéterminativement dans la transformation les rayons du faisceau passant par le point correspondant y de C_3; donc, en particulier, aux quatre courbes tangentes du premier faisceau répondent les quatre tangentes du faisceau de rayons dont il vient d'être parlé, et de là résulte que le rapport anharmonique des quatre tangentes des quatre courbes en question en un des

(1) En effet, *une* courbe adjointe C_{n-3} est, en général, précisément déterminée par $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles; mais elle ne rencontre plus f ailleurs, en sorte que les recherches faites plus haut sur les courbes adjointes C_{n-3} deviennent illusoires.

(2) Voir Clebsch, *Ueber diejenigen Curven deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* (*Journal de Crelle*, t. 64, et Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 69).

points de base du faisceau (x par exemple) est égal au rapport anharmonique (indépendant de y) des quatre tangentes menées de y à C_3 (*voir* t. II, p. 325, et t. III, p. 69). *Ce rapport anharmonique donne donc le module unique de notre courbe elliptique;* on reconnaît que cette dernière ne possède qu'un *seul* module par la circonstance que C_3 a également, par rapport aux transformations linéaires, un invariant absolu unique (savoir précisément le rapport anharmonique précité). Or, comme le rapport anharmonique des quatre tangentes issues de y est indépendant de la position du point y sur C_3, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Dans un faisceau de courbes adjointes du $(n-1)^{ième}$ ordre, dont $2n-3$ points de base sont situés en des points simples de la courbe primitive C_n (d'ordre n et de genre 1), il existe, en général, quatre courbes touchant C_n en un point qui ne coïncide avec aucun des $2n-3$ points de base, et le rapport anharmonique des quatre tangentes de ces courbes en l'un des points de base est indépendant de la situation de ces derniers sur C_n. Le même rapport anharmonique donne en même temps le module de la courbe.

Au lieu des courbes d'ordre $n-1$, nous aurions pu également employer, pour la transformation, un réseau d'adjointes du $s^{ième}$ ordre rencontrant C_n en *trois* points mobiles, et un réseau de cette espèce peut être obtenu, pourvu que s soit supérieur à $n-3$. Il suffit, en effet, de prendre encore arbitrairement $[n(s-n+3)-3]$ points fixes sur C_n; alors, en effet, le nombre des points d'intersection mobiles est égal à

$$ns - n(n-3) - n(s-n+3) + 3 = 3.$$

Il résulte de là que *le théorème énoncé en dernier lieu pour les courbes d'ordre $n-1$ est également vrai pour les faisceaux de courbes adjointes du $s^{ième}$ ordre, dont $n(s-n+3)-2$ points de base sont situés en des points simples de C_n, pourvu que s soit supérieur à $n-3$* [1], *et il en est encore ainsi, en particulier, pour une courbe primitive du troisième ordre.* En effet, le nombre

[1] *Voir* aussi CAYLEY, *Proceedings of the London mathematical Society*, 16 octobre 1865.

des courbes tangentes du faisceau dépend uniquement du nombre des points d'intersection mobiles et du genre de la courbe primitive (t. II, p. 171); il est donc, au fond, indépendant de s.

On peut représenter les coordonnées des points d'une courbe générale de genre 1 comme fonctions générales d'un paramètre, ainsi que nous l'avons fait pour les courbes du troisième ordre (t. II, p. 388, 416 et suiv.), et d'une manière tout à fait semblable. Cette représentation est donnée comme d'elle-même dès l'instant qu'on connaît la transformation de la courbe C_n en la courbe C_3 et l'inversion de celle-ci; mais elle peut être aussi établie directement de la manière suivante [1]. Considérons un faisceau $\varphi + \lambda\psi = 0$ de courbes adjointes du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre passant toutes par $2n-2$ points quelconques de C_n et rencontrant par suite C_n en deux points mobiles. L'équation de ces derniers en coordonnées-lignes u_i s'obtient, par élimination des x_ι, entre les équations

$$(1) \qquad f = 0, \quad \varphi + \lambda\psi = 0, \quad u_x = 0.$$

Il se séparera du résultant un facteur du degré $n(n-1)-2$ par rapport aux u_i et ne renfermant pas λ; l'équation précitée, représentée par l'annulation du facteur qui reste, sera donc de la forme

$$0 = w_{11}u_1^2 + w_{22}u_2^2 + w_{33}u_3^2 + 2w_{23}u_2u_3 + 2w_{31}u_3u_1 + 2w_{12}u_1u_2,$$

les w_{ik} étant des fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré en λ. Comme le second membre peut se décomposer en deux facteurs linéaires, le déterminant des w_{ik} s'évanouit, c'est-à-dire que l'on a

$$W \equiv \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons les coordonnées des deux points d'intersection mobiles par x_1, x_2, x_3 et ξ_1, ξ_2, ξ_3 respectivement; soient, de plus, l_1, l_2, l_3 les coordonnées de la ligne qui joint x et ξ. On peut alors poser

$$(2) \qquad W_{ik} = -l_i l_k Q,$$

---

[1] Pour ce qui suit, ainsi que pour les applications données plus loin de la théorie des fonctions elliptiques, consulter toujours CLEBSCH, *loc. cit.* (*Journal de Crelle*, t. 64).

en désignant par W_{ik} les déterminants mineurs du déterminant W; naturellement les grandeurs l_i, l_k, Q dépendent ici de λ, et nous allons déterminer incessamment la nature de cette dépendance. Pour les coordonnées x_i, ξ_i elles-mêmes, on trouve, en vertu des considérations précédentes, les relations [1]

$$(3)\quad \begin{cases} x_1\xi_1 = w_{11} & x_2\xi_1 = w_{21} - l_3\sqrt{Q}, & x_3\xi_1 = w_{31} + l_2\sqrt{Q}, \\ x_1\xi_2 = w_{12} + l_3\sqrt{Q}, & x_2\xi_2 = w_{22} & x_3\xi_2 = w_{32} - l_1\sqrt{Q}, \\ x_1\xi_3 = w_{13} - l_2\sqrt{Q}, & x_2\xi_3 = w_{23} + l_1\sqrt{Q}, & x_3\xi_3 = w_{33}. \end{cases}$$

On déduit immédiatement de là les rapports des quantités x et ξ. En introduisant les grandeurs arbitraires γ_1, γ_2, γ_3 par lesquelles nous multiplierons respectivement ces équations, que nous ajouterons ensuite, nous obtiendrons pour

$$\rho = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3$$

les rapports des x_i sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \rho x_1 = w_{11}\gamma_1 + w_{12}\gamma_2 + w_{13}\gamma_3 + (\gamma_2 l_3 - \gamma_3 l_2)\sqrt{Q}, \\ \rho x_2 = w_{21}\gamma_1 + w_{22}\gamma_2 + w_{23}\gamma_3 + (\gamma_3 l_1 - \gamma_1 l_3)\sqrt{Q}, \\ \rho x_3 = w_{31}\gamma_1 + w_{32}\gamma_2 + w_{33}\gamma_3 + (\gamma_1 l_2 - \gamma_2 l_1)\sqrt{Q}. \end{cases}$$

Si on laisse ici le signe de $\sqrt{Q}$ indéterminé, ces équations donnent les x aussi bien que les ξ, et il suffit d'assigner à la racine, dans un cas le signe positif, dans l'autre le signe négatif [2].

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer le degré de la fonction Q par rapport au paramètre λ. L'équation $Q = 0$ détermine évidemment celles des courbes du faisceau $\varphi + \lambda\psi = 0$ qui touchent la courbe primitive; d'un autre côté, nous savons qu'il

---

[1] Comparez les équations (9), t. I, p. 131; il faut y remplacer α par x, β par ξ, $\rho^2 = -\mu$ par Q, ξ par l.

[2] Les expressions (4) comportent une interprétation géométrique très simple. Si l'on considère, en effet, les quantités γ_i comme les coordonnées d'une droite, les coefficients de $\sqrt{Q}$ sont les coordonnées du point (variable), où la droite γ choisie d'une manière arbitraire (mais fixe) est rencontrée par la ligne l (c'est-à-dire par la ligne qui joint les deux points mobiles). Les premières parties des seconds membres sont les coordonnées du pôle de γ, relativement à ce couple de points lui-même, ou, en d'autres termes, les coordonnées du point qui forme, sur la ligne l, avec le point cité et avec le couple auquel appartient x, un système harmonique.

existe quatre courbes de cette espèce dans le faisceau. La fonction Q est donc du quatrième degré en λ; les grandeurs l_i seront suivant (2) du degré $n-2$ par rapport à cette même quantité [1]. En conséquence, d'après les équations (2), *la représentation paramétrique de la courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre de genre 1 est rationnelle, à part la racine carrée d'une expression Q du quatrième ordre :* cette dernière est multipliée par des fonctions rationnelles du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre; les autres parties des expressions x_i sont des fonctions rationnelles d'ordre n; les grandeurs y_i n'influencent pas les équations (4), ainsi qu'il ressort des équations (3).

Par les équations (4) se trouve au surplus donnée de nouveau comme d'elle-même la transformation d'une courbe C_n en une courbe C_3, ce qui peut être mentionné brièvement. Si nous écrivons, en effet, Q sous la forme

$$Q = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - a_4),$$

et que nous posions

$$(5)\quad \begin{cases} y_1 = (\lambda - a_1)(a_3 - a_2), \quad y_2 = (\lambda - a_2)(a_3 - a_1), \quad y_1 y_3 = \dfrac{\sqrt{Q}}{m}, \\ m^2 = \dfrac{a_4 - a_2}{(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_2)^2}, \end{cases}$$

---

(1) Pour $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$, nous pouvons par suite écrire les équations (4) sous la forme

$$\rho x_1 = a_\lambda^n + \alpha_\lambda^{n-2}\sqrt{q_\lambda^4}, \quad \rho x_2 = a_\lambda'^n + \alpha_\lambda'^{n-2}\sqrt{q_\lambda^4}, \quad \rho x_3 = a_\lambda''^n + \alpha_\lambda''^{n-2}\sqrt{q_\lambda^4}.$$

Il vient alors

$$\sqrt{q_\lambda^4}(\rho\, dx_1 + x_1\, d\rho) = n a_\lambda^{n-1} a_{d\lambda}\sqrt{q_\lambda^4} + (n-2)\alpha_\lambda^{n-3}\alpha_{d\lambda} q_\lambda^4 + 2\alpha_\lambda^{n-3} q_\lambda^3 q_{d\lambda},$$

et ainsi de suite.

On trouve par conséquent pour les coordonnées u_i de la tangente du point x

$$\begin{aligned} \sigma u_3 &= \tau(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1) \\ &= 2n q_\lambda^4 \left[(a\alpha') a_\lambda^{n-1} \alpha_\lambda'^{n-3} + (\alpha a') \alpha_\lambda^{n-3} a_\lambda'^{n-1} \right] \\ &\quad + 2 q_\lambda^3 \left[a_\lambda'^n (\alpha q) a_\lambda^{n-3} - a_\lambda^n (\alpha' q) \alpha_\lambda'^{n-3} \right] \\ &\quad + \sqrt{q_\lambda^4} \left[n(aa') a_\lambda^{n-1} a_\lambda'^{n-1} + (n-2) q_\lambda^4 (\alpha\alpha') \alpha_\lambda^{n-3} \alpha_\lambda'^{n-3} \right], \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Par là se trouve donnée *la représentation paramétrique de la courbe C_n considérée comme figure tangentielle.* Que ces dernières équations représentent effectivement une courbe de $2n^{\text{ième}}$ classe, comme cela doit être, c'est ce qu'on reconnaît par une marche analogue à celle qui sera incessamment suivie au texte pour montrer que la courbe représentée par (4) est seulement du $n^{\text{ième}}$ ordre, les ordres des expressions qui figurent au second membre pouvant encore être réduits.

les quantités w_{ik}, l_i peuvent se représenter comme des fonctions w'_{ik}, l'_i en y_1, y_2 du même degré par rapport à ces dernières grandeurs que les quantités w_{ik}, l_i en λ, et $\sqrt{Q}$ devient, à une constante près, égal à $y_1 y_3$. On trouve donc les x_i exprimés de la manière suivante :

$$(6) \qquad \rho x_i = y_1 w'_{i1} + y_2 w'_{i2} + y_3 w'_{i3} + m(yl')_i y_2 y_3,$$

en faisant $(yl')_1 = y_2 l'_3 - y_3 l'_2$, etc. Les x_i sont donc représentés comme fonctions entières du n^ième^ ordre des y_i, et entre ces dernières grandeurs existe, d'après (5), l'identité

$$(7) \qquad F(y) \equiv y_3^2 y_1 - y_2(y_1 - y_2)(y_1 - k^2 y_2) = 0,$$

dans laquelle

$$k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2},$$

ce qui est, en fait, *l'équation d'une courbe du troisième ordre dont le rapport anharmonique (ou module) est égal à* k^2. Les équations (6) donnent donc l'inversion des formules $\rho y_i = \Phi_i(x)$ par lesquelles la même transformation est établie, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ étant trois courbes adjointes à la courbe donnée C_n dans un réseau à trois points d'intersection mobiles. On peut, du reste, au moyen des équations (6), calculer réciproquement les y_i comme fonction des x_i, car on a $\lambda = -\frac{\varphi}{\psi}$ fonction rationnelle des x_i; par là y_1, y_2 se trouvent immédiatement représentés, et y_3 n'entre dans les équations (6) que linéairement.

D'un autre côté, si l'on part de la courbe (7) et qu'il s'agisse de la transformer en une courbe C_n par les formules (6), les équations qui prennent naissance lorsqu'on égale à zéro les seconds membres des expressions (6) représenteront trois courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre, et les courbes du réseau déterminé par elles rencontreront encore C_3 en n points mobiles; en d'autres termes, *il existe nécessairement sur* C_3 (7) $2n$ *points fixes par lesquels passent toutes les courbes du réseau d'ordre n qui prend ainsi naissance.* On peut aussi déterminer aisément ces $2n$ points au moyen des formules (6). Considérons la courbe représentée par une combinaison linéaire des seconds membres de (6), et for-

mons en conséquence, au moyen des trois grandeurs arbitraires β_1, β_2, β_3, l'équation

$$\Sigma\Sigma y_i \beta_k \omega'_{ik} + m y_1 y_3 (\gamma l' \beta) = 0. \tag{8}$$

Cette courbe renferme également les $2n$ points d'intersection constants dont il a été parlé. Mais, dans le voisinage de $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, (8) devient le faisceau de $n-1$ droites

$$y_1 . (\gamma \beta l') = 0.$$

La courbe (8) a donc au point $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ un point multiple d'ordre $n-1$ dont une tangente ($y_1 = 0$) touche la courbe (7). *Par conséquent, en ce point tombent n intersections des deux courbes* (7) *et* (8). De (8) résulte d'ailleurs

$$(\Sigma\Sigma y_i \beta_i \omega'_{ik})^2 = m^2 y_1^2 y_3^2 (\gamma \beta l')^2, \tag{9}$$

y_3^2 pouvant maintenant être éliminé à l'aide de (7). Mais alors il vient, d'après (2) et (5),

$$m^2 y_1^2 y_3^2 l'_i l'_k = Q l'_i l'_k = -W'_{ik}, \tag{10}$$

si l'on désigne par la notation W'_{ik} les déterminants mineurs formés avec les quantités ω'_{ik}. Le second membre de (9) devient par suite le déterminant

$$-\begin{vmatrix} W'_{11} & W'_{12} & W'_{13} & \gamma_1 & \beta_1 \\ W'_{21} & W'_{22} & W'_{23} & \gamma_2 & \beta_2 \\ W'_{31} & W'_{32} & W'_{33} & \gamma_3 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (\Sigma\Sigma \omega'_{ik} \gamma_i \beta_k)^2 - (\Sigma\Sigma \omega'_{ik} \gamma_i \gamma_k)(\Sigma\Sigma \omega'_{ik} \beta_i \beta_k).$$

L'équation (9) se décompose donc en deux autres, savoir

$$\Sigma\Sigma \omega'_{ik} \gamma_i \gamma_k = 0, \quad \Sigma\Sigma \omega'_{ik} \beta_i \beta_k = 0,$$

dont la seconde seule dépend des constantes spéciales β de la courbe (8); la première fournit en conséquence n rapports constants $y_1 : y_2$, et à chaque rapport de cette espèce correspond, en vertu de (8), une valeur de y_3, également indépendante des con-

stantes β, *de sorte qu'au moyen de l'équation*

$$(11) \qquad \Sigma\Sigma\varpi'_{ik}\gamma_i\gamma_k = 0$$

combinée avec (8) *on trouve les n autres points d'intersection constants.* Car, pour ce qui concerne la valeur de y_3, on a nécessairement, si la valeur trouvée au moyen de (8) doit être réellement indépendante des β_i,

$$my_1y_3 = \frac{\varpi'_{11}\gamma_1 + \varpi'_{12}\gamma_2 + \varpi'_{13}\gamma_3}{\gamma_3 l'_2 - \gamma_2 l'_3} = \frac{\varpi'_{21}\gamma_1 + \varpi'_{22}\gamma_2 + \varpi'_{23}\gamma_3}{\gamma_1 l'_3 - \gamma_3 l'_1}$$
$$= \frac{\varpi'_{31}\gamma_1 + \varpi'_{32}\gamma_2 + \varpi'_{33}\gamma_3}{\gamma_2 l'_1 - \gamma_1 l'_2}.$$

En égalant ces quotients deux à deux, on a les trois conditions

$$\gamma_r\,\Sigma\Sigma\varpi'_{ik}\gamma_i l'_k - l'_r\Sigma\Sigma\varpi'_{ik}\gamma_i\gamma_k = 0 \quad (r = 1, 2, 3),$$

lesquelles se réduisent, en vertu de (11), à la condition unique

$$\Sigma\Sigma\varpi'_{ik}\gamma_i l'_k = 0.$$

Mais cette dernière relation, multipliée par $m^2y_1^2y_3^2l'_n$, se transforme, à cause de (10), en

$$\sum_i\sum_k \varpi'_{ik}\gamma_i W'_{kh} \equiv W'.\gamma_h = 0;$$

et cette condition est en fait remplie, parce que le déterminant W' des grandeurs ϖ'_{ik} s'évanouit.

Actuellement, l'introduction des fonctions elliptiques est immédiatement donnée par les équations (6). Au moyen de ces dernières, les points de la courbe (7) seront en effet représentés, d'après ce qui a été dit précédemment, par les équations (t. II, p. 358)

$$\rho y_1 = \sin^3 \mathrm{am}\, u, \quad \rho y_2 = \sin \mathrm{am}\, u, \quad \rho y_3 = \cos \mathrm{am}\, u\,.\,\Delta \mathrm{am}\, u.$$

Si donc on divise dans les deux membres de (6) par $\sin^n \mathrm{am}\, u$, on obtient des formules de la forme

$$(12) \qquad \sigma x_i = F_i^{(n)}(\sin^2 \mathrm{am}\, u) + F_i^{(n-2)}(\sin^2 \mathrm{am}\, u)\frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du},$$

le degré des fonctions F_i, par rapport à leur argument, étant in-

diqué par l'indice supérieur; ce degré peut d'ailleurs être encore abaissé, ainsi qu'il sera expliqué plus loin.

Dans les équations (12), on peut (semblablement à ce qui a été fait t. II, p. 390) introduire la fonction $H(u)$ à la place de $\sin \operatorname{am} u$, et l'on est ainsi immédiatement conduit de nouveau au théorème d'Abel. Chacune des expressions qui figurent dans le second membre de (12) s'annule en effet pour $2n$ valeurs de l'argument u. Si nous désignons ces valeurs respectivement par

$$\begin{array}{l} \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \ldots,\ \alpha'_n,\ \alpha'_{n+1},\ \ldots,\ \alpha'_{2n},\\ \alpha''_1,\ \alpha''_2,\ \ldots,\ \alpha''_n,\ \alpha''_{n+1},\ \ldots,\ \alpha''_{2n},\\ \alpha'''_1,\ \alpha'''_2,\ \ldots,\ \alpha'''_n,\ \alpha'''_{n+1},\ \ldots,\ \alpha'''_{2n},\end{array}$$

on a, d'après la proposition dont il a été déjà fait usage pour les courbes du troisième ordre ([1]), et en écrivant de nouveau σ à la place de $\sigma\Theta^{2n}(u)$ et désignant par C_i des constantes,

$$(13)\qquad \sigma x_i = C_i H(u-\alpha_1^{(i)}).H(u-\alpha_2^{(i)})\ldots H(u-\alpha_{2n}^{(i)}).$$

Mais la ligne $x_i = 0$ coupe C_n en n points seulement; donc, parmi les $2n$ valeurs racines de l'argument u qui se présentent dans les seconds membres, n sont sans usage pour nous, en tant qu'appartenant simultanément aux trois lignes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Le fait se vérifie directement sur les équations (4). Si l'on détermine en effet les rencontres d'une droite quelconque $\beta_x = 0$ avec C_n, cette détermination sera nécessairement réalisée par une équation du $n^{\text{ième}}$ degré relativement au paramètre λ. Si l'on porte d'ailleurs dans $\beta_x = 0$ les valeurs des x_i tirées de (4), il vient

$$\Sigma\Sigma\, a'_{ik}\beta_i\gamma_k + \sqrt{Q}(\beta\gamma l) = 0,$$

ce qui, en vertu de (5), est encore l'équation (8); or nous avons déjà démontré, à propos de cette dernière, qu'elle possède n racines complètement indépendantes des β_i, savoir les racines de l'équation (11). Nous pouvons donc poser

$$\alpha'_{n+1} = \alpha''_{n+1} = \alpha'''_{n+1},\quad \alpha'_{n+2} = \alpha''_{n+2} = \alpha'''_{n+2},\quad \ldots,\quad \alpha'_{2n} = \alpha''_{2n} = \alpha'''_{2n};$$

([1]) Cette proposition de Hermite est au fond, pour le cas de $p=1$, identique au théorème général sur la représentabilité des fonctions algébriques par des quotients de fonctions Θ. (*Voir* RIEMANN, *op. cit.*, § 27; CLEBSCH et GORDAN, *op. cit.*, p. 224; ROCH, *Journal de Crelle*, t. 66, p. 99; WEBER, *ib.*, t. 70, p. 316).

et si nous faisons en sorte que le facteur

$$H(u - \alpha'_{n+1}) \cdot H(u - \alpha'_{n+2}) \ldots H(u - \alpha'_{2n})$$

qui se présente dans chacune des trois équations (13) s'absorbe dans le facteur de proportionnalité, il vient

$$(14) \qquad \sigma x_i = C_i H(u - \alpha_1^{(i)}) . H(u - \alpha_2^{(i)}) \ldots H(u - \alpha_n^{(i)}).$$

Actuellement, pour les mn arguments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$ des points d'intersection de notre courbe C_n avec une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre, on a, d'après le théorème connu de Hermite (t. II, p. 390 et suiv.) et sans qu'il soit nécessaire d'entrer de nouveau dans les détails,

$$(15) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_{mn} \equiv m\vartheta,$$

ϑ étant égal à $-\alpha'_{n+1} - \alpha'_{n+2} \ldots - \alpha'_{2n}$; or ce n'est là autre chose que le théorème d'Abel, car le paramètre u est précisément égal à l'*unique* intégrale finie qui appartient à C_n (t. II, p. 357),

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \text{ pour } z = \operatorname{sin am} u.$$

Nous n'insisterons pas une fois de plus sur les applications du théorème d'Abel pour la détermination des courbes de contact dans ce cas particulier de $p = 1$. Rappelons seulement qu'ici aussi il faut faire usage du *problème de l'inversion étendu* (p. 266), dès que l'on considère des courbes ne passant pas par tous les points de la courbe primitive C_n [1].

Comme pour les courbes du genre zéro (p. 294), on peut ici se poser la question inverse de savoir si par des équations de la forme (4) ou (14) se trouve *toujours* représentée une courbe du genre 1, et comment, s'il en est ainsi, se déterminent les singularités de cette

---

[1] *Voir* pour les détails le Mémoire déjà cité de CLEBSCH. On y trouve, traité avec soin, l'exemple d'une courbe de quatrième ordre à deux points doubles, y compris en particulier la détermination de ses tangentes doubles. Ces courbes ont été étudiées au point de vue purement algébrique (dans un ordre d'idées d'ailleurs tout différent) par CASEY, CHASLES, QUETELET, CAYLEY, HART. (*Voir* sur ce point SALMON, *Higher plane curves*). On a surtout fait des recherches sur les propriétés métriques des courbes du quatrième ordre, dont deux points doubles se trouvent aux points circulaires. Quant à l'équation algébrique dont dépend la détermination des courbes de contact non adjointes et de l'ordre $n - 3$, *voir* C. JORDAN, *Traité des Substitutions*, p. 331.

courbe [1]. Que la première question doive recevoir, en général, une réponse affirmative, c'est ce qui a à peine besoin d'explication [2]; pour ce qui concerne la seconde, nous allons déterminer les points doubles au moyen de la représentation paramétrique de C_n, ce qui au surplus résoudra complètement la première. On pourrait d'abord, en prenant pour point de départ les équations (6) combinées avec (7), procéder comme il a été enseigné dans la théorie générale des transformations unidéterminatives d'une courbe algébrique, c'est-à-dire au moyen de la courbe $M = 0$ (*voir* p. 5); toutefois, nous nous proposons d'effectuer cette détermination en faisant uniquement usage des variables binaires introduites dans les équations (4).

Dans la recherche dont il s'agit, ces dernières équations ne peuvent d'ailleurs être employées telles qu'elles sont. Nous avons vu, en effet, que les expressions qui figurent dans leurs seconds membres s'évanouissent simultanément lorsque la condition $\Sigma\Sigma w'_{ik} y_i y_k = 0$ est remplie, et la cause en est nécessairement que les expressions en question renferment toutes les trois le facteur $\sqrt{\Sigma\Sigma w'_{ik} y_i y_k}$, le carré de ce dernier se présentant comme facteur de l'équation (9), déduite de (8) par élévation au carré. Actuellement, pour mettre les seconds membres de (4), au moyen d'une substitution irrationnelle, sous une forme aussi simple que possible, le mieux est d'avoir recours à la représentation par fonctions elliptiques, c'est-à-dire aux équations (12) et (14). Introduisons dans ces dernières, à la place de u, un nouveau paramètre [3]

$$v = u - \frac{\mathfrak{S}}{n}, \tag{16}$$

et à la place des α les valeurs constantes

$$\beta_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} - \frac{\mathfrak{S}}{n},$$

---

[1] Des questions analogues se présentent à l'égard d'une autre représentation paramétrique d'une courbe de genre $p = 1$, laquelle est basée sur la représentation d'une fonction algébrique par des intégrales de deuxième espèce et a été étudiée par HERMITE (*Journal de Crelle*, t. 82); *voir* aussi la note de la page 232.

[2] Des exceptions pourraient se présenter par exemple dans le cas des courbes décomposables.

[3] Semblablement ce qui a été fait pour une courbe C_3, t. II, p. 391.

en sorte qu'on puisse écrire les équations (14) sous la forme

$$(17)\qquad \rho x_i = C_i \mathrm{H}(v - \beta_1^{(i)}) \,.\, \mathrm{H}(v - \beta_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(v - \beta_n^{(i)})$$

avec

$$\beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} + \ldots + \beta_n^{(i)} \equiv 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Maintenant, en vertu de cette dernière relation, on peut, en prenant la proposition réciproque du théorème plusieurs fois cité de Hermite, donner aux équations (17), si n est pair, la forme

$$(18)\qquad \rho x_i = C_i \left[\mathrm{F}_i^{\left(\frac{n}{2}\right)}(\mu) + \sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)} \,.\, \mathrm{F}_i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\mu) \right],$$

dans laquelle μ est égal à $\sin^2 \mathrm{am}\, v$, et les indices supérieurs des F_i indiquent l'ordre de ces fonctions, et si n est impair, la forme [1]

$$(19)\qquad \rho x_i = C_i \left[\mathrm{F}_i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\mu)\sqrt{\mu} + \sqrt{(1-\mu)(1-k^2\mu)} \,.\, \mathrm{F}_i^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\mu) \right],$$

ou si nous multiplions par $\sqrt{\mu}$ dans les seconds membres

$$(19)^*\qquad \rho x_i = C_i \left[\mathrm{F}_i^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(\mu) + \sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)} \,.\, \mathrm{F}_i^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\mu) \right].$$

Les fonctions elliptiques ont été introduites dans les équations (4) au moyen de la substitution

$$(20)\qquad \frac{\lambda - a_1}{\lambda - a_2} \cdot \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \equiv \lambda' = \sin^2 \mathrm{am}\, u.$$

D'un autre côté, la variable μ qui se rencontre dans (18) et (19) a la signification suivante :

$$(21)\qquad \sqrt{\mu} = \sin \mathrm{am}\left(u - \frac{\mathfrak{S}}{n}\right) = \frac{\sqrt{\lambda'(1-\varepsilon)(1-k^2\varepsilon)} - \sqrt{\varepsilon(1-\lambda')(1-k^2\lambda')}}{1 - k^2\varepsilon\lambda'},$$

λ' étant défini par (20), et ε par

$$(22)\qquad \sqrt{\varepsilon} = \sin \mathrm{am}\, \frac{\mathfrak{S}}{n}.$$

---

[1] La modification du théorème pour ce cas peut être déduite de ce qui précède, en prenant par exemple $\beta_n^{(i)} = 0$; alors dans le premier membre doit se séparer un facteur $\sqrt{\mu} = \sin \mathrm{am}\, v$, et il reste les expressions indiquées. Le résultat obtenu dans $(19)^*$ concorde avec celui obtenu pour les courbes de troisième ordre, t. II, p. 416, car on a pour ces courbes $\frac{1}{2}(n+1) = 2$, $\frac{1}{2}(n-3) = 0$.

Nous avons, en conséquence, passé des équations (4) *aux équations réduites* (18) *et* (19) *au moyen d'une substitution irrationnelle* (21) qui a rendu possible la suppression des facteurs superflus. Imaginons enfin qu'au lieu de μ on ait introduit un nouveau paramètre z, tel que $\mu = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$, et nous pourrons énoncer les résultats obtenus sous la forme suivante :

Les coordonnées d'un point d'une courbe d'ordre $2m$ *et de genre* 1 *peuvent toujours se représenter sous la forme*

$$\rho x_i = f_i^{(m)}(z) \pm \varphi_i^{(m-2)}(z)\sqrt{R^{(3)}(z)},$$

et celles d'un point d'une courbe d'ordre $2m+1$ *sous la forme*

$$\rho x_i = f_i^{(m)}(z)\sqrt{P^{(1)}(z)} \pm \varphi_i^{(m-1)}(z)\sqrt{Q^{(2)}(z)}.$$

Nous pouvons, pour une courbe d'ordre n, réunir les deux représentations dans la formule unique

$$\rho x_i = f_i^{(k)}(z)\sqrt{M} \pm \varphi_i^{(h)}(z)\sqrt{N}, \tag{23}$$

en convenant de prendre $k \gtreqless \frac{1}{2}n$, $h \leqq \frac{1}{2}n$ et $h + k = -2$, et en supposant en outre que M soit de l'ordre $n - 2k$, N de l'ordre $n - 2h$ (en sorte que le produit MN soit toujours du quatrième ordre). En fait, les équations (23) représentent toujours une courbe C_n, car, pour les points d'intersection avec une droite $\beta_x = 0$, on trouve l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en z

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3)^2 M - (\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + \beta_3\varphi_3)^2 N = 0.$$

Les points doubles de la courbe (23) se déterminent par la circonstance que l'on obtient, pour deux valeurs différentes z, z', des valeurs des x_i proportionnelles les unes aux autres. Alors ont lieu les équations suivantes

$$f_i\sqrt{M} + \varphi_i\sqrt{N} = \sigma(f_i'\sqrt{M'} + \varphi_i'\sqrt{N'}), \tag{24}$$

les accents se référant dans le second membre à l'argument z'. Les déterminants ternaires que l'on peut former avec le tableau

$$\begin{matrix} f_1 & \varphi_1 & f_1' & \varphi_1' \\ f_2 & \varphi_2 & f_2' & \varphi_2' \\ f_3 & \varphi_3 & f_3' & \varphi_3' \end{matrix}$$

par la suppression d'une ligne verticale, divisés par $z - z'$, seront désignés respectivement par F, Φ, F', Φ', en sorte que ces fonctions seront respectivement

en z, des ordres $h-1,\quad k-1,\quad h+k-1,\quad h+k-1$
et en z', des ordres $h+k-1,\quad h+k-1,\quad h-1,\quad k-1.$

De (24) résulte alors

$$\sqrt{M} : \sqrt{N} : \sigma\sqrt{M'} : \sigma\sqrt{N'} = F : \Phi : F' : \Phi',$$

ou

$$(25)\qquad \begin{cases} F^2 N - \Phi^2 M \equiv \Omega(z, z') = 0, \\ F'^2 N' - \Phi'^2 M' \equiv \Omega(z', z) = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations sont pour le premier argument du degré $n-2$, pour le second du degré $2n-6$, et ne diffèrent que par l'échange de z avec z'. Si donc on élimine z' entre elles, le résultat est divisible par $\Omega(z, z)$ et, par conséquent, après séparation de ce facteur, l'expression restante est du degré

$$(n-2)^2 + (2n-6)^2 - 3n - 8 = (n-3)(5n-16).$$

Mais l'équation ainsi obtenue possède encore un facteur surabondant, car les équations (25) ne donnent par réciprocité les conditions des équations (24) que si F, Φ, F', Φ' ne s'évanouissent pas simultanément. Or cette dernière circonstance peut, en réalité, se présenter. En effet, parmi les équations

$$(26)\qquad F = 0,\quad \Phi = 0,\quad F' = 0,\quad \Phi' = 0,$$

la troisième et la quatrième sont toujours une conséquence des deux premières. Car, puisqu'en vertu de l'origine de ces expressions on a toujours identiquement

$$F f_i + \Phi \varphi_i + F' f'_i + \Phi'_i \varphi'_i = 0,$$

on aura toujours, pour $F = 0$, $\Phi = 0$, les trois équations

$$F' f'_i + \Phi' \varphi'_i = 0,$$

desquelles résulte toujours $F' = 0$, $\Phi' = 0$ en général (c'est-à-dire si l'on n'a pas, par exemple, simultanément $f'_1 = 0$, $\varphi'_1 = 0$ et $(f'_2 \varphi'_3 - f'_3 \varphi'_2 = 0)$. Or, d'après ce qui précède, les ordres de F et Φ

sont égaux à $h-1$ et $k-1$ en z, et à $h+k-1$ en z'. Le nombre des couples de racines z, z' communs aux équations $F=0$, $\Phi=0$ est donc égal à

$$(h+k-1)(h+k-2)=(n-3)(n-4).$$

Mais chacune des expressions (25) s'évanouit au second ordre en vertu de (26); si donc nous considérons ces équations comme les équations de deux courbes par rapport aux coordonnées z, z', les points du plan qui correspondent aux $(n-3)(n-4)$ couples de valeurs z, z' dont il a été parlé sont des points doubles des deux courbes, et par conséquent $4(n-3)(n-4)$ intersections de ces courbes s'y trouvent réunies. De l'équation déduite de (25) par élimination de z', on pourra donc séparer un facteur du degré $4(n-3)(n-4)$; le reste est alors du degré

$$(n-3)(5n-16)-4(n-3)(n-4)=n(n-3).$$

Ce fait est d'accord avec l'existence de $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles, puisqu'à chaque point double correspondent *deux* arguments et par conséquent deux racines de l'équation en question. Cette dernière possède en même temps la propriété qu'une racine z' tirée de (25) est toujours une fonction rationnelle d'une racine déterminée z, et que z est la même fonction rationnelle de z'. On résout donc l'équation du $n(n-3)^{\text{ième}}$ degré dont il s'agit à l'aide d'une équation du degré $\frac{1}{2}n(n-3)$ et de $\frac{1}{2}n(n-3)$ équations du second degré.

XIV. — Les courbes du genre $p=2$.

Nous nous proposons pour finir d'étudier encore en détail *les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre du genre $p=2$*. Nos recherches générales précédentes ont déjà fait ressortir que ces courbes appartiennent toujours à la classe des courbes hyperelliptiques (*voir* p. 72, note), c'est-à-dire que l'on peut toujours assigner un faisceau de courbes adjointes C_{n-3} qui les coupe en deux points mobiles seulement (déterminant ainsi sur C_n un système $g_2^{(1)}$); d'où cette conséquence que toute courbe *du genre $p=2$ peut être ramenée à une courbe du quatrième ordre ayant un point double,* et cela toujours sous

la forme (p. 76)

$$(1)\qquad x_2^2\varphi_2(x_1, x_3) - \psi_4(x_1, x_3) = 0.$$

Le fait qu'il existe réellement un semblable faisceau de courbes C_{n-3} est évident; car, puisque $p - 1 = 1$ et $p2 - 2 = 2$, il y a juste un *seul* système *simplement* infini de *deux* points pouvant être déterminé par des adjointes C_{n-3}.

On pourra faire usage de ces faisceaux de courbes C_{n-3} pour effectuer la représentation paramétrique de notre courbe C_n comme des faisceaux de courbes C_{n-1} dans les courbes du genre $p = 1$. Ce procédé est d'ailleurs également applicable dans les courbes hyperelliptiques de genre plus élevé; nous allons, pour cette raison, effectuer immédiatement la représentation paramétrique pour des courbes hyperelliptiques quelconques. Une courbe de cette espèce a été définie par la circonstance qu'il existe sur elle un système $g_2^{(1)}$; il y a donc, en toute hypothèse, un faisceau

$$(2)\qquad \chi_1 + \lambda\chi_2 = 0$$

de courbes C_{n-3} déterminant $g_2^{(1)}$ par leurs intersections. En éliminant les x_i entre (1), (2) et entre l'équation $u_x = 0$, et en négligeant les facteurs indépendants de λ [1], on obtient le produit des équations des deux points d'intersection mobiles sous la forme

$$(3)\qquad \Sigma\Sigma\, w_{ik} u_i u_k = 0,$$

les w_{ik} étant des fonctions du $n^{\text{ième}}$ ordre en λ dont le déterminant est nul. On a donc aussi, comme dans le cas de $p = 1$, pour les coordonnées des points d'intersection mobiles considérées comme fonctions de λ, les expressions (p. 316)

$$(4)\qquad \rho x_i = w_{i1}\gamma_1 + w_{i2}\gamma_2 + w_{i3}\gamma_3 + (\gamma l)_i\sqrt{Q},$$

les γ_i étant encore des grandeurs arbitraires, et Q, l_1, l_2, l_3 des

---

[1] Il y a, en effet, encore $2p - 4$ points de base du faisceau (1) qui sont placés en des points fixes simples de C_n. Pour $p = 2$, étant admis que l'on fera usage d'un faisceau de courbes C_{n-1}, des considérations analogues à celles du texte ont été données dans Clebsch et Gordan, *op. cit.*, p. 77. (*Voir*, sur ce sujet, quelques corrections de Clebsch, *Math. Annalen*, t. I, p. 170.) Pour les courbes hyperelliptiques quelconques, consulter aussi la note de Cremona, citée p. 75.

fonctions rationnelles de λ, de telle nature que l'on ait

$$l_i l_k \mathrm{Q} = -\mathrm{W}_{ik}. \tag{5}$$

Mais, dans le cas actuel, le degré de la fonction Q en λ n'est pas le même que dans le cas de $p = 1$. Ce degré est, en effet, évidemment égal au nombre des courbes tangentes comprises dans le faisceau (2), c'est-à-dire (t. II, p. 171) égal à [1]

$$2(2+p-1) = 2p+2.$$

En vertu de (5), les quantités l_i sont alors du degré $n-p-1$ en λ, car les quantités W_{ik} sont du degré $2n$.

Si donc on pose

$$\mathrm{Q} = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_{2p+2}), \tag{6}$$

et ensuite

$$\left\{\begin{aligned} & y_1 = (\lambda - a_1)(a_3 - a_2), \quad y_2 = (\lambda - a_2)(a_3 - a_1), \\ & y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{p-2}^2 y_2) = \frac{\sqrt{\mathrm{Q}}}{m}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

en faisant, pour abréger,

$$k_r^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \cdot \frac{a_{r+3} - a_1}{a_{r+3} - a_2} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p-1), \tag{8}$$

$$m^2 = \frac{(a_4 - a_2)(a_5 - a_2)\ldots(a_{2p+2} - a_2)}{(a_1 - a_2)^{2p}(a_3 - a_2)^{2p}(a_3 - a_1)}, \tag{9}$$

on peut représenter les fonctions w_{ik}, l_i comme fonctions homogènes w'_{ik} d'ordre n et l'_i d'ordre $n-p-1$ en y_1, y_2, et *l'on obtient ainsi, pour les x, les expressions rationnelles par rapport aux y*,

$$\left\{\begin{aligned} \rho x_i = {} & \gamma_1 w'_{i1} + \gamma_2 w'_{i2} + \gamma_3 w'_{i3} \\ & + m(\gamma l')_i y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{p-2}^2 y_2). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

De (7) et (8) se déduisent d'ailleurs les relations

$$\left\{\begin{aligned} & y_1 - y_2 = (a_1 - a_2)(\lambda - a_3), \\ & y_1 - k_r^2 y_2 = \frac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}{a_{r+3} - a_2}(\lambda - a_{r+3}), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

---

[1] On le vérifie encore directement par la recherche du déterminant fonctionnel de f, χ_1, χ_2 qui détermine les points de contact sur $f = 0$.

de sorte qu'en vertu de (6)

$$(12)\quad Q = m^2 . y_1 y_2 (y_1 - y_2)(y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{2p-1}^2 y_2).$$

Par conséquent, entre les quantités y elles-mêmes, existe, en vertu de (7), *l'équation*

$$(13)\quad \begin{cases} y_3^2 y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{p-2}^2 y_2) \\ \quad = (y_1 - y_2)(y_1 - k_{p-1}^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{2p-1}^2 y_2). \end{cases}$$

Notre courbe C_n *est donc, en fait, ramenée par la substitution* (11) *à la forme normale précédemment indiquée et caractérisée* (p. 75).

Si l'on imagine qu'inversement l'équation (13) soit donnée, et que la courbe C_{p+2} ainsi représentée soit transformée au moyen des formules (10) en une courbe C_n, $f(x) = 0$, les trois courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre représentées par l'évanouissement des expressions qui figurent au second membre de (10) devront avoir toutes leurs intersections avec la courbe (13) commune, excepté n, c'est-à-dire que, β_1, β_2, β_3 étant des paramètres homogènes, les courbes du réseau

$$(14)\quad \left.\begin{matrix} \Sigma\Sigma\omega'_{ik}\gamma_i\beta_k + m(\beta\gamma l') \\ \quad \times y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{p-2}^2 y_2) \end{matrix}\right\} = 0$$

ne pourront rencontrer la courbe d'ordre $p+2$ donnée dans (13) qu'en n points mobiles. Le fait se vérifie comme au cas de $p = 1$. En effet, dans le voisinage du point ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$), on peut remplacer la courbe (14) par le système de $n - 1$ droites

$$(\beta\gamma l') y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_1)\ldots(y_1 - k_{p-2}^2 y_2) = 0,$$

dont p sont indépendantes des β_i et en même temps tangentes de C_{p+2} en son point multiple d'ordre p. Par suite, en ce dernier, toutes les courbes du réseau (14) ont un point multiple d'ordre $n-1$; donc

$$(n-1)p + p = np$$

intersections de chacune des courbes C_n ci-dessus avec C_{p+2} s'y trouvent réunies. On démontre, d'ailleurs, aisément (à peu près comme p. 319) que n autres points fixes du réseau en question

sont donnés sur C_{p+2} par l'équation

$$\Sigma\Sigma\omega'_{ik}\gamma_i\gamma_k = 0.$$

Le nombre des points d'intersection mobiles de cette dernière courbe et des courbes du réseau est effectivement égal à

$$n(p+2) - np - n = n.$$

A l'aide d'une substitution irrationnelle, on pourra encore abaisser les ordres des seconds membres des équations (10) de telle manière qu'il ne s'y rencontre plus de points racines communs. Mais nous n'entreprendrons pas ici cette recherche.

Nos explications précédentes sur le théorème d'Abel, sur le problème de Jacobi et sur l'extension du problème de l'inversion [1] conservent ici toute leur valeur, ainsi qu'il suffit de le rappeler en un mot. Faisons seulement observer que pour la forme normale (13) des courbes hyperelliptiques toute courbe adjointe C_{n-3} (ici C_{p-1}) se décompose en $p-1$ droites passant par le point multiple d'ordre p.

En finissant, nous voulons appeler l'attention sur *le problème de la trisection au cas de* $p = 2$ qui a été traité en détail d'une manière purement algébrique, et qui a ainsi conduit à des questions intéressantes de la théorie des formes binaires. Soit

$$z^2\varphi - \psi = 0 \tag{17}$$

l'équation de la courbe primitive C_4; φ et ψ sont ici respectivement des fonctions homogènes l'une du deuxième, l'autre du quatrième ordre en x, y. Nous désignerons par s et t les deux intégrales normales de première espèce; nous indiquerons les limites supérieures par l'addition d'indices supérieurs, et nous choisirons leur limite inférieure constante, en sorte que, σ, τ étant des grandeurs don-

[1] Pour ce qui concerne les intégrales hyperelliptiques, *voir* ce qui a été dit p. 151, et, pour le théorème d'Abel, le Mémoire d'Abel cité p. 200. Sur la solution du problème de l'inversion, consulter aussi les travaux cités p. 136, de Weierstrass, Neumann et Prym; et, pour le cas particulier de $p = 2$, le Mémoire de Rosenhain cité p. 185. L'extension du problème de l'inversion a été traitée précédemment pour $p = 2$ (p. 268 et suiv.); *voir* aussi le travail de Brill mentionné au même lieu.

nées, le problème d'inversion de Jacobi se présente dans les équations suivantes

$$s + s' = \sigma, \quad t + t' = \tau.$$

Soit maintenant v une fonction homogène encore indéterminée du troisième ordre en x, y; l'équation

$$z\varphi - v = 0 \tag{18}$$

représente une courbe du troisième ordre qui a de même en $x = 0$, $y = 0$ un point double dont les branches touchent les branches de la courbe (17). Donc six des douze points d'intersection des deux courbes tombent au point double; on obtient les autres au moyen de l'équation du sixième degré

$$v^2 - \varphi\psi = 0, \quad \text{ou} \quad v^2 - f = 0 \quad (f \equiv \varphi . \psi) \tag{19}$$

qui se déduit de (17) et (18). Mais nous nous proposons en particulier de chercher des fonctions v, telles que les courbes correspondantes (18) aient un contact du second ordre avec C_4 en deux points différents. Pour ces fonctions l'équation (19) doit avoir deux fois trois racines égales; on aura donc identiquement

$$v^2 - f = u^3, \tag{20}$$

u désignant une forme quadratique; ou, ce qui est la même chose, il faut que *la forme donnée du sixième ordre* $f (= \varphi\psi)$ *puisse être réduite à la forme* $f = v^2 - u^3$ [1]. A chaque manière de représenter la fonction f sous cette forme correspond une des courbes de contact cherchées, ou plutôt deux, qui sont données par les équations

$$z\varphi - v = 0 \quad \text{et} \quad z\varphi + v = 0.$$

Sous forme transcendante le même problème est représenté par les équations

$$3[s^{(1)} + s^{(2)}] = c, \quad 3[t^{(1)} + t^{(2)}] = \gamma,$$

---

[1] Ce problème de transformation a d'abord été traité par Cayley (*Quarterly Journal*, t. IX). On le trouve résolu d'une manière complète et en connexion avec le problème de la trisection, dans Clebsch, *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. XIV, 1869; *voir* aussi les notes de Brioschi sur cet objet, *Annali di Matematica*, série 2, t. VII.

où c et γ désignent des constantes qui sont indépendantes des constantes de la fonction v. Mais l'équation (18) est évidemment satisfaite aussi de la manière demandée par une courbe du troisième ordre improprement dite qui se compose d'une droite comptant trois fois menée par le point double. En admettant qu'une ligne de cette espèce coupe la courbe donnée en deux points auxquels correspondent les intégrales $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, on a aussi alors

$$3[\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}]=c, \quad 3[\tau^{(1)}+\tau^{(2)}]=\gamma,$$

ou, enfin, P, Q désignant des systèmes de modules de périodicité liés entre eux,

$$(21) \qquad \begin{cases} s^{(1)}+s^{(2)}=\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}+\frac{1}{3}\mathrm{P}, \\ t^{(1)}+t^{(2)}=\tau^{(1)}+\tau^{(2)}+\frac{1}{3}\mathrm{Q}; \end{cases}$$

ce sont là les équations du problème de la trisection spéciale (p. 232). Pour $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$, on a de nouveau la solution improprement dite indiquée il y a un instant, et qui est en même temps indéterminée. Il reste encore $3^4-1=80$ *solutions proprement dites qui correspondent aux différentes manières d'amener la fonction f à la forme v^2-u^3.*

Mais parmi ces quatre-vingts solutions deux sont toujours liées l'une à l'autre, de telle façon que, si l'une conduit à v, l'autre donne $-v$. Considérons, en effet, deux solutions pour lesquelles les périodes P, Q sont égales et de signe contraire, et désignons les intégrales qui répondent à l'une d'elles par les indices 1, 2, celles qui répondent à l'autre par les indices 3, 4; on a, d'après (21),

$$s^{(1)}+s^{(2)}+s^{(3)}+s^{(4)}+\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}=3[\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}]=c,$$
$$t^{(1)}+t^{(2)}+t^{(3)}+t^{(4)}+\tau^{(1)}+\tau^{(2)}=3[\tau^{(1)}+\tau^{(2)}]=\gamma.$$

Les points de contact des deux courbes de contact employées sont donc situés, conjointement avec les points d'intersection d'une droite menée par le point double, sur une courbe du troisième ordre du système (18). Mais cette dernière est coupée en quatre points par la droite menée d'une manière quelconque par le point double; elle se compose donc de cette droite et d'une conique;

celle-ci doit enfin couper C_4 en quatre points au point double, y avoir conséquemment elle-même un point double, c'est-à-dire se décomposer en deux droites. Donc les points de contact de l'une des courbes de contact sont situés conjointement avec ceux de l'autre sur deux droites passant par le point double, et cela de telle sorte que chacune des droites renferme un point de contact de chacune des deux courbes du troisième ordre, car, s'il en était autrement, il faudrait qu'il existât aussi des équations de la forme

$$\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = c', \quad \tau^{(1)} + \tau^{(2)} = \gamma'.$$

L'équation $v^2 - f = 0$ doit donc fournir les mêmes racines pour les deux courbes, c'est-à-dire que les deux fonctions correspondantes v ne peuvent différer que par le signe (¹). Deux solutions de cette espèce conduisent ainsi à la même transformation de f, et l'on a seulement quarante solutions différentes au fond. Ces dernières sont groupées, d'ailleurs, les unes par rapport aux autres d'une façon très remarquable, ainsi qu'il résulte, d'une part, de la théorie des formes binaires, d'autre part, de celle des équations de division pour le cas de $p = 2$ (²). Ce n'est pas ici le lieu d'approfondir ces recherches. Nous nous contenterons d'appeler l'attention sur la connexion intime de ces questions purement algébriques et de celles qui proviennent des problèmes de l'inversion et de la division des intégrales abéliennes, connexion que nous avons plusieurs fois mise en lumière et expliquée au cas de $p = 1$, en considérant les systèmes de points sur une courbe du troisième ordre (*voir* spécialement t. II, p. 417 et suiv.).

(¹) Cela résulte au surplus de la manière complètement symétrique dont se comporte la courbe primitive vis-à-vis de la ligne $z = 0$.

(²) *Voir* Camille Jordan, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, avril 1869.

CHAPITRE II.

LES CONNEXES.

I. — Formes algébriques ternaires à plusieurs séries de variables. Systèmes équivalents.

Dans nos études antérieures, nous avons considéré le plus souvent comme figure fondamentale une courbe particulière envisagée, soit au point de vue tangentiel, soit au point de vue ponctuel : ou, pour parler le langage de l'Algèbre, nous avons pris comme *forme fondamentale* une forme ternaire dont l'évanouissement représentait précisément la courbe dont il s'agit, et l'étude des invariants, des covariants et des formes mixtes de cette forme fondamentale s'est présentée à nous comme se confondant au fond avec l'étude des propriétés projectives de la susdite courbe et des figures qui en sont déduites. Cependant l'Algèbre doit se proposer la tâche d'étudier aussi les formes fondamentales qui comprennent plusieurs séries de variables, coordonnées-points $x_i, y_i, \ldots$, ou coordonnées-lignes $u_i, v_i, \ldots$, ainsi que le cas s'est déjà présenté dans les polaires d'une courbe; problème qui, à cause de sa généralité, semblerait d'abord étranger à la Géométrie. Mais il y a ici un fait très important, c'est que *l'étude de ces formations tout à fait générales peut toujours être ramenée à l'étude d'un système simultané de formes dont chacune renferme seulement une série de coordonnées-points,* ou *une série de coordonnées-lignes, ou bien une série de coordonnées-points* et *une série de coordonnées-lignes* (*voir* aussi t. I, p. 335). Conjointement avec la courbe (considérée comme figure ponctuelle ou tangentielle) se présente donc algébriquement au même titre la figure représentée par l'annulation

d'une forme mixte quelconque [1], figure que l'on désigne sous le nom de *connexe,* et dont l'étude attentive est également réclamée par la Géométrie, l'Algèbre et la Géométrie étant destinées à se faire avancer l'une l'autre par une action réciproque et constante. Toutefois, avant d'approfondir les connexes, il sera bon d'expliquer en quelques mots les théories *algébriques* indiquées et de les éclaircir par des exemples, sans que nous puissions, d'ailleurs, viser à être complet.

Deux systèmes de formes algébriques seront appelés *équivalents* lorsque tous les invariants fonctionnels de l'un sont compris parmi ceux de l'autre, et, réciproquement, lorsque, par conséquent, l'ensemble des invariants fonctionnels que l'on peut former est identique pour les deux systèmes; or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que toutes les formes de l'un des systèmes soient des covariants simultanés des formes de l'autre système, et réciproquement. On pourra donc, pour un système donné, trouver des systèmes équivalents de plusieurs manières très diverses; toutefois on choisira de préférence pour l'étude certains systèmes plus particulièrement appropriés à l'objet qu'on a en vue. Un système de cette espèce, très important pour notre but, est celui qu'on appelle *le système réduit équivalent* des formes proposées, et qui est caractérisé par la circonstance que chacune des formes qui en font partie renferme une seule série de coordonnées de la même espèce, alors même que dans la forme primitive se trouveraient plusieurs séries de cette sorte. Faisons observer immédiatement ici que toute forme déduite d'une forme donnée Π par le procédé invariant

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} y_3,$$

c'est-à-dire par formation polaire, doit être considérée comme un covariant de la forme Π, ainsi que nous l'avons toujours fait pour les polaires d'une courbe. Conséquemment, le système équivalent d'une forme à deux séries de variables (x_i, y_i), par exemple, qui est la polaire d'un certain ordre d'une forme à une seule série de coordonnées-points, se compose simplement de cette dernière forme

---

[1] Jusqu'ici, au contraire, nous n'avons considéré les formes mixtes qu'en tant que figurant parmi les invariants fonctionnels d'une forme à une série de variables.

elle-même. La question proposée ne commence donc à présenter de l'intérêt que pour les formes représentables symboliquement par le type ([1])

$$f = a_x^m b_y^n, \tag{1}$$

sans cependant provenir de la forme $a_x^m b_x^n$ par formation polaire. Le cas le plus simple est celui où $m = n = 1$; alors l'équation $a_x b_y = 0$ représente la transformation dualistique la plus générale, car (pour $\alpha_{ik} = a_i b_k$) à tout point y répond une droite ayant pour coordonnées

$$\rho v_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \alpha_{i3} y_3.$$

Dans le cas seulement de $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, cette transformation se confond avec la réciprocité polaire qui a pour base la conique $\Sigma\Sigma\alpha_{ik} x_i x_k = 0$, c'est-à-dire $a_x b_x = 0$; donc, dans ce seul cas, $a_x b_y$ est la polaire de la forme $a_x b_x$ ([2]).

Nous voulons, dans ce qui suit, nous borner à l'exemple que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire au cas où *deux séries de coordonnées-points* se rencontrent dans une forme fondamentale (1). Nous pourrons expliquer suffisamment, à ce propos, le fond des recherches dont il s'agit ([3]). Nous disons, dans ce cas, que, *pour m supérieur à n, le système des formes*

$$\varphi_0 = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1}(abu), \quad \ldots, \quad \varphi_n = (abu)^n a_x^{m-n} \tag{2}$$

est équivalent à la forme $f = a_x^m b_y^n$ dans le sens indiqué. La forme f est donc alors remplacée par une série de formes qui offrent un caractère plus simple en ce qu'une seule parmi elles est du même degré total que f, mais ne renferme qu'une série de

---

([1]) Cette notation symbolique a déjà été employée occasionnellement, t. II, p. 154 et suiv.

([2]) Nous ne reviendrons plus dans la suite sur les formes bilinéaires. Faisons seulement observer ici que celles-ci ont été étudiées sous les points de vue les plus divers. Pour la théorie algébrique, *voir* surtout les Mémoires de KRONECKER, dans les *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*, année 1874.

([3]) Le problème relatif aux formes renfermant un nombre quelconque de variables et un nombre quelconque de séries de variables a été traité en général par CLEBSCH, dans le Mémoire cité, t. I, p. 335, et qui forme la base des développements du texte. On trouve aussi un exposé sommaire de ce Mémoire dans les *Math. Annalen*, t. V, p. 427.

coordonnées-points, tandis que les autres sont d'un degré total moins élevé ; l'expression *degré total* désignant la somme des degrés par rapport aux x et par rapport aux u, c'est-à-dire ici les nombres respectifs

$$m+n-1, \quad m+n-2, \quad \ldots, \quad m.$$

Nous avons maintenant à montrer que les fonctions φ_i sont des invariants fonctionnels de f, et qu'inversement f est un covariant simultané des fonctions φ_i. Mais le premier point est déjà évident par la loi symbolique de formation des φ_i ; rappelons au surplus que les φ_i dérivent de f par l'application réitérée d'un procédé invariant (t. I, p. 335). En effet, on déduit simplement φ_0 de f en posant $x=y$, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ dérivent semblablement des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} mn\varphi'_1 &= mna_x^{m-1}b_y^{n-1}(abu) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2}\right)u_1+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}\right)u_2 \\ &\quad+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}\right)u_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m-1)(n-1)\varphi'_2 &= (m-1)(n-1)a_x^{m-2}b_y^{n-2}(abu)^2 \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_2 \partial y_3}-\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_3 \partial y_2}\right)u_1+\left(\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_3 \partial y_1}-\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_1 \partial y_3}\right)u_2 \\ &\quad+\left(\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_1 \partial y_2}-\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_2 \partial y_1}\right)u_3, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On a, par conséquent,

$$\varphi_0=(f)_{x=y}, \quad \varphi_1=(\varphi'_1)_{x=y}, \quad \varphi_2=(\varphi'_2)_{x=y}, \quad \ldots.$$

Il nous reste maintenant uniquement à démontrer que f est également un invariant fonctionnel des φ_i. C'est à quoi l'on parvient en représentant f comme une somme de formes dérivées des formes φ_i par un procédé invariant. Posons, en effet, d'abord dans ces dernières,

$$u_1=x_2y_3-x_3y_2, \quad u_2=x_3y_1-x_1y_3, \quad u_3=x_1y_2-x_2y_1,$$

ou, en d'autres termes, déduisons-en les formes

$$(3)\quad \begin{cases} \psi_0=a_x^m b_x^n, \quad \psi_1=a_x^{m-1}b_x^{n-1}(a_xb_y-a_yb_x), \\ \psi_2=a_x^{m-2}b_x^{n-2}(a_xb_y-b_xa_y)^2, \quad \ldots, \quad \psi_n=a_x^{m-n}(a_xb_y-b_xa_y)^n. \end{cases}$$

Désignons ensuite par D le procédé polaire invariant

$$\begin{aligned} D\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} y_3 \equiv \Pi', \\ D^2 \Pi &= \frac{\partial \Pi'}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_3} y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Alors toutes les formes $D^k\psi_i$ sont évidemment des invariants fonctionnels des formes φ_i, et nous disons que *la forme* $f = a_x^m b_y^n$ *peut toujours se représenter suivant le type*

$$f = \alpha_0 D^n \psi_0 + \alpha_1 D^{n-1} \psi_1 + \alpha_2 D^{n-2} \psi_2 + \ldots + \alpha_n \psi_n, \tag{4}$$

les α_i *désignant des facteurs purement numériques et à détermination unique.*

Pour la détermination des coefficients α_i, on n'obtient, en effet, par identification des deux membres de (4), que des équations *linéaires* et précisément en nombre voulu. Soit, par exemple,

$$m = 3, \quad n = 2,$$

d'où

$$f = a_x^3 b_y^2,$$

et ensuite, pour abréger,

$$f' = a_x^2 a_y b_x b_y, \quad f'' = a_x a_y^2 b_x;$$

il vient

$$\left\{ \begin{aligned} D^2 \psi_0 &= 2f + 12f' + 6f'', \\ D\psi_1 &= f + f' - 2f'', \\ \psi_2 &= f - 2f' + f''. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

L'équation (4) se transforme donc en

$$f = (2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f + (12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2) f' + (6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2) f'',$$

et l'on a conséquemment, pour les α_i, les équations

$$\begin{aligned} 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \\ 12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

d'où, en résolvant,

$$\alpha_0 = \frac{1}{20}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \tag{6}$$

en sorte que

$$f = \frac{1}{20} D^2 \psi_0 + \frac{2}{5} D\psi_1 + \frac{1}{2} \psi_2.$$

Semblablement, dans le cas général, les termes du second membre sont des fonctions linéaires des $n+1$ formes

$$f = a_x^m b_y^n, \quad f' = a_x^{m-1} b_y^{n-1} a_y b_x, \quad \ldots, \quad f^{(n)} = a_x^{m-n} b_x^n a_y^n,$$

d'où, en vertu de (4),

$$f = \beta_0 f + \beta_1 f' + \beta_2 f'' + \ldots + \beta_n f^{(n)},$$

les β_i étant des combinaisons linéaires des α_i à l'égard desquelles doivent avoir lieu les équations

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \beta_n = 0.$$

Il nous reste encore seulement à montrer que ces dernières équations donnent toujours un système de valeur *déterminé* des α_i. Or l'équation identique (4) donnée pour f doit être satisfaite identiquement si l'on pose

$$y_i = x_i + \lambda z_i,$$

et cela indépendamment de λ, c'est-à-dire que les coefficients des mêmes puissances de λ doivent être égaux dans les deux membres. Mais, par cette substitution, ψ_1 se transforme en

$$\lambda (a_x b_z - a_z b_x) a_x^{m-1} b_x^{n-1}$$

et généralement ψ_i en

$$\lambda^i (a_x b_z - a_z b_x)^i a_x^{m-i} b_x^{n-i}.$$

Si donc nous faisons, dans l'équation qui a cette origine, $\lambda = 0$, nous obtenons une équation dans laquelle α_0 entre seul, et ce nombre se trouve complètement déterminé par là. Dans le coefficient de λ au second membre, il n'entre, conjointement avec des termes provenant de $D^n \psi_0$, que des termes provenant de $D^{n-1}\psi_1$; donc, dans ce coefficient, figurent seulement α_0 et α_1, ce qui détermine α_1, et ainsi de suite. Enfin, dans le coefficient de λ^ν, α_ν entre seul avec les nombres déjà connus maintenant α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1}$. On peut donc calculer successivement, en réalité,

tous les α_i, *et l'existence de l'équation* (4) *se trouve ainsi démontrée* (¹).

Effectuons ce calcul pour notre exemple, c'est-à-dire pour la forme $a_x^3 b_y^2$. En employant les abréviations

$$f_{00} = a_x^3 b_x^2,\quad f_{01} = a_x^3 b_x b_z,\quad f_{10} = a_x^2 a_z b_x^2,\quad f_{11} = a_x^2 a_z b_x b_z,\quad \ldots,$$

où les indices marquent combien de facteurs symboliques a_x, b_x sont à remplacer par des facteurs a_z, b_z, nous obtenons, par la substitution $y = x + \lambda z$,

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 (b_x + \lambda b_z)^2 &&= f_{00} + 2 f_{01}\lambda &&+ f_{02}\lambda^2. \\ f' &= a_x^2 b_x (a_x + \lambda a_z)(b_x + \lambda b_z) &&= f_{00} + (f_{01} + f_{10})\lambda &&+ f_{11}\lambda^2, \\ f'' &= a_x b_x^2 (a_x + \lambda a_z)^2 &&= f_{00} + 2 f_{10}\lambda &&+ f_{20}\lambda^2. \end{aligned}$$

Il vient ensuite, dans le premier membre de (4),

$$f = f_{00} + 2\lambda f_{01} + \lambda^2 f_{02},$$

et dans le second membre, en vertu de (5),

$$\begin{aligned} D^2\psi_0 &= 20 f_{00} + \lambda(16 f_{01} + 24 f_{10}) + \lambda^2(2 f_{02} + 12 f_{11} + 6 f_{20}), \\ D\psi_1 &= \lambda(3 f_{01} - 3 f_{10}) + \lambda^2(f_{02} + f_{11} - 2 f_{20}), \\ \psi_2 &= \lambda^2(f_{02} - 2 f_{11} + f_{20}). \end{aligned}$$

De là se déduisent les équations

$$\begin{aligned} 1 &= 20\alpha_0, \\ 2 f_{01} &= (16\alpha_0 + 3\alpha_1) f_{01} + (24\alpha_0 - 3\alpha_1) f_{10}, \\ f_{02} &= (2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f_{02} + (12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2) f_{11} + (6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2) f_{20}, \end{aligned}$$

d'où, pour les α_i,

$$1 = 20\alpha_0,\quad 2 = 16\alpha_0 + 3\alpha_1,\quad 1 = 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,$$

qui servent de nouveau à trouver les valeurs (6).

On apercevra facilement, d'après ce qui vient d'être dit, comment il faudra procéder au cas où plusieurs séries de coordonnées-

(¹) La détermination effective des nombres α se fait, en général, en partant des développements correspondants relatifs aux formes binaires, tels qu'ils ont été établis par GORDAN, *Math. Annalen*, t. III, et CLEBSCH, *Theorie der binären Formen*, § 8. *Voir* aussi CLEBSCH, *loc. cit.*, et GORDAN, *Math. Annalen*, t. V, p. 100.

points ou bien de coordonnées-lignes se présentent en même temps dans la forme primitive f. C'est ce que nous allons expliquer sur un seul exemple : *Nous chercherons le système réduit équivalent de la forme*

$$f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2, \tag{7}$$

qui renferme deux séries de coordonnées-points et une série de coordonnées-lignes. Nous procéderons d'abord comme pour la forme (1), en n'ayant égard qu'aux x et aux y; alors, à la place des formes (2), si l'on écrit v au lieu de u comme dans l'endroit cité, se présentent les suivantes :

$$\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad \varphi_1 = a_x b_x (abv) u_\alpha^2, \quad \varphi_2 = (abv)^2 u_\alpha^2. \tag{8}$$

Parmi ces formes, la première appartient déjà au système réduit de f. La dernière renferme deux séries de coordonnées-lignes (u et v), et, par conséquent, est à traiter de la même manière que la forme (1), à part l'interversion dualistique. La forme φ_2 est donc équivalente au système des formes suivantes :

$$\varphi_{20} = (abu)^2 u_\alpha^2, \quad \varphi_{21} = \frac{1}{4}(\Omega_x \varphi_2)_{u=v}, \quad \varphi_{22} = \frac{1}{4}(\Omega_x^2 \varphi_2)_{u=v},$$

si l'on désigne par Ω_x le procédé invariant

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_x \Pi = & \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2 \partial v_3} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3 \partial v_2} \right) x_1 \\ & + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3 \partial v_1} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial v_3} \right) x_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial v_2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2 \partial v_1} \right) x_3. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Or on a

$$\frac{1}{4}\Omega_x \varphi_2 = (abv) u_\alpha (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha), \quad \frac{1}{4}\Omega_x^2 \varphi_2 = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2.$$

Le système réduit équivalent de la forme φ_2 se compose donc des formations

$$\varphi_{20} = (abu)^2 u_\alpha^2, \quad \varphi_{21} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)(abu) u_\alpha, \quad \varphi_{22} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2. \tag{10}$$

Il nous reste maintenant à traiter encore la forme φ_1. Nous la considérerons d'abord comme dépendant seulement de u et v, et nous lui appliquerons, par suite, le procédé Ω_x défini par (9), en nous

contentant d'écrire, dans le second membre de (9), y_i au lieu de x_i. Alors φ_1 devient d'abord équivalent à

(11) $$\varphi_{10} = (abu)a_x b_x u_\alpha^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\Omega_y \varphi_1 = (a_y b_\alpha - a_\alpha b_y) a_x b_x u_\alpha.$$

Cette dernière forme renferme encore deux séries de coordonnées-points et une série de coordonnées-lignes; son système réduit équivalent est donc encore à établir comme pour la forme (7). Par conséquent, si nous n'avons pas égard aux u, nous obtenons les formes

(12) $$\varphi_{11} = (a_x b_\alpha - a_\alpha b_x) a_x b_x u_\alpha, \quad \varphi_{12} = -\Omega'_v \left(\frac{1}{2}\Omega_y \varphi_1\right),$$

si Ω'_v désigne le procédé réciproque de Ω_x, ou autrement dit, si Ω'_v est défini par (9), à la condition d'écrire x au lieu de u, y au lieu de v et v au lieu de x. On a donc

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= -[b_\alpha u_\alpha \Omega'_v(a_y a_x b_x) - a_\alpha u_\alpha \Omega'_v(b_y a_x b_x)] \\ &= -[b_\alpha u_\alpha (bav) a_x - a_\alpha u_\alpha (abv) b_x] = (abv)(a_x b_\alpha + a_\alpha b_x) u_\alpha.\end{aligned}$$

Les formes φ_{11}, φ_{12} se comportent alors par rapport à $\Omega_y \varphi_1$ comme les formes (8) par rapport à (7). Mais la forme φ_{12} renferme encore deux séries de coordonnées-lignes; elle est donc équivalente aux formes

(13) $$\varphi'_{12} = (abu) u_\alpha (a_x b_\alpha + a_\alpha b_x) \quad \text{et} \quad \Omega_y \varphi_{12},$$

avec

(14) $$\Omega_y \varphi_{12} = (a_y b_\alpha - b_y a_\alpha)(a_x b_\alpha + a_\alpha b_x).$$

Or, cette forme renferme encore deux séries de coordonnées-points; elle est donc équivalente aux formes

(15) $$\varphi''_{12} = a_x^2 b_\alpha^2 - a_\alpha b_x^2, \quad \varphi'''_{12} = -\frac{1}{2}\Omega'_u(\Omega_y \varphi_{12}) = (abu) a_\alpha b_\alpha.$$

Le système réduit équivalent de la forme (7) serait, par suite, donné d'abord par les neuf formes φ_0, φ_{10}, φ_{11}, φ'_{12}, φ''_{12}, φ'''_{12}, φ_{20}, φ_{21}, φ_{22} qui sont respectivement définies dans les équations (8), (11), (12), (13), (15), (10). Mais *parmi ces formes il y en a encore deux de superflues*, comme dérivant des autres par un pro-

cédé invariant. La raison en est que la forme $\varphi_1 = (abv)\, a_x b_x u_\alpha^2$ satisfait identiquement à l'équation différentielle [1]

$$(16) \qquad \delta\varphi_1 \equiv \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial v_1} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial v_2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3 \partial v_3} = 0,$$

comme on le vérifie aisément, et que *le système réduit équivalent d'une forme de cette espèce comprend toujours, en général, un nombre de formations moindre que celui d'une forme ne satisfaisant pas à l'équation différentielle* (16).

La démonstration générale de ce dernier énoncé est facile. Nous ne l'effectuerons toutefois que pour l'exemple actuel. Si nous posons, pour abréger,

$$\varphi_1 = (abv)\, a_x b_x u_\alpha^2 = r_x^2 u_\sigma^2 v_\tau,$$

il vient

$$\frac{1}{2}\delta\varphi_1 = r_\tau u_\sigma^2 r_x.$$

Donc la circonstance que φ_1 satisfait à l'équation (16) peut être exprimée par le fait que toutes les formations invariantes possédant le facteur symbolique r_τ, que l'on peut déduire de φ_1, s'évanouissent identiquement. Pour le système réduit équivalent de φ_1, nous aurions d'abord, dans ce mode de notation, les formes

$$\varphi_{10} = r_x^2 u_\sigma^2 u_\tau, \quad \varphi_{11} = (\sigma\tau x)\, r_x^2 u_\sigma, \quad \varphi'_{12} = 2(u_\tau r_\sigma - r_\tau u_\sigma)\, r_x u_\sigma,$$
$$\varphi''_{12} = 2(\sigma\tau x)\, r_x r_\sigma, \quad \varphi'''_{12} = (u_\tau r_\sigma - u_\sigma r_\tau)\, r_\sigma.$$

Mais, comme les termes qui renferment le facteur symbolique r_τ doivent disparaître, il vient

$$\varphi'_{12} \equiv 2\, u_\tau r_\sigma r_x u_\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_3 \partial u_3}\right),$$
$$\varphi'''_{12} \equiv u_\tau r_\sigma^2 \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi'_{12}}{\partial x_1 du_1} + \frac{\partial^2 \varphi'_{12}}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi'_{12}}{\partial x_3 \partial u_3}\right).$$

Indépendamment de l'identité $\delta\varphi_1 = 0$, on a, en outre,

$$\varphi''_{12} \equiv 2(\sigma\tau x)\, r_x r_\sigma = \delta\varphi_{11}.$$

---

[1] Le fait que le procédé δ est réellement invariant se reconnaît immédiatement sur la représentation symbolique du résultat qui en est déduit. (*Voir* aussi t. II, p. 285.)

Mais par là les formes φ'_{12}, φ'''_{12}, φ''_{11} sont caractérisées comme invariants fonctionnels des formes respectives φ_{10}, φ_{11}, et doivent, en conséquence, être omises dans le système équivalent à φ_1. Ce dernier se compose donc des deux formes

$$(17)\qquad \varphi_{10} = r_x^2 u_\sigma^2 u_\tau, \quad \varphi_{11} = (\sigma\tau x) r_x^2 u_\sigma.$$

On a de même, en général, cette proposition que *le système réduit équivalent d'une forme* φ *à deux séries de coordonnées similaires (cogrédientes) et à une série de coordonnées dissimilaires aux premières (contragrédientes) satisfaisant à l'équation* (16), *c'est-à-dire à* $\partial\varphi = 0$, *se forme en réduisant d'abord seulement par rapport aux deux séries similaires et en égalant entre elles, dans le système obtenu, les séries similaires (des variables contragrédientes) qui se présentent.* En effet, φ_{11} se déduit directement de la forme $\frac{1}{2}\Omega_y\varphi_1$ si l'on fait $x = y$ dans cette dernière.

Le système réduit équivalent de la forme (7) $f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2$ *se compose donc finalement des six formes*

$$(18)\left\{\begin{array}{l} a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad (abu)^2 u_\alpha^{2*}, \quad (abu)(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) u_\alpha^*, \\ (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^{2*}, \quad (abu) a_x b_x u_\alpha^2, \quad (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) a_x b_x u_\alpha; \end{array}\right.$$

celles qui sont marquées d'un astérisque satisfaisant à l'équation différentielle (16).

Mais, dans la réduction qui repose sur l'introduction du système réduit, on peut faire encore un pas de plus. Il est, en effet, possible de ramener chacune des formes du système réduit à un certain nombre d'autres formes dont chacune satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3} = 0 \quad [1].$$

---

[1] Le fait que toute forme mixte Θ peut être développée en une série de la forme

$$\Theta = [\Theta] + \alpha_1 u_x [\Theta_1] + \alpha_2 u_x^2 [\Theta_2] + \ldots,$$

les $[\Theta_i]$ satisfaisant tous à l'équation différentielle en question, a été démontré d'abord par GORDAN, *Ueber Combinanten* (*Math. Annalen*, t. V, p. 102 et suiv.). Le développement en série est surtout utile lorsqu'il s'agit de séparer d'une expression donnée un facteur u_x^λ; elle donne pour cela une méthode générale, car il suffit alors de calculer les formes $[\Theta_\lambda]$, $[\Theta_{\lambda+1}]$, ...

Il résulte de là que, dans la théorie des formes algébriques ternaires (en tant qu'il s'agit de l'établissement des systèmes complets), on peut se borner à la recherche de celles qui, dans chaque classe de variables, renferment une seule série et *satisfont en outre à l'équation* (16). Nous appellerons un système de cette dernière espèce un *système réduit proprement dit;* tel est déjà, par exemple, le système donné pour la forme (1) par les formes φ qui interviennent dans (2), ce dont on s'assure aisément. Les formes (18), au contraire, ne forment pas un système réduit *proprement dit.*

Ici se présente la question de savoir dans quelle mesure les coefficients de la forme primitive f étant supposés indépendants entre eux, ceux du système réduit proprement dit sont aussi indépendants les uns des autres, abstraction faite naturellement des relations linéaires données par (16); et *de fait on démontre que ces coefficients sont bien indépendants les uns des autres.* Par conséquent, dans les formes ternaires, la théorie d'une forme f contenant un nombre quelconque de séries de coordonnées-points et de coordonnées-lignes peut être remplacée non seulement individuellement, *mais encore généralement* par celle d'un système simultané, à nombres classificateurs correspondants, formé, du reste, d'une manière arbitraire, système dont les formes renferment toutes au plus une seule série x et une seule série u, et satisfont aux équations (16). On obtiendra, en particulier, un tel système pour chaque cas au moyen du système réduit proprement dit, en suivant la voie indiquée plus haut.

En résumant la marche précédente expliquée par le dernier exemple, on opère de la manière suivante la formation du système réduit proprement dit :

1° Si f renferme une série de x et une série de u, on établit les formes

$$\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial u_3},$$

$$\delta^2 f = \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_3 \partial u_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et l'on détermine les nombres α, β, ... de telle sorte que les

formes

$$\varphi = f + \alpha u_x \delta f + \beta u_x^2 \delta^2 f + \ldots,$$
$$\varphi_1 = \delta f + \alpha' u_x \delta^2 f + \beta' u_x^2 \delta^3 f + \ldots$$

satisfassent toutes à l'équation (16). Les quantités α, β sont ici déterminées complètement et sans ambiguïté ; ce que nous ne développerons pas ici (*voir* Gordan, *loc. cit.*). Les formes φ composent le système réduit proprement dit.

2° Si f renferme seulement deux séries similaires, telles que x et y, on peut poser symboliquement $f = a_x^m b_y^n$. Les formes du système réduit proprement dit sont alors

$$\varphi = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (abu), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (abu)^2, \quad \ldots.$$

3° Si f renferme plus de deux séries, il y en a parmi elles au moins deux similaires. Relativement à ces dernières, on remplace f par les mêmes formes que dans 2°. On traite les formes ainsi obtenues de la même manière relativement à deux séries similaires qui s'y trouvent, et l'on arrive ainsi finalement à un système réduit proprement dit. Seulement de ce dernier disparaissent diverses formes, parce que les formes φ mentionnées dans 2° ont déjà la propriété spéciale de satisfaire à l'équation (16) relativement aux séries x, u. La continuation des opérations à exécuter ici conduit donc au problème suivant par la solution duquel tout est terminé : *Une forme f renferme trois séries x, y, u, et satisfait à l'équation* (16) *relativement à x et u; on demande d'indiquer le système réduit proprement dit de f.* Dans ce but, on formera d'abord encore le système réduit d'après le théorème exposé plus haut, et expliqué sur un exemple (p. 345 et suiv.), et l'on procédera suivant ce qui a été dit dans 1° à l'égard des formes qui n'appartiennent pas au système réduit proprement dit.

Pour notre exemple, nous avons donc encore, dans le système (18), à ramener les formes φ_0, φ_{10}, φ_{11},

$$\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad \varphi_{10} = (abu) a_x b_x u_\alpha^2, \quad \varphi_{11} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) a_x b_x u_\alpha,$$

aux formes du système réduit proprement dit. Commençons par la forme φ_0. D'après ce qui précède, nous avons d'abord à

former

$$\frac{1}{4}\delta\varphi_0 = a_x b_x u_\alpha (x_\alpha b_x + b_\alpha a_x),$$

$$\frac{1}{4}\delta^2\varphi_0 = a_\alpha^2 b_x^2 + b_\alpha^2 a_x^2 + 4 a_\alpha b_\alpha a_x b_x.$$

Une nouvelle application du procédé δ donnerait $\delta^3\varphi_0 \equiv 0$. Nous avons d'ailleurs, dans les formes

$$(19)\qquad \begin{cases} [\varphi_0]_0 = \varphi_0 + \alpha u_x \delta\varphi_0 + \beta u_x^2 \delta^2\varphi_0, \\ [\varphi_0]_1 = \delta\varphi_0 + \alpha' u_x \delta\varphi_0, \\ [\varphi_0]_2 = \delta^2\varphi_0, \end{cases}$$

à déterminer les nombres α, β, α' de telle sorte que l'on ait $\delta[\varphi_0]_0 = 0$ et $\delta[\varphi_0]_1 = 0$; la condition $\delta[\varphi_0]_2$ est déjà remplie. Or on a

$$(20)\qquad \delta[\varphi_0]_0 = \delta\varphi_0 + \alpha\delta(u_x\delta\varphi_0) + \beta\delta(u_x^2\delta^2\varphi_0),$$

et l'on a généralement, pour $\psi = r_x^m u_\rho^n$, en tenant compte de ce que $\delta u_x = 3$,

$$\delta(\psi . u_x^h) = u_x^h \delta\psi + 3 h u_x^{h-1}\psi + \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_x^h}{\partial u_i} + \frac{\partial\psi}{\partial u_i}\frac{\partial u_x^h}{\partial x_i}\right).$$

Mais la somme qui figure dans le second membre est, d'après le théorème d'Euler, égale à

$$h u_x^{h-1}\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}x_i + \frac{\partial\psi}{\partial u_i}u_i\right) = h(m+n)u_x^{h-1}\psi.$$

Il vient donc

$$(21)\qquad \delta(\psi . u_x^h) = u_x^h\delta\psi + h(m+n+3)u_x^{h-1}\psi.$$

Par suite, l'équation $\delta[\varphi_0]_0 = 0$ se transforme à cause de (20) en

$$0 = \delta\varphi_0(1 + 7\alpha) + u_x\delta^2\varphi_0(\alpha + 10\beta).$$

Cette condition doit être satisfaite indépendamment des u et des x et conséquemment aussi pour $u_x = 0$, et par suite on obtient

$$\alpha = -\frac{1}{7}, \quad \beta = \frac{1}{70}$$

et

$$[\varphi_0]_0 = \varphi_0 - \frac{1}{7} u_x \delta\varphi_0 + \frac{1}{70} u_x^2 \delta^2 \varphi_0. \tag{22}$$

Pour la détermination de $[\varphi_0]_1$, on trouve semblablement, au moyen de (21), la relation

$$0 = \delta^2\varphi_0(1 + 5\alpha'),$$

d'où

$$\alpha' = -\frac{1}{5}$$

et

$$[\varphi_0]_1 = \delta\varphi_0 - \frac{1}{5} u_x \delta^2 \varphi_0. \tag{23}$$

Le système réduit proprement dit de la forme φ_0 se compose donc des trois formes (22), (23) et $\delta^2\varphi_0$.

On trouve de même, pour le système réduit proprement dit de φ_{10}, les formations

$$[\varphi_{10}]_0 = \varphi_{10} - \frac{1}{8} u_x \delta\varphi_{10} + \frac{1}{96} u_x^2 \delta^2 \varphi_{10}, \quad [\varphi_{10}]_1 = \delta\varphi_{10} - \frac{1}{6} u_x \delta^2 \varphi_{10},$$
$$[\varphi_{10}]_2 = \delta^2 \varphi_{10},$$

où

$$\delta\varphi_{10} = 2(abu)(a_\alpha b_x + b_\alpha a_x)u_\alpha = 2\varphi'_{12},$$
$$\delta^2\varphi_{10} = 4(abu)a_\alpha b_\alpha \qquad = 4\varphi'''_{12}.$$

Ici se présentent donc encore de nouveau les formes φ'_{12} et φ'''_{12} que nous avons dû précédemment exclure du système réduit improprement dit. Le système réduit proprement dit de φ_{11} se compose enfin des formes

$$[\varphi_{11}]_0 = \varphi_{11} - \frac{1}{7} u_x \delta\varphi_{11}, \quad \delta\varphi_{11} = a_x^2 b_\alpha^2 - b_x^2 a_\alpha^2 = \varphi''_{12}.$$

Le système réduit proprement dit *de la forme $f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2$ est donc finalement donné par les onze formations suivantes :*

$$(1)\ [\varphi_0]_0 = \varphi_0 - \frac{1}{7} u_x \delta\varphi_0 + \frac{1}{70} u_x^2 \delta^2 \varphi_0;$$

$$(2)\ [\varphi_0]_1 = \delta\varphi_0 - \frac{1}{5} u_x \delta^2 \varphi_0;$$

(3) $[\varphi_0]_2 = \delta^2\varphi_0$, avec $\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^3$;

(4) $\varphi_{20} = (abu)^2 u_\alpha^2$;

(5) $\varphi_{21} = (abu)(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) u_\alpha$;

(6) $\varphi_{22} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2$;

(7) $[\varphi_{10}]_0 = \varphi_{10} - \frac{1}{8} u_x \delta\varphi_{10} + \frac{1}{96} u_x^2 \delta^2 \varphi_{10}$;

(8) $[\varphi_{10}]_1 = \delta\varphi_{10} - \frac{1}{6} u_x \delta^2 \varphi_{10}$;

(9) $[\varphi_{10}]_2 = \delta^2\varphi_{10}$, φ_{10} étant égal à $(abu) a_x b_x u_\alpha^2$;

(10) $[\varphi_{11}]_0 = \varphi_{11} - \frac{1}{7} u_x \delta\varphi_{11}$;

(11) $[\varphi_{11}]_1 = \delta\varphi_{11}$, φ_{11} étant égal à $(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) a_x b_x u_\alpha$.

Chacune de ces formes est d'un degré total égal ou inférieur à celui de la forme f, et chacune d'elles satisfait à l'équation aux dérivées partielles (16). Mais *réciproquement,* d'après l'observation faite plus haut sur le caractère arbitraire des coefficients de ces formes, *la théorie d'un système simultané de onze formes mixtes dont les nombres d'ordre et de classe coïncident avec ceux des onze formes inscrites ici, et satisfont toutes à l'équation* (16), *mais sont, d'ailleurs, indépendantes les unes des autres, se confond avec la théorie d'une forme $f = r_x^2 s_y^2 u_\varrho^2$ dont deux cent-seize coefficients sont indépendants les uns des autres.*

Les développements actuels font suffisamment apercevoir dans quelle mesure l'Algèbre exige une étude plus directe des formes mixtes et conséquemment aussi des êtres géométriques appelés *connexes* qui sont représentés par leur évanouissement (p. 336). Le but des explications suivantes est de faire connaître, dans quelques-unes de leurs relations et de leurs propriétés essentielles, ces dernières figures dont l'étude comprend pour ainsi dire en elle toute la géométrie analytique du plan (c'est-à-dire l'algèbre des formes ternaires); nous devons naturellement reculer devant une théorie plus complète. Faisons observer immédiatement que nous considérerons d'abord des connexes tout à fait généraux $f \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0$, sans avoir égard à la question de savoir s'ils peuvent être ramenés à des connexes normaux, c'est-à-dire à des connexes pour lesquels l'équation (16) est satisfaite. Nous ne

possédons pas le moyen d'obtenir une interprétation géométrique directement utilisable de l'équation précitée.

II. — Connexes. — Coïncidences. — Couples de courbes.

La figure dont l'étude va nous occuper actuellement est donnée par une équation algébrique renfermant d'une façon homogène et les coordonnées d'un point mobile (x) et celles d'une droite mobile (u), c'est-à-dire par une équation de la forme

$$f(x, u) \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0, \tag{1}$$

dans laquelle les x_i entrent à la $m^{\text{ième}}$ dimension, et les u_i à la $n^{\text{ième}}$. Nous appellerons cette figure *connexe du $m^{ième}$ ordre et de la $n^{ième}$ classe,* ou plus brièvement *connexe* (m, n).

A une telle figure n'appartient pas une forme géométrique proprement dite, et, au contraire, on peut trouver, pour *chaque* ligne u du plan une infinité de points x, et pour *chaque* point x une infinité de lignes u qui satisfont à l'équation du connexe. A toute droite u correspondent, en général, en vertu de (1), un nombre infini de points x qui forment une courbe C_m du $m^{\text{ième}}$ ordre ; à tout point x une infinité de droites u qui enveloppent une courbe K_n de la $n^{\text{ième}}$ classe [1]. Ainsi, pour $m = 1$, $n = 1$, par exemple, à tout point x répond un autre point y comme sommet du faisceau de rayons (courbe de première classe) formé par les lignes correspondantes u, et à toute droite u répond une droite v (courbe du premier ordre). Dans ce cas, en effet, l'équation

$$f(x, u) \equiv a_x u_\alpha \equiv \Sigma\Sigma \beta_{ik} x_i u_k = 0$$

donne seulement une représentation particulière de la collinéation générale, car on trouve, pour les coordonnées du point y qui répond à x,

$$\rho y_k = \beta_{1k} x_1 + \beta_{2k} x_2 + \beta_{3k} x_3,$$

et, pour les coordonnées de la droite v qui répond à u,

$$\sigma v_i = \beta_{i1} u_1 + \beta_{i2} u_2 + \beta_{i3} u_3.$$

---

[1] Des équations entre une série de coordonnées-points et une série de coordonnées-lignes ont été brièvement mentionnées dans PLÜCKER, *Analytisch-Geometrische Entwicklungen,* t. II, Essen, 1831, p. 225.

Comme ici le point et la droite se présentent toujours ensemble, il est avantageux, pour la conception plus simple de ces relations, de ne considérer ni le point en lui-même ni la droite comme élément fondamental du plan; nous désignerons, au contraire, par *élément* (x, u), *toute combinaison d'un point* x *du plan avec une droite* u *de ce même plan.* On obtient donc l'ensemble des éléments (x, u) en combinant chacun des points en nombre doublement infini x avec chacune des droites en nombre doublement infini u. *L'ensemble des éléments forme, d'après cela, un système quadruplement infini* (*remplit une multiplicité*) *de quatre dimensions;* et ce système repose sur le plan. L'équation d'un connexe s'en détache comme étant le système *triplement* infini des éléments qui satisfont à cette même équation. On peut aussi exprimer ce qui précède sous la forme suivante : *Les points qui forment avec une droite donnée les éléments d'un connexe* (m, n) *sont situés sur une courbe* C_m *du* $m^{\text{ième}}$ *ordre; les droites qui forment avec un point donné les éléments du connexe enveloppent une courbe* K_n *de la* $n^{\text{ième}}$ *classe.* Toutes les courbes K_n qui prennent ainsi naissance forment un système doublement infini dont les paramètres sont les rapports des x_i; de même les courbes C_m forment un système de courbes doublement infini qui a les rapports des u_i pour paramètres.

Dans des cas particuliers seulement, il peut arriver que tout point du plan forme avec une droite déterminée, ou que toute droite forme avec un point déterminé du plan un élément du connexe. Ainsi, par exemple, dans le connexe

$$x_1\varphi(u) + x_2\psi(u) = 0,$$

le point $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ forme avec chacune des droites u un élément. Des points ou des droites de cette espèce seront appelés *points fondamentaux* ou *droites fondamentales.* Dans des connexes particuliers, il peut y en avoir en nombre quelconque; leur nombre peut même être infiniment grand. Cette dernière circonstance se présente, par exemple, dans des connexes irréductibles lorsque l'équation $f = 0$ ne renferme pas les x, ou ne renferme pas les u. Si elle ne renferme pas les u, on a sous les yeux *l'équation d'une courbe en coordonnées-points;* elle doit être considérée comme un connexe en ce sens que tout point de la courbe peut

former avec toute droite quelconque du plan un élément du connexe, et que d'autres points (non situés sur la courbe) ne peuvent se réunir avec aucune droite pour composer des éléments de connexe. Le fait dualistiquement correspondant se présente lorsque $f = 0$ ne renferme pas les x, et représente, par suite, *l'équation d'une courbe en coordonnées-lignes*. Un autre exemple de cette espèce nous est offert par le connexe réductible

$$\varphi(x) \cdot \psi(u) = 0.$$

Ici tout point de $\varphi = 0$ forme avec toute droite quelconque un élément du connexe; au contraire, chacun des autres points du plan ne forme un élément de connexe qu'avec les tangentes de $\psi = 0$.

L'ensemble des éléments qui existent dans un plan forme, ainsi qu'il a déjà été énoncé, une multiplicité de quatre dimensions. On a donc à distinguer quatre degrés de figures géométriques suivant qu'une, deux, trois ou quatre équations sont données entre les coordonnées x, u de l'élément, et chacune d'elles doit être homogène aussi bien par rapport aux x que par rapport aux u pour être susceptible d'une interprétation géométrique (c'est-à-dire pour représenter en lui-même un connexe). Quatre équations déterminent déjà un nombre fini d'éléments; on n'a donc plus alors une figure continue, mais un groupe d'éléments distincts entre eux. Il nous reste à considérer les trois autres degrés.

Le premier degré est donné par le *connexe* individuel lui-même.

L'ensemble des éléments en nombre doublement infini qui sont communs à deux connexes sera appelé une coïncidence. Pour le cas où cet ensemble commun aux deux connexes est réductible, chacune de ses parties irréductibles sera séparément qualifiée *coïncidence,* de même que l'on comprend sous le nom de *courbe gauche* toute partie irréductible de l'intersection de deux surfaces algébriques. D'après cela, la coïncidence est donnée analytiquement, ou bien par deux équations entre les x et les u, ou bien par des équations en nombre supérieur à deux, mais admettant un système *doublement infini* de solutions communes. Dans le champ d'une coïncidence, à chaque droite répond, en général, un nombre fini (μ) de points pouvant former avec elle un élément; de même, à chaque point répond un nombre fini (ν) de droites. On peut alors appeler μ *l'ordre,* ν *la classe de la coïncidence,* et désigner

cette dernière elle-même par coïncidence (μ, ν). On trouve les droites qui répondent à un point en cherchant les tangentes communes de toutes les courbes K qui correspondent au point dans les connexes particuliers qui déterminent la coïncidence. On trouve de même les points qui répondent à une droite en cherchant dans tous les connexes sus-énoncés les courbes C qui lui correspondent et en déterminant les points d'intersection communs à ces dernières. *Ainsi, en particulier, deux connexes* (m, n) *et* (m', n') *étant donnés, la coïncidence (en général irréductible) qui leur est commune est de l'ordre* $\mu = mm'$ *et de la classe* $\nu = nn'$.

La coïncidence se confond, d'après cela, avec la notion la plus générale de l'affinité *dualistique* (en général, d'ailleurs, non linéaire), c'est-à-dire de l'affinité dans laquelle, deux systèmes plans E, E' étant superposés, à tout point de E répond un certain nombre de droites de E', à toute droite de E' un certain nombre de points de E. L'inverse n'est cependant pas vrai en général; aux points d'une droite de E répondent, au contraire, sur E' les tangentes d'une courbe, et réciproquement à un point de E', c'est-à-dire aux droites du faisceau de rayons qui passe par ce point, répondent des points de E qui décrivent une courbe. Ainsi, par exemple, deux connexes (1, 1)

$$a_x u_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad a'_x u_{\alpha'} = 0$$

donnent une affinité, en vertu de laquelle à tout point x répond la ligne joignant les deux points qui correspondent à x et qui ont pour coordonnées $a_x \alpha_i$ et $a'_x \alpha'_i$. Si l'on désigne par v_i les coordonnées de cette ligne de jonction, l'affinité en question est représentée par les équations

$$\rho v_i = (\alpha\alpha')_i a_x a'_x;$$

l'affinité est donc quadratique; en d'autres termes, les points x de E qui correspondent aux lignes v de E' passant par un point fixe y sont situés sur une conique. Dans le cas seulement où certaines conditions entre les deux connexes (1, 1) sont réalisées, il pourra arriver que de leur coïncidence commune dérive la transformation linéaire réciproque au sens usuel; cette dernière se trouve ici produite de la façon la plus générale par un choix convenable des connexes.

L'ensemble des éléments (en nombre simplement infini) qui sont

communs à trois connexes, ou encore une partie représentable rationnellement d'un tel ensemble, forme un couple de courbes. En vertu des équations de ces connexes, les u peuvent, en général, s'exprimer rationnellement par les x, comme les x le peuvent aussi par les u, et, en éliminant les x, on obtient une équation entre les u, de même que par élimination des u on obtient une équation entre les x.

On a donc en présence une courbe en coordonnées-points et une courbe en coordonnées-lignes, et les points de l'une sont rapportés unidéterminativement aux tangentes de l'autre. L'ordre et la classe de ces courbes, que nous désignerons respectivement sous le nom d'*ordre* et de *classe du couple de courbes,* sont, en général, faciles à déterminer d'après le théorème connu sur le degré du résultant par rapport aux coefficients de l'équation donnée. Étant donnés trois connexes (m, n), (m', n') et (m'', n''), *la classe du couple de courbes* sera égale à

$$(2) \qquad n m' m'' + n' m'' m + n'' m m',$$

et *l'ordre du couple de courbes* égal à

$$(3) \qquad m n' n'' + m' n'' n + m'' n n'.$$

Il n'est pas sans intérêt de considérer la correspondance unidéterminative de deux courbes sous l'aspect suivant lequel elle se présente ici, car la forme non résolue des équations, telle qu'elle s'offre théoriquement dans l'étude actuelle, est précisément celle à laquelle on est immédiatement conduit dans la plupart des recherches où l'on a affaire à des relations unidéterminatives.

Nous nous proposons enfin de déterminer le nombre des éléments qui sont communs à quatre connexes. Soient m, m', m'', m''' les ordres respectifs de ces derniers, et n, n', n'', n''' leurs classes. Nous considérerons d'abord le couple de courbes qui est déterminé par les trois connexes (m, n), (m', n'), (m'', n''), et dont l'ordre μ et la classe ν sont respectivement donnés par les nombres (3) et (2). A tout point x de la courbe C_μ de ce couple répond, par l'intermédiaire du connexe (m''', n'''), une courbe $K_{n'''}$ de la classe n''' ayant $\nu n'''$ tangentes communes avec la courbe K_ν du même couple, et à chacune de ces dernières répond, par l'intermédiaire des trois premiers connexes, un point y de C_μ; si, en particulier, ce point coïncide avec

x, nous avons un élément commun aux quatre connexes. Les $n'''\nu$ points y de C_μ qui correspondent au point x peuvent, en toute hypothèse, être traversés, conjointement avec d'autres points *fixes* de C_μ, par une courbe $\varphi(x, y) = 0$, puisqu'ils dérivent du système complet des tangentes communes aux deux courbes par transformation unidéterminative; nous pouvons donc, pour la détermination du nombre des éléments communs, faire usage du principe de correspondance étendu (*voir* t. II, p. 153, et t. III, p. 25). Or, évidemment, à tout point y de C_μ correspondent réciproquement et de la manière décrite ci-dessus $m''\mu$ points x, et l'équation $\varphi(x, y) = 0$ n'est pas, en général, satisfaite pour $x = y$, car autrement chaque élément du couple de courbes appartiendrait aux quatre connexes. On trouve donc *le nombre des éléments communs aux quatre connexes* (m, n), (m', n'), (m'', n''), (m''', n'''), pour une position quelconque de ces connexes les uns par rapport aux autres, *égal* à $m'''\mu + n'''\nu$, ou, si nous remplaçons μ, ν par leurs valeurs tirées de (3), (2), à

$$(4) \qquad \begin{cases} mm'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' \\ \quad + mm''n'n''' + m'm'''n''n + mm'''n''n', \end{cases}$$

résultat symétrique (comme cela doit être) par rapport à tous les nombres m, n.

Il résulte, en particulier, de là, pour le cas de

$$m = m' = m'' = m''' = 1 = n = n' = n'' = n''',$$

que quatre connexes du premier ordre et de la première classe ont six éléments communs. Les points de ces éléments sont nécessairement communs aux quatre courbes du troisième ordre qui se présentent dans les quatre couples de courbes formés avec trois quelconques des connexes donnés. Par conséquent, les équations des quatre connexes étant

$$(5) \qquad a_x u_\alpha = 0, \quad b_x u_\beta = 0, \quad c_x u_\gamma = 0, \quad d_x u_\delta = 0,$$

on obtient, par élimination successive des u entre trois de ces équations, les quatre courbes du troisième ordre

$$(\beta\gamma\delta)\,b_x c_x d_x = 0, \quad (\gamma\delta\alpha)\,c_x d_x a_x = 0, \quad (\delta\alpha\beta)\,d_x a_x b_x = 0,$$
$$(\alpha\beta\gamma)\,a_x b_x c_x = 0.$$

Les points des six éléments communs aux connexes (5) sont les intersections communes de ces quatre courbes, et comme par ces six points ne passe qu'un nombre triplement infini de courbes du troisième ordre, on peut représenter d'une façon semblable chacune des courbes de cette espèce qui renferme les six points. Les six droites correspondantes sont de même les tangentes communes des quatre courbes de troisième classe

$$(bcd)u_\beta u_\gamma u_\delta = 0, \quad (cda)u_\gamma u_\delta u_\alpha = 0, \quad (dab)u_\delta u_\alpha u_\beta = 0,$$
$$(abc)u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0.$$

Il est également aisé d'établir la correspondance qui détermine ici sur la courbe $(\alpha\beta\gamma)a_x b_x c_x = 0$ les six points des éléments communs aux connexes (5). Les points et les droites du couple de courbes commun aux trois premiers connexes sont liés ici entre eux par les équations [1]

$$(6) \qquad \rho u_i = (\alpha\beta)_i a_y b_y,$$

en supposant que l'on ait $(\alpha\beta\gamma)a_y b_y c_y = 0$. Les trois coniques qui sont représentées par $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ ont en commun, comme on sait, trois points situés sur la courbe $(\alpha\beta\gamma)a_y b_y c_y = 0$; par ces trois points passent conséquemment aussi toutes les coniques du réseau $(\alpha\beta\gamma)\alpha_y\beta_y = 0$. A un point x de C_3 est associé, par l'intermédiaire du quatrième connexe, le point $d_x u_\delta = 0$; aux trois tangentes que l'on peut mener de ce dernier à la courbe $(abc)u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$ correspondent donc, en vertu de (6), trois points de C_3, lesquels sont traversés sur cette courbe par la conique $(\alpha\beta\delta)a_y b_y d_x = 0$. Nous avons donc une correspondance à trois points fixes, et les six points de coïncidence de celle-ci sont déterminés par la courbe $(\alpha\beta\delta)a_x b_x d_x = 0$ qui passe, en outre, une fois par chacun des trois points fixes. Cela concorde avec l'indication précédente sur les quatre courbes du troisième ordre.

L'étude approfondie des propriétés d'un connexe $a_x^m u_\alpha^n = 0$

---

[1] On vérifie facilement que cette relation entre deux courbes est la même que celle qui existe entre une courbe du troisième ordre C_3 et une courbe de la troisième classe K_3, lorsque toutes deux sont engendrées simultanément par le même mécanisme de Grassmann (t. II, p. 272).

conduit actuellement à l'examen des invariants fonctionnels, c'est-à-dire des invariants, covariants, contrevariants et formes mixtes qui appartiennent à la forme fondamentale $a_x^m u_\alpha^n$; on peut toujours, d'après les explications précédentes (p. 345), remplacer les formes mixtes qui interviennent alors par ce qu'on appelle des formes *normales*, c'est-à-dire par des formes φ satisfaisant à l'équation différentielle $\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial u_i} = 0$. Tous ces invariants fonctionnels pourront encore être représentés symboliquement, et l'on aura à distinguer des facteurs symboliques des types suivants (en posant $a_x^m u_\alpha^n \equiv b_x^m u_\beta^n \equiv c_x^m u_\gamma^n$)

$$a_x, \quad (abu), \quad (abc), \quad a_\alpha, \quad u_\alpha, \quad (\alpha\beta x), \quad (\alpha\beta\gamma).$$

La variété des formations possibles devient ainsi considérable; toutefois, jusqu'à présent, on n'a effectué qu'un petit nombre de recherches générales. Mentionnons seulement ici un principe complètement analogue au principe *de translation* (t. I, p. 344) employé dans la théorie des courbes, en ce qu'il permet d'utiliser immédiatement pour les formations ternaires qui tiennent aux connexes certaines propositions relatives aux formes binaires à deux séries de variables.

La relation établie par le connexe entre les points et les droites du plan peut, en effet, être envisagée encore d'une autre manière. Considérons un point quelconque qui peut être regardé comme l'intersection de deux droites v, w, et que nous désignerons, en conséquence, par (v, w); soit de même (y, z) la droite joignant les points y et z. Leur réunion formera un élément choisi arbitrairement qui, en général, n'appartient pas au connexe. *Cependant, par l'intermédiaire du connexe* (m, n), *les rayons du faisceau* (v, w) *sont associés aux points de la droite* (y, z); et cette dépendance respective est à mn déterminations, en ce sens qu'à tout point répondent n rayons (Γ_n) et à tout rayon m points (G_m). Si l'on désigne, en effet, un point de la série par $\varkappa_1 y + \varkappa_2 z$, un rayon du faisceau par $\lambda_1 v + \lambda_2 w$, on trouve que, pour les points et rayons associés entre eux par le connexe $a_x^m u_\alpha^n = 0$, a lieu l'équation

$$(\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^m (\lambda_1 v_\alpha + \lambda_2 w_\alpha)^n = 0,$$

laquelle est de l'ordre m en $\varkappa_1 : \varkappa_2$, de l'ordre n en $\lambda_1 : \lambda_2$. Si nous

posons maintenant symboliquement

$$(7) \qquad a_y = A_1, \quad a_z = A_2, \quad v_\alpha = \mathfrak{A}_1, \quad w_\alpha = \mathfrak{A}_2,$$

nous avons la forme doublement binaire

$$(8) \qquad \varphi = A_x^m \mathfrak{A}_\lambda^n,$$

$\varphi = 0$ établissant la relation sus-énoncée. Si nous considérons un élément x, u appartenant au connexe donné, et dont le point x fait partie de la série (y, z), le rayon u fait partie du faisceau (v, w), et si nous imposons la condition que le groupe Γ_n répondant à x (et renfermant u) possède une propriété invariante binaire, et que de même G_m possède cette même propriété ou une autre, il résulte de là une condition invariante pour le rayon (y, z) et le point (v, w); *et l'élément (y, z), (v, w) formé avec tous les deux appartient à un connexe covariant.* La condition imposée sera tout d'abord représentée par l'évanouissement d'un invariant de la forme binaire φ, qui doit encore conserver la propriété invariante, si l'une des séries de variables $(\varkappa)$ est soumise à une transformation linéaire quelconque, et l'autre (λ) à une transformation linéaire également quelconque, car le groupe Γ_n qui répond à tout point *quelconque* $x = \varkappa_1 y + \varkappa_2 z$, en vertu de (8), doit posséder la propriété invariante en question, et il en est de même aussi du groupe G_m qui répond à tout rayon *quelconque* $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$. Les invariants de la forme φ qui entrent ici en considération sont donc du type

$$(9) \qquad I = \Sigma c \Pi(AB) \ldots \Pi(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \ldots;$$

les quantités c désignent ici des coefficients numériques, les quantités A, B des symboles équivalents de l'une des deux espèces, les quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des symboles de l'autre espèce; mais ces deux classes de symboles ne peuvent jamais se présenter ensemble, et, pour cette raison, il ne peut entrer dans I de facteurs $(A\mathfrak{A})$. Or on a, en vertu de (7),

$$(AB) = a_y b_z - b_y a_z = (abu),$$

en posant $u_i = (yz)_i$, et de même pour $x_i = (vw)_i$,

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = v_\alpha w_\beta - w_\alpha v_\beta = (\alpha\beta x).$$

Comme équation du connexe covariant cherché, on trouve donc, d'après (9),

$$I \equiv \Sigma c \Pi(abu) \ldots \Pi(\alpha\beta x) \ldots = 0 \quad (^1).$$

Cette classe de connexes covariants est donc ramenée à l'étude de la forme doublement binaire précitée, de même que l'équation en coordonnées-lignes d'une courbe en coordonnées-points se ramène à l'étude du discriminant d'une forme binaire à une série de variables.

De même qu'il a été question de connexes covariants, de même aussi on peut parler de coïncidences et de couples de courbes covariants. Ainsi on obtient, par rapport à un connexe donné $f \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0$, une coïncidence covariante si, pour former des éléments, on joint chaque droite du plan non à tous les points de la courbe C_m correspondante, mais seulement à ses points d'inflexion et aux points de contact de ses tangentes doubles ; la première coïncidence est alors, par exemple, déterminée dans le connexe $f = 0$ par le connexe

$$(abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n = 0.$$

On peut de même réunir chaque point du plan aux tangentes de rebroussement de la courbe correspondante K_n ou aux tangentes de ses points d'inflexion, de manière à former les éléments d'une coïncidence covariante. Un couple de courbes covariant sera formé par les points doubles et cuspidaux qui se rencontrent dans le système des courbes C_m et par les droites correspondantes, ainsi que par les tangentes doubles et les tangentes d'inflexion qui figurent dans le système des courbes K_n et par les points correspondants.

Il faudrait ensuite étudier aussi les systèmes de connexes, ainsi que les invariants fonctionnels simultanés de ces systèmes, ce qui donnerait naissance, relativement à ces derniers, à une sorte de théorie des caractéristiques (2). Nous avons surtout à fixer notre

---

(1) Le connexe conjugué, considéré dans la section suivante, en fournit un exemple.

(2) Les recherches de cette nature seraient analogues à celles effectuées par Hirst sur les systèmes d'affinités dualistiques (corrélations), c'est-à-dire sur les systèmes de formes bilinéaires à deux séries de coordonnées-points, dans le sens de la théorie des caractéristiques. (Voir *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. V, p. 40, 1874 ; et *Annali di Matem.*, série 2^a, t. VI, p. 260).

attention sur les connexes pourvus d'éléments singuliers différents de ceux d'un connexe quelconque du système, le nom d'*élément singulier* désignant un élément pour lequel $f = a_x^m u_\alpha^n$ s'annule à un degré plus élevé que le premier. Il est, d'ailleurs, à remarquer qu'il peut se rencontrer non seulement des éléments singuliers individuels, mais encore des ensembles simplement ou doublement infinis de ces derniers et comptant plusieurs fois, c'est-à-dire des *couples singuliers de courbes* et des *coïncidences singulières* (semblablement à ce qui se produit pour les surfaces courbes où il peut se présenter non seulement des points nodaux particuliers, mais aussi des courbes doubles et multiples). Les questions de cette nature n'ont pas encore été abordées.

III. — Le connexe conjugué. — Transformation unidéterminative d'un connexe.

On peut former, par rapport à f, suivant la méthode décrite, un connexe covariant particulièrement remarquable que nous appellerons *connexe conjugué*, et qui peut être défini géométriquement ainsi qu'il suit.

Partons d'un élément quelconque y, v du plan; ainsi qu'il a été expliqué plus haut, à tout point x de v correspondent, en vertu de $f = 0$, n rayons passant par y, et, à tout rayon u passant par y, m points de v (p. 358). Les n rayons sont les tangentes de y à la courbe K_n qui répond à x; les m points sont les points de rencontre de v avec la courbe C_m, qui répond à u. Actuellement, si la courbe K_n, qui répond à x, passe par y, deux des n rayons se confondent avec la tangente de K_n au point y, et c'est la seule manière dont un rayon double de cette espèce puisse prendre naissance, puisque K_n ne possède, en général, ni tangentes doubles, ni tangentes d'inflexion. Ce rayon forme avec x un élément du connexe donné $f = 0$, et peut, en particulier, être désigné par u. De même, si la courbe C_m qui correspond à u touche la droite v, deux des m points d'intersection situés sur v se confondent. Ce point compté double forme avec u un élément de $f = 0$ et sera, en particulier, désigné par x. Tout élément (y, v) qui présente cette relation vis-à-vis d'un élément (x, u) de f est un élément d'un connexe covariant que nous appellerons *conjugué* de f. *Un élément* (y, v) *de*

ce dernier est donc défini par cette circonstance que, par rapport au connexe donné, au point y répond une droite u comptant double, et à la droite v répond également un point x comptant double. Nous pouvons encore exprimer la même chose de la manière suivante : si (x, u) est un élément de $f = 0$, c'est-à-dire si x est situé sur la courbe C_m répondant à u, et que u touche la courbe K_n répondant à x; si, de plus, y est le point de contact de u avec cette courbe K_n, et v la tangente de la première courbe C_m en x, (y, v) est un élément du connexe conjugué. Et l'on obtient le connexe conjugué entier en faisant parcourir à l'élément (x, u) tout le connexe donné. *On obtient donc aussi l'équation* $F(y, v) = 0$ *du connexe conjugué en éliminant les grandeurs* ρ, σ, x_i, u_i *entre les équations*

$$(1) \qquad \rho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0.$$

Nous exposerons plus tard comment on peut ramener cette élimination à un problème binaire en la rattachant aux méthodes symboliques données plus haut. Mentionnons ici, en premier lieu, que la relation qui existe entre les éléments du connexe donné et ceux du connexe conjugué est complètement analogue à la relation qui a lieu entre une courbe considérée comme figure ponctuelle et la même courbe considérée comme figure tangentielle. Conformément à cette idée, on a le théorème suivant :

Le connexe conjugué du connexe conjugué n'est autre que le connexe primitif.

Cette relation de réciprocité se démontre de la manière suivante. Si nous écrivons encore, dans F, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ au lieu de v_i, y_i, la fonction des x, u ainsi formée devra, en conséquence de l'origine de F, posséder le facteur f, et l'on aura, par suite, l'identité

$$(2) \qquad F\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = M.f,$$

M désignant une fonction homogène entière des x, u. Soit main-

tenant, pour abréger,

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

en sorte que les quantités p, q ne diffèrent des quantités y, v que par des facteurs indéterminés; le connexe conjugué de F est donné par les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho' z_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i} \equiv \dfrac{\partial Mf}{\partial q_i}, \\ \sigma' w_i = \dfrac{\partial F}{\partial p_i} \equiv \dfrac{\partial Mf}{\partial p_i}, \end{array} \right\} f = 0;$$

et, pour la formation des dérivées de Mf, il suffit d'imaginer que tout soit exprimé par p, q au lieu de l'être par x, u. Puisque $f = 0$, on peut, au lieu des premières équations (3), écrire aussi

$$\rho' z_i = M \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \sigma' w_i = M \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Or il résulte des équations

$$mf = \Sigma q_i x_i, \quad nf = \Sigma p_i u_i$$

que

$$m\,df = \Sigma q_i dx_i + \Sigma x_i dq_i, \quad n\,df = \Sigma p_i du_i + \Sigma u_i dp_i.$$

Comme, d'autre part, d'après la définition des p, q,

$$df = \Sigma q_i dx_i + \Sigma p_i du_i,$$

il résulte de là

$$(m + n - 1) df = \Sigma x_i dq_i + \Sigma u_i dp_i,$$

et, par conséquent,

$$x_i = (m + n - 1) \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad u_i = (m + n - 1) \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Donc, dans (3), les z, w deviennent proportionnels aux x, u, c'est-à-dire que l'on revient au connexe donné, ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons maintenant déterminer l'ordre m' et la classe n' du connexe conjugué. A cette fin, nous devons répondre à la question de savoir combien de points une droite ($\gamma_y = 0$) du plan, en supposant v donné d'une manière quelconque, a de points

communs avec la courbe $C_{m'}$, qui correspond à v dans le connexe conjugué; la classe n' se détermine alors par le raisonnement dualistique correspondant. La question posée peut se formuler algébriquement de la façon suivante : Déterminer le nombre des systèmes de valeurs y_i qui satisfont simultanément aux équations

$$(4) \qquad f(x, u) = 0, \quad \rho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \gamma_y = 0,$$

les quantités v_i étant données arbitrairement. Nous pouvons évidemment ici remplacer l'équation $f = 0$ par $v_x = 0$. Si, de plus, nous entendons par y, z deux points sur le rayon v, en sorte que

$$(5) \qquad x_i = \varkappa y_i + \lambda z_i,$$

nous avons, au lieu des trois équations $\rho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, les deux conditions indépendantes de ρ

$$(6) \qquad \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad \sum z_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Finalement les équations $\sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$, en y adjoignant la relation $\gamma_y = 0$, nous donnent l'équation unique

$$(7) \qquad \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \gamma_3 \frac{\partial f}{d u_3} = 0.$$

Dans (6) et (7), nous avons trois équations qui, après la substitution (5), sont respectivement du degré $m - 1$, $m - 1$, m en $\varkappa$, λ et, d'autre part, du degré n, n, $n - 1$ par rapport aux u_i. L'élimination des u_i entre ces équations donne un résultat dont le degré en $\varkappa$, λ est l'ordre du connexe conjugué, car elle détermine sur v, en vertu de (5), les points x qui satisfont aux équations (6), (7), et par conséquent aussi à (4). *L'ordre du connexe conjugué sera donc égal à*

$$(8) \qquad \begin{cases} m' = n(n-1)(m-1) + n(n-1)(m-1) + n^2 m \\ \quad\; = n[nm + 2(n-1)(m-1)], \end{cases}$$

et d'une manière analogue sa classe sera égale à

$$(9) \qquad n' = m[nm + 2(n-1)(m-1)].$$

Ainsi nous avons, par exemple,

pour	$m = 1$,	$n = 1$;	$m' = 1$,	$n' = 1$;
»	$m = 2$,	$n = 1$;	$m' = 2$,	$n' = 4$;
»	$m = 1$,	$n = 2$;	$m' = 4$,	$n' = 2$;
»	$m = 2$,	$n = 2$;	$m' = 12$,	$n' = 12$.

L'ordre et la classe du connexe conjugué sont donc plus élevés que pour le connexe originaire donné tant que celui-ci est d'une nature générale, excepté dans le cas de $m = n = 1$. Cependant, si l'on forme encore le connexe conjugué du connexe conjugué, on doit obtenir de nouveau l'ordre et la classe originaires. Le connexe conjugué ne peut donc être dépourvu de certaines propriétés qui ont précisément cet effet, et, en cherchant ces propriétés, on arrive à la notion des *singularités nécessaires* (*ou ordinaires*) *d'un connexe*. Nous comprenons sous cette appellation les singularités qui se trouvent dans tout connexe ou dans son conjugué.

Si nous qualifions un connexe de *général* alors même qu'il possède des coefficients qui ne sont pas complètement arbitraires, mais dont néanmoins le caractère arbitraire n'est restreint que par la présence de cette espèce de singularités, la même chose se présentera pour le connexe conjugué. Les connexes doués de singularités de cette nature forment donc un système fermé auquel appartiennent également leurs conjugués. Cette notion s'est d'abord formée sur les courbes algébriques du plan; chaque courbe en coordonnées-points se correspond à elle-même considérée comme figure tangentielle de la même manière que le connexe conjugué correspond au connexe originaire. Les singularités nécessaires sont ici celles qui se présentent dans les formules de Plücker : points doubles et points de rebroussement d'une part, tangentes doubles et tangentes d'inflexion d'autre part. Si l'on part d'une courbe qui, pour des coefficients d'ailleurs quelconques, possède des points doubles et des points de rebroussement de situation arbitraire, le *nombre* des tangentes doubles ou des tangentes d'inflexion pourra être modifié, mais ces dernières ne se réuniront pas en singularités élevées. La courbe, considérée au point de vue de l'ordre, peut, d'après cela, renfermer des singularités nécessaires de toutes les espèces sans que la même courbe, considérée au point

de vue de la classe, renferme d'autres singularités que des singularités également nécessaires.

On peut caractériser de la même manière la notion des singularités nécessaires dans toutes les figures algébriques; mais dans les variétés de plus d'une dimension interviennent, en même temps que des points singuliers séparés, etc., des variétés entières de points singuliers, etc.

Ainsi, dans les surfaces algébriques de l'espace (variétés à deux dimensions), on a à considérer comme singularités nécessaires, en même temps que des points doubles ou triples, des courbes doubles; ainsi encore, dans les connexes (variétés triplement étendues), on a à distinguer des figures doubles, triples et quadruples qui constituent les singularités nécessaires. Et, pour préciser, les figures doubles se produisent jusqu'à la seconde variété, c'est-à-dire jusqu'à la coïncidence, les figures triples jusqu'au couple de courbes, tandis que les éléments quadruples ne se présentent que séparément, comme singularités nécessaires. *Un élément singulier* doit être défini comme un élément auquel correspond non pas un élément unique, mais *plusieurs* éléments du connexe conjugué (de même qu'à un point double d'une courbe répondent *deux* tangentes de cette dernière). Il peut y avoir deux ou plusieurs de ces éléments; ceux-ci peuvent être tous différents ou égaux en tout ou en partie, et, corrélativement, les éléments singuliers se présentent sous des aspects divers. L'étude exacte de ces circonstances dans les connexes se simplifiera beaucoup lorsqu'on aura préalablement une idée sommaire des faits analogues dans les variétés de deux dimensions, c'est-à-dire dans les surfaces algébriques; pour cette raison, nous n'insisterons pas davantage sur le sujet [1].

Faisons seulement remarquer encore qu'*il peut exister des connexes qui sont conjugués à eux-mêmes*. Il existe, en effet, généralement pour $f = 0$ une coïncidence $f = 0$, $\varphi = 0$ qui appartient en même temps au connexe donné et au connexe conjugué. Il suffit

---

[1] M. Cyparissos Stephanos a étudié quelques propriétés du connexe conjugué (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e Série, t. IV, 1880). Dans un manuscrit laissé par Clebsch se trouvent quelques indications incomplètes sur la détermination des singularités nécessaires; l'auteur (M. Lindemann) espère pouvoir y revenir à une autre occasion.

en fait, à cause de (1), de poser

$$f(y, v) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

C'est là l'équation $\varphi = 0$ qui, conjointement avec $f = 0$, détermine la coïncidence en question. Mais il peut se faire que φ, pour des connexes particuliers $f = 0$, renferme lui-même le facteur f; alors tout élément (y, v) conjugué à un élément (x, u) de $f = 0$ est aussi un élément de $f = 0$, et ce connexe est conjugué à lui-même [1].

Nous nous proposons maintenant d'exposer la formation du connexe conjugué à l'aide des procédés symboliques et de la suivre sur quelques exemples. D'après les développements ci-dessus (p. 359 et 362), nous avons d'abord, dans ce but, à établir directement la condition pour qu'une équation doublement binaire

$$(10) \qquad \varphi \equiv \mathrm{A}_\varkappa^m \mathfrak{A}_\lambda^n = 0$$

ait une racine double $\varkappa_1 : \varkappa_2$ et en même temps une racine double $\lambda_1 : \lambda_2$; c'est-à-dire que nous avons à éliminer les grandeurs $\varkappa$ et λ entre les quatre équations

$$(11) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0,$$

lesquelles, à cause de la double homogénéité de φ, tiennent seulement la place de trois. L'équation du connexe conjugué à $f \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0$ s'obtient alors de la manière connue au moyen de la forme binaire trouvée, en remplaçant chaque facteur (AB) de cette dernière par (abu), chaque facteur $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ par $(\alpha\beta x)$. L'invariant de la forme binaire φ, dont l'évanouissement repré-

---

[1] Un exemple du fait nous est donné par le connexe linéo-linéaire

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 - u_3 x_3 = 0,$$

qui fait correspondre à un point x un point y au moyen des équations

$$\rho y_1 = x_1, \quad \rho y_2 = x_2, \quad \rho y_3 = -x_3,$$

et représente par suite un cas particulier de la collinéation perspective. La transformation inverse est alors identique à cette dernière, et comme elle est de même, en général, représentée par le connexe linéo-linéaire conjugué (comme nous le verrons plus tard), le connexe conjugué est ici proportionnel au connexe originaire.

sente la condition précitée, sera dans ce qui suit désigné par R; son degré g, par rapport aux coefficients de φ, est aisé à déterminer d'après ce qui précède. En effet, dans R figurent mg séries de symboles A, B, ..., et ng séries de symboles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... qui se réunissent respectivement en $\frac{1}{2}mg$ et $\frac{1}{2}ng$ facteurs symboliques des types (AB) et ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$). L'équation du connexe conjugué sera donc du degré $\frac{1}{2}mg$ par rapport aux u, et du degré $\frac{1}{2}ng$ par rapport aux x, c'est-à-dire que nous aurons, en vertu de (8) et (9),

$$g = 2[mn + 2(m-1)(n-1)].$$

C'est là le degré de l'invariant de la forme doublement binaire (10), *dont l'évanouissement exprime qu'à une racine double de l'une des séries de variables peut correspondre une racine double de l'autre série.*

Ces faits exigent quelques explications particulières lorsque l'un des nombres m, n est égal à 1. Alors, en effet, pour l'une des séries, il ne peut être question d'une racine double proprement dite, mais, dans la formation de R, se présente la circonstance particulière que les coefficients de la forme binaire φ, relativement à la série qui entre linéairement, sont tous deux égalés à zéro. Si donc on a, par exemple,

$$f = \chi_1 u_1 + \chi_2 u_2 + \chi_3 u_3,$$

les χ ne dépendant plus que des x seuls, il vient

$$\varphi \equiv A_x^m \mathfrak{A}_\lambda = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2.$$

A la place de (11) se présentent, par suite, les équations

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0,$$
$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial P_2}{\partial x_1}\lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\lambda_1 + \frac{\partial P_2}{\partial x_2}\lambda_2 = 0.$$

L'élimination de λ_1, λ_2 entre les deux dernières équations conduit à l'évanouissement du déterminant fonctionnel de P_1 et P_2, conséquence connue des deux premières équations. *Donc, dans le cas où l'un des nombres m, n est égal à l'unité,* R *se réduit au résultant de* P_1 *et* P_2.

Ainsi, par exemple, pour établir *le connexe conjugué du connexe* (1, 1) $a_x u_\alpha = 0$, on a à former le résultant des deux formes linéaires $A_x \mathfrak{A}_1$ et $A_x \mathfrak{A}_2$, lequel est égal à

$$(AB)\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{2}(AB)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

L'équation du connexe conjugué devient donc

$$(abu)(\alpha\beta x) = 0. \tag{12}$$

Considérons ensuite le connexe (2, 1)

$$f = a_x^2 u_\alpha = b_x^2 u_\beta.$$

Nous avons ici à former le résultant des formes $A_x^2 \mathfrak{A}_1$, $A_x^2 \mathfrak{A}_2$, lequel est, comme on sait, égal à $ST - U^2$, U désignant l'invariant simultané, S et T les invariants particuliers des deux formes. Pour établir ces derniers, nous ferons respectivement usage des symboles $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et $CD\mathfrak{C}\mathfrak{D}$; il vient alors

$$S = (AB)^2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1, \quad T = (CD)^2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2,$$
$$U = (AB)^2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 = (CD)^2 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_2.$$

Nous avons, en conséquence,

$$\begin{aligned} ST - U^2 &= (AB)^2 (CD)^2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{D}_2 (\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \\ &= \frac{1}{2}(AB)^2 (CD)^2 (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D}), \end{aligned}$$

et *l'équation du connexe conjugué de* $a_x^2 u_\alpha = 0$ devient

$$(abu)^2 (cdu)^2 (\beta\gamma x)(\alpha\delta x) = 0. \tag{13}$$

Nous allons enfin déterminer directement le connexe conjugué d'un connexe (2, 2). Il faut ici déterminer d'abord la forme R pour une forme binaire dans laquelle figurent deux séries de variables et chacune à la seconde dimension. Soit

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi = A_x^2 \mathfrak{A}_\lambda^2 = &(a_{11,11} x_1^2 + 2a_{12,11} x_1 x_2 + a_{22,11} x_2^2)\lambda_1^2 \\ &+ 2(a_{11,12} x_1^2 + 2a_{12,12} x_1 x_2 + a_{22,12} x_2^2)\lambda_1 \lambda_2 \\ &+ (a_{11,22} x_1^2 + 2a_{12,22} x_1 x_2 + a_{22,22} x_2^2)\lambda_2^2 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

une forme de cette espèce. Les équations (11)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}=0$$

peuvent être, en général, remplacées par les suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} \rho.x_1\lambda_1=\dfrac{1}{mn}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial\lambda_2}, & \rho.x_2\lambda_1=-\dfrac{1}{mn}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial\lambda_2}, \\ \rho.x_1\lambda_2=-\dfrac{1}{mn}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial\lambda_1}, & \rho.x_2\lambda_2=\dfrac{1}{mn}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial\lambda_1}, \end{cases}$$

ρ étant un facteur indéterminé. Dans le cas actuel, ce système d'équations est donné par

$$\begin{aligned}
&(a_{12,12}-\rho)x_1\lambda_1+a_{22,12}x_2\lambda_1+a_{12,22}x_1\lambda_2+a_{22,22}x_2\lambda_2=0,\\
&a_{11,12}x_1\lambda_1+(a_{21,12}+\rho)x_2\lambda_1+a_{11,22}x_1\lambda_2+a_{21,22}x_2\lambda_2=0,\\
&a_{12,11}x_1\lambda_1+a_{22,11}x_2\lambda_1+(a_{12,21}+\rho)x_1\lambda_2+a_{22,21}x_2\lambda_2=0,\\
&a_{11,11}x_1\lambda_1+a_{21,11}x_2\lambda_1+a_{11,21}x_1\lambda_2+(a_{21,21}-\rho)x_2\lambda_2=0.
\end{aligned}$$

Si nous désignons par Ω le déterminant de ce système linéaire relativement aux grandeurs $x_1\lambda_1$, $x_2\lambda_1$, $x_1\lambda_2$, $x_2\lambda_2$, par $\Omega_{ik,lm}$ les déterminants mineurs de Ω, nous avons d'abord

$$(16)\quad \Omega\equiv\begin{vmatrix} a_{12,12}-\rho & a_{22,12} & a_{12,22} & a_{22,22} \\ a_{11,12} & a_{21,12}+\rho & a_{11,22} & a_{21,22} \\ a_{12,11} & a_{22,11} & a_{12,21}+\rho & a_{22,21} \\ a_{11,11} & a_{21,11} & a_{11,21} & a_{21,21}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Par suite, les carrés et les produits des quatre grandeurs précédentes sont entre eux dans le même rapport que les quantités $\Omega_{ik,lm}$, c'est-à-dire que, μ désignant un facteur indéterminé, on a, par exemple,

$$\mu.x_1\lambda_1.x_2\lambda_2=\Omega_{12,12}=\Omega_{21,21},$$
$$\mu.x_1\lambda_2.x_2\lambda_1=\Omega_{12,21}=\Omega_{21,12}.$$

Par conséquent, l'expression

$$\Omega_{12,21}+\Omega_{21,12}-\Omega_{12,12}-\Omega_{21,21}$$

est nécessairement nulle, car elle n'est autre que la dérivée de Ω par rapport à ρ. On a donc en même temps

$$\Omega=0,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\rho}=0,$$

c'est-à-dire que le discriminant de l'équation (16) du quatrième degré en ρ doit s'annuler. *La formation cherchée* R *est conséquemment égale à ce discriminant lui-même :*

$$R = i^3 - 6j^2, \tag{17}$$

i et j désignant les deux invariants de la forme Ω.

Pour le calcul effectif de R sous forme symbolique, observons ce qui suit. Dans Ω, le coefficient de ρ^4 est égal à l'unité, et le terme en ρ^3 manque ; on a donc

$$\Omega = \rho^4 + 6U\rho^2 + 4V\rho + W,$$

et par suite

$$i = 2(W + 3U^2), \quad j = 6(UW - U^3 - V^2). \tag{18}$$

Les expressions U, V, W sont des invariants de φ qui ont un caractère spécial, le même que celui appartenant à l'expression R, comme il a été mentionné (p. 359). Elles sont, en effet, des invariants non seulement si l'on soumet les variables x, λ à la *même* transformation linéaire, mais encore si l'on applique aux deux séries des transformations linéaires *différentes*. Et ce sont les seules de cette espèce, car, puisque le nombre des coefficients de φ est égal à 9, il existe six invariants de cette forme, indépendants les uns des autres, relativement à une transformation linéaire commune aux séries x, λ, et par suite *il existe seulement trois formations qui possèdent la propriété de l'invariance même par rapport à des transformations différentes des deux séries* (¹).

La manière la plus simple de démontrer que cette double propriété invariante appartient aux coefficients U, V, W de l'équation $\Omega = 0$ consiste à prouver l'invariabilité de Ω pour le cas où une seule des séries x, λ est transformée linéairement, l'autre restant invariable (en supposant qu'on introduise en même temps à

(¹) Dans le tome XI du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, p. 91, on trouve la remarque que de tels invariants et covariants ont été étudiés pour la première fois par M. Capelli dans son Mémoire *Sopra la corrispondenza* (2,2) *ossia la forma* $f(x^2, y^2)$ *ed i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari independenti delle variabili* (*Journal de Battaglini*, Naples, 1879). Cette remarque n'est pas correcte, car les recherches du texte (empruntées à un manuscrit laissé par Clebsch et déjà cité p. 366) ont été publiées en 1876 dans l'édition allemande du présent Ouvrage.

la place de ρ une grandeur ρ' convenablement choisie). Nous ferons usage de la transformation

$$(19) \qquad x_1 = \alpha x'_1 + \beta x'_2, \quad x_2 = \gamma x'_1 + \delta x'_2,$$

et nous poserons les nouvelles équations

$$(20) \qquad \begin{cases} \rho' . x'_1 \lambda_1 = \dfrac{1}{4} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x'_2 \partial \lambda_2}, & \rho' . x'_2 \lambda_1 = -\dfrac{1}{4} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x'_1 \partial \lambda_2}, \\ \rho' . x'_1 \lambda_2 = -\dfrac{1}{4} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x'_2 \partial \lambda_1}, & \rho' . x'_2 \lambda_2 = \dfrac{1}{4} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x'_1 \partial \lambda_1}. \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que ces équations reviennent aux équations (15). Or on a

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_2} = \beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial}{\partial x_2};$$

les équations (20) donnent donc

$$\begin{aligned} \rho' . x'_1 \lambda_1 &= \frac{\beta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_2} + \frac{\delta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_2}, \\ \rho' . x'_2 \lambda_1 &= -\frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_2} - \frac{\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_2}, \\ \rho' . x'_1 \lambda_2 &= -\frac{\beta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_1} - \frac{\delta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_1}, \\ \rho' . x'_2 \lambda_2 &= \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_1} + \frac{\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_1}. \end{aligned}$$

Multipliant maintenant la première et la deuxième équation, puis la troisième et la quatrième une fois par α, β, une fois par γ, δ et ajoutant chaque fois, on obtient, en vertu de (19),

$$\begin{aligned} \rho' . x_1 \lambda_1 &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_2}, & \rho' . x_2 \lambda_1 &= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_2}, \\ \rho' . x_1 \lambda_2 &= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_1}, & \rho' . x_2 \lambda_2 &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_1}; \end{aligned}$$

et ce sont là de nouveau les équations (15) si l'on pose

$$\rho' = (\alpha\delta - \beta\gamma)\rho.$$

Actuellement, comme ρ était une racine de l'équation $\Omega = 0$, ρ' satisfait à l'équation

$$\rho'^4 + 6 U r^2 \rho'^2 + 4 V r^3 \rho' + W r^4 = 0,$$

$r = \alpha\delta - \beta\gamma$ désignant le déterminant de la substitution.

Des considérations tout à fait analogues se présentent si on laisse les x invariables et qu'on transforme linéairement λ_1, λ_2 seulement. Les coefficients U, V, W ne varient donc respectivement que des facteurs $r^2 r'^2$, $r^3 r'^3$, $r^4 r'^4$, si r désigne le déterminant d'une transformation linéaire des x_i, r' celui d'une semblable transformation des λ_i, c'est-à-dire qu'*en fait* U, V, W *sont des invariants pour chacune des deux transformations.* A cette catégorie appartiennent, par exemple, les trois invariants de la forme $A_x^2 \mathfrak{A}_\lambda^2$ indépendants entre eux

$$(AB)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2, \quad (AB)(BC)(CA)(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}\mathfrak{A}),$$
$$(AB)^2(CD)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^2;$$

et comme, d'autre part, il n'existe que trois invariants de cette espèce indépendants, et que ceux mentionnés ici n'éprouvent d'autre modification par une transformation linéaire que la multiplication par les facteurs $r^2 r'^2$, $r^3 r'^3$, $r^4 r'^4$, il faut nécessairement que U se confonde avec le premier, V avec le deuxième, sauf un facteur numérique, tandis que W doit pouvoir se former avec le troisième et avec le carré du premier.

On peut aussi, en fait, calculer sans peine directement le coefficient U de ρ^2 dans Ω. On trouve

$$\begin{aligned} 6U = & -2(a_{12,12}^2 - a_{22,12}a_{11,12}) \\ & - (a_{11,11}a_{22,22} + a_{22,11}a_{11,22} - 2a_{12,11}a_{12,22}) \\ = & (AB)^2[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{B}_2^2], \end{aligned}$$

ou, si l'on permute simultanément A avec B, $\mathfrak{A}$ avec $\mathfrak{B}$ et qu'on forme la demi-somme de l'ancienne et de la nouvelle expression,

$$U = -\frac{1}{12}(AB)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2. \tag{21}$$

Pour le calcul de V, observons que le second des invariants précédents sous forme non symbolique est donné par

$$V' = 6\begin{vmatrix} a_{11,11} & a_{11,12} & a_{11,22} \\ a_{12,11} & a_{12,12} & a_{12,22} \\ a_{22,11} & a_{22,12} & a_{22,22} \end{vmatrix} \equiv (AB)(BC)(CA)(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}\mathfrak{A}),$$

et que $V = V'.c$, c désignant un facteur numérique. Mais il vient

$V' = 6$ si l'on prend $a_{11,11} = a_{12,12} = a_{22,22} = 1$, et qu'on fasse s'évanouir tous les autres coefficients de φ. D'un autre côté, on obtient, par suite de cette dernière substitution,

$$\Omega = (1 - \rho^2)^2 - (1 + \rho)^2 = \rho^4 - 3\rho^2 - 2\rho,$$

d'où

$$4V = -2,$$

et il en résulte

$$c = -\frac{1}{n}$$

et

$$(22) \qquad V = -\frac{1}{12}(AB)(BC)(CA)(\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathcal{B}\mathcal{C})(\mathcal{C}\mathcal{A}).$$

Le troisième coefficient W se déduit de Ω dans l'hypothèse $\rho = 0$. Nous développerons le déterminant qui prend ainsi naissance, afin d'obtenir son expression symbolique, suivant les déterminants mineurs à deux dimensions sous la forme

$$W = p_{12}q_{34} + p_{34}q_{12} + p_{24}q_{31} + p_{31}q_{24} + p_{23}q_{14} + p_{14}q_{23},$$

où l'on a toujours

$$p_{ik} = -p_{ki}, \quad q_{ik} = -q_{ki},$$

et où, par exemple,

$$p_{12} = a_{12,12}^2 - a_{11,12}a_{22,12} \qquad = -\frac{1}{2}(AB)^2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2,$$

$$p_{13} = a_{12,22}a_{11,12} - a_{11,22}a_{12,12} = -(AB)A_1B_1\mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2,$$

....,

$$q_{34} = a_{12,12}^2 - a_{11,12}a_{22,12} \qquad = -\frac{1}{2}(CD)^2\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2,$$

....

Il vient alors, en premier lieu,

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{4}(AB)^2(CD)^2[\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1^2] \\ -(AB)(CD)\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[A_2B_2C_1D_1\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2 - A_1B_1C_2D_2\mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \\ - A_2B_1C_1D_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2 \\ - A_1B_2C_2D_1\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2]. \end{aligned}$$

Le troisième et le cinquième terme donnent pour somme

$$(AB)(CD)\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2A_2C_1(BD),$$

et de même le quatrième et le sixième, après qu'on a permuté dans le premier A avec B et $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{B}$, se réduisent à

$$-(AB)(CD)\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 A_1 C_2 (BD);$$

les deux termes ainsi obtenus donnent, pris ensemble, l'expression

$$W' = -(AB)(AC)(BD)(CD)\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{C}_1^2.$$

Or on a identiquement

$$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD),$$

et conséquemment

$$W' = -(AB)^2(CD)^2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 - W'',$$

relation où

$$\begin{aligned} W'' &= (AB)(CD)(BC)(AD)\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 \\ &= (AD)(BC)(CD)(AB)\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(AB)(CD)[(AD)(BC)-(BD)(AC)]\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_2^2 \\ &= -\frac{1}{2}(AB)^2(CD)^2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_2^2. \end{aligned}$$

Si nous substituons donc l'expression W' dans W, il vient finalement

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{4}(AB)^2(CD)^2[&\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1^2 \\ &+ 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_2^2 - 4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2]. \end{aligned}$$

Permutons ici simultanément A, $\mathcal{A}$ avec B, $\mathcal{B}$, puis C, $\mathcal{C}$ avec D, $\mathcal{D}$, et opérons ensuite ces permutations ensemble. On obtient ainsi quatre expressions pour W, et W lui-même est égal à leur somme divisée par 4 :

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{8}(AB)^2(CD)^2[&(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{C}_2\mathcal{D}_2 + \mathcal{A}_2\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1\mathcal{D}_1)^2 \\ &+ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2(\mathcal{C}_1^2\mathcal{D}_2^2 + \mathcal{C}_2^2\mathcal{D}_1^2) \\ &+ \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(\mathcal{A}_1^2\mathcal{B}_2^2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_1^2) \\ &- \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_1^2\mathcal{D}_2^2 + \mathcal{B}_2^2\mathcal{D}_1^2) \\ &- \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(\mathcal{A}_1^2\mathcal{C}_2^2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{C}_1^2) \\ &- \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(\mathcal{B}_1^2\mathcal{C}_2^2 + \mathcal{B}_2^2\mathcal{C}_1^2) \\ &- \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1(\mathcal{A}_1^2\mathcal{D}_2^2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{D}_1^2)]. \end{aligned}$$

Mais on a identiquement

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2(\mathfrak{C}_1^2\mathfrak{D}_2^2+\mathfrak{C}_2^2\mathfrak{D}_1^2)+\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2(\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{B}_2^2+\mathfrak{A}_2^2\mathfrak{B}_1^2)$$
$$=\frac{1}{2}[-(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2(\mathfrak{C}\mathfrak{D})^2+(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2+\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1)^2$$
$$+(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1+\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2)^2].$$

Si l'on porte ce résultat, ainsi que les transformations semblables des expressions correspondantes, dans l'expression de W, on obtient

$$W=\frac{1}{16}(AB)^2(CD)^2[(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^2+(\mathfrak{A}\mathfrak{D})^2(\mathfrak{B}\mathfrak{C})^2-(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2(\mathfrak{C}\mathfrak{D})^2].$$

Parmi les trois termes qui se présentent ici, les deux premiers sont égaux entre eux, le dernier est égal à $-9U^2$; et l'on a ainsi enfin

$$W=\frac{1}{8}(AB)^2(CD)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^2-9U^2. \tag{23}$$

On a à substituer dans i et j, d'après (18), les valeurs données dans les équations (21), (22), (23) pour obtenir suivant (17) l'invariant cherché R. *L'équation du connexe conjugué au connexe* $a_x^2u_\alpha^2=0$ *est donc donnée par*

$$8(W+3U^2)^3-216(UW-U^3-V^2)^2=0,$$

avec

$$U=-\frac{1}{12}(abu)^2(\alpha\beta x)^2,$$

$$V=-\frac{1}{12}(abu)(bcu)(cau)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x),$$

$$W=\ \frac{1}{8}(abu)^2(cdu)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\delta x)^2-9U^2.$$

Le connexe conjugué a été rapporté *unidéterminativement* élément pour élément par les équations (1) au connexe donné $f=0$; ces équations donnent donc un cas particulier d'une *transformation unidéterminative générale du connexe* $f=0$, transformation que l'on peut exprimer par les équations

$$\rho y_i=\varphi_i\binom{p\ \ q}{x,\ u},\quad \sigma v_i=\psi_i\binom{r\ \ s}{x,\ u}\quad (i=1,2,3), \tag{24}$$

les relations $\varphi_i=0$ représentant trois connexes quelconques (p,q),

les relations $\psi_i = 0$ trois connexes quelconques (r, s). L'équation $F(y, v) = 0$ du nouveau connexe s'obtient alors par élimination de ρ, σ, x_i, u_i entre les équations (24) et entre $f(x, u) = 0$. Au cas où les connexes de transformation $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ne sont pas dans une situation spéciale par rapport à $f = 0$, on détermine aisément l'ordre m' et la classe n' de $F = 0$. L'ordre m' est en effet évidemment égal au nombre des points y qui, pour des valeurs choisies d'une façon quelconque des v_i, satisfont simultanément aux équations (24) et à $f = 0$, $\gamma_y = 0$, les quantités γ_i étant des grandeurs quelconques; c'est-à-dire qu'en vertu du caractère unidéterminatif de la transformation (24), il sera égal au nombre des éléments (x, u) communs aux quatre connexes

$$f(x, u) = 0, \quad \Sigma\gamma_i\varphi_i = 0, \quad v_2\psi_1 - v_1\psi_2 = 0, \quad v_3\psi_2 - v_2\psi_3 = 0;$$

et nous avons, en conséquence, d'après l'équation (4) (p. 356),

$$(25) \qquad m' = r^2 nq + s^2 mp + 2rs(mq + np)$$

et de même

$$(26) \qquad n' = p^2 ns + q^2 mr + 2pq(ms + nr).$$

Des modifications doivent être apportées à ce qui précède lorsque les connexes de transformation φ, ψ présentent quelque chose de spécial par rapport à f. *Supposons, par exemple, que les connexes* $\varphi_i = 0$ *aient en commun avec* f *un couple de courbes* (d, e) *et les connexes* $\psi_i = 0$ *un couple de courbes* (δ, ε). Du couple de courbes qui est commun aux équations

$$f = 0, \quad v_2\psi_1 - v_1\psi_2 = 0, \quad v_3\psi_2 - v_2\psi_3 = 0,$$

et dont l'ordre et la classe sont déterminés par les équations (2) (p. 355), il faut encore retrancher le couple de courbes (δ, ε). Il reste un couple de l'ordre $2rsn + ms^2 - \delta$ et de la classe $2rsm + nr^2 - \varepsilon$. D'après les développements donnés (p. 356), *l'ordre du connexe* $F(y, v) = 0$ est donc actuellement

$$(27) \qquad m' = (2nrs + ms^2 - \delta)p + (2mrs + nr^2 - \varepsilon)q,$$

et sa classe

$$(28) \qquad n' = (2npq + mq^2 - d)r + (2mpq + np^2 - e)s.$$

Au moyen de ces formules, on retrouve, en particulier, l'ordre

et la classe du connexe conjugué. Les connexes $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ qui se présentent dans les équations (1) à la place des φ_i déterminent, en effet, un couple de courbes de l'ordre $3m(n-1)^2$ et de la classe $3(n-1)m^2$, qui, d'après le théorème d'Euler, appartient aussi au connexe $f=0$. Pour les équations (1), il vient, en conséquence,

$$d=3m(n-1)^2, \quad e=3(n-1)m^2$$

et de même

$$\delta=3n^2(m-1), \quad \varepsilon=3(m-1)^2n,$$

puis

$$p=m, \quad q=n-1, \quad r=m-1, \quad s=n.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans (27) et (28), on retrouve bien les nombres connus pour l'ordre et la classe du connexe conjugué.

Dans les autres recherches sur les transformations unidéterminatives des connexes, on devra surtout fixer son attention sur leurs singularités (ainsi qu'on le fait dans les transformations d'une courbe) et sur les relations qui existent entre les singularités du connexe donné et celles du connexe transformé. On devra aussi distinguer différentes espèces de transformations suivant que ces dernières changent unidéterminativement un connexe en un autre, ou qu'elles sont unidéterminatives seulement pour les éléments d'une coïncidence, ou enfin seulement pour ceux d'un couple de courbes, de même que dans l'espace on a à considérer des transformations unidéterminatives d'une surface et d'une courbe particulière. Les recherches qui se rattachent à ce sujet ont la même marche que les théories semblables dans une variété quelconque de quatre dimensions. On pourra, en particulier, aussi bien pour les connexes que pour les coïncidences et les couples de courbes, établir un nombre, savoir : *le genre de ces figures*, qui reste invariable dans toutes leurs transformations à détermination unique [1]. Il est toutefois à remarquer que *dans les coïncidences,* comme dans les surfaces algébriques, *il se présente deux nombres constants de cette espèce, que dans les connexes,* comme dans les variétés de trois dimensions, *il s'en présente trois* [2], et qu'au contraire, dans

---

[1] *Voir* Clebsch, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXVII, décembre 1868, et Nöther, *Math. Annalen,* t. II, p. 293 et suiv.

[2] *Voir* Nöther, *Math. Annalen,* t. VIII, p. 495 et suiv.

le couple de courbes (ou, en général, dans une variété algébrique à une seule dimension), il ne s'en présente qu'*un*, comme dans une courbe particulière. L'établissement effectif de ces différents nombres (la détermination de la façon dont ils dépendent des singularités éventuelles du connexe, de la coïncidence ou du couple de courbes) et la démonstration de leur permanence dans les transformations unidéterminatives se feront de la même manière que pour les variétés algébriques générales dont il a été parlé. Nous n'insisterons néanmoins pas davantage sur ce sujet. Contentons-nous de mentionner comment, pour les connexes et les coïncidences, on aura à former les intégrales triples ou doubles avec l'étude desquelles on peut mettre en connexion les nombres ci-dessus. Les résultats correspondants pour des variétés quelconques (*voir* Nöther, *loc. cit.*) se modifient en effet ici d'une façon particulière, parce que nous avons affaire non à un groupe de quatre, mais à deux groupes de deux variables chacun.

Soit (x, u) un élément du connexe $f = 0$. Comme ce dernier représente une figure à trois dimensions, on y trouve comme possibles trois directions d'avancement linéairement indépendantes que nous pouvons attribuer aux variables en passant de l'élément (x, u) à un élément voisin $(x + dx, u + du)$. En distinguant trois différentielles de cette espèce par les lettres d, d', d'', on obtient les équations

$$\begin{aligned} \Sigma f'_{x_i} dx_i + \Sigma f'_{u_i} du_i &= 0, \\ \Sigma f'_{x_i} d'x_i + \Sigma f'_{u_i} d'u_i &= 0, \\ \Sigma f'_{x_i} d''x_i + \Sigma f'_{u_i} d''u_i &= 0, \end{aligned}$$

où $f'_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $f'_{u_i} = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$. En y ajoutant les équations

$$\Sigma x_i f'_{x_i} = 0, \quad \Sigma u_i f'_{u_i} = 0,$$

nous avons cinq équations au moyen desquelles les rapports des f'_{x_i}, f'_{u_i} peuvent être déterminés, et, pour préciser, seront proportionnels aux déterminants formés avec le système incomplet

$$\left\| \begin{matrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & du_1 & du_2 & du_3 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'u_1 & d'u_2 & d'u_3 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''u_1 & d''u_2 & d''u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right\|.$$

Si donc Θ est une fonction homogène entière du degré $m-3$ par rapport aux x_i et du degré $n-3$ par rapport aux u_i, l'expression

$$(29)\qquad dI = \frac{\Theta . \begin{vmatrix} dx_1 & d'x_1 & d''x_1 & x_1 & 0 & \alpha_1 \\ dx_2 & d'x_2 & d''x_2 & x_2 & 0 & \alpha_2 \\ dx_3 & d'x_3 & d''x_3 & x_3 & 0 & \alpha_3 \\ du_1 & d'u_1 & d''u_1 & 0 & u_1 & \beta_1 \\ du_2 & d'u_2 & d''u_2 & 0 & u_2 & \beta_2 \\ du_3 & d'u_3 & d''u_3 & 0 & u_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\sum \alpha_i f'_{x_i} + \sum \beta_i f'_{u_i}}$$

représente un élément d'une intégrale triple qui est complètement indépendant des grandeurs α_i, β_i. Si l'on détermine les constantes dans Θ, de telle sorte que cette intégrale ne devienne infinie pour aucun élément du connexe $f=0$, le nombre des constantes de Θ qui restent arbitraires indique *le genre p du connexe*. Si donc le connexe donné ne possède aucune coïncidence double, etc., Θ n'a à satisfaire à aucune condition; il vient alors

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

et c'est là l'un des nombres caractéristiques pour un connexe [1].

On peut, d'une double manière, donner à la différentielle dI une forme plus simple. En effet, on peut choisir deux des trois directions d'avancement d, d', d'' de telle sorte que les u_i, puis les x_i, restent successivement constants. Il vient alors, par exemple,

$$d'u_1 = d'u_2 = d'u_3 = 0,$$
$$d''x_1 = d''x_2 = d''x_3 = 0;$$

et, si l'on annule successivement les β_i, puis les α_i, on obtient les deux formes simples

$$dI = \frac{\Theta . (x\alpha d'x) . (udud''u)}{\Sigma \alpha_i f'_{x_i}} = - \frac{\Theta . (xdxd'x)(u\beta d''u)}{\Sigma \beta_i f'_{u_i}}.$$

---

[1] Les autres nombres génériques seraient donnés par les nombres qui caractérisent d'une manière analogue une coïncidence à laquelle donne naissance sur $f=0$ un connexe $\Theta=0$.

Observons encore que l'on arrive aussi à la même expression pour dI si l'on part de ceci : considérer f comme une fonction homogène de six variables cogrédientes $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3$. D'après les règles générales relatives aux fonctions de cette espèce [1], il faut alors considérer une différentielle qui dérive de (29) si l'on remplace le déterminant du numérateur par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & dx_1 & d'x_1 & d''x_1 & d'''x_1 \\ \alpha_2 & x_2 & dx_2 & d'x_2 & d''x_2 & d'''x_2 \\ \alpha_3 & x_3 & dx_3 & d'x_3 & d''x_3 & d'''x_3 \\ \beta_1 & u_1 & du_1 & d'u_1 & d''u_1 & d'''u_1 \\ \beta_2 & u_2 & du_2 & d'u_2 & d''u_2 & d'''u_2 \\ \beta_3 & u_3 & du_3 & d'u_3 & d''u_3 & d'''u_3 \end{vmatrix},$$

dans lequel d, d', d'', d''' indiquent les différentes directions d'avancement. Mais si nous considérons que, en outre des équations

$$\Sigma f'_{x_i} d^{(k)} x_i - \Sigma f'_{u_i} d^{(k)} u_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

ont lieu encore les suivantes

$$\Sigma x_i f'_{x_i} = 0, \quad \Sigma u_i f'_{u_i} = 0,$$

il est visible que le déterminant obtenu par élimination des f'_{x_i}, f'_{u_i} entre ces équations est nécessairement nul. On peut, pour cette raison, poser

$$d''' x_i = \varkappa\, dx_i + \lambda\, d' x_i + \mu\, d'' x_i + x_i\, d\rho,$$
$$d''' u_i = \varkappa\, du_i + \lambda\, d' u_i + \mu\, d'' u_i + u_i\, d\sigma,$$

$d\rho$, $d\sigma$ désignant des grandeurs infiniment petites quelconques. Si l'on porte ce résultat dans le déterminant à six dimensions, on obtient de nouveau, après une transformation aisée, le déterminant qui figure dans (29), à part un facteur qui dépend uniquement de $d\sigma$ et $d\rho$; mais ce dernier n'a plus aucune relation avec dI et f, et il est, par conséquent, absolument sans influence sur les considérations ultérieures. On aperçoit ainsi qu'il suffit d'étudier l'élément d'une intégrale triple, au lieu de celui d'une intégrale quadruple.

---

[1] *Voir* NÖTHER, *Math. Annalen*, t. II, *loc. cit.*

Dans le même sens que nous avons parlé du genre d'un connexe, on peut aussi parler *du genre d'une coïncidence*. Si l'on se figure celle-ci comme l'intersection de deux connexes (m, n) et (m', n')

$$f=0 \quad \text{et} \quad \varphi=0,$$

on a à considérer une intégrale double [1] dont les différentielles linéaires correspondent aux deux directions d'avancement qui restent encore possibles. Ces dernières étant représentées par d, d', on a

$$\begin{gathered}\Sigma f'_{x_i}dx_i+\Sigma f'_{u_i}du_i=0, \quad \Sigma f'_{x_i}d'x_i+\Sigma f'_{u_i}d'u_i=0,\\ \Sigma x_i f'_{x_i}=0, \quad \Sigma u_i f'_{u_i}=0;\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}\Sigma \varphi'_{x_i}dx_i+\Sigma \varphi'_{u_i}du_i=0, \quad \Sigma \varphi'_{x_i}d'u_i+\Sigma \varphi'_{u_i}d'x_i=0,\\ \Sigma x_i \varphi'_{x_i}=0, \quad \Sigma u_i \varphi'_{v_i}=0.\end{gathered}$$

Chacun de ces systèmes d'équations peut être envisagé comme un système linéaire relativement aux dérivées des fonctions qui y figurent. Il suit alors de là, d'après des propositions connues, que les déterminants à deux dimensions, que l'on peut former avec les séries

$$\begin{matrix} f'_{x_1}, & f'_{x_2}, & f'_{x_3}, & f'_{u_1}, & f'_{u_2}, & f'_{u_3},\\ \varphi'_{x_1}, & \varphi'_{x_2}, & \varphi'_{x_3}, & \varphi'_{u_1}, & \varphi'_{u_2}, & \varphi'_{u_3},\end{matrix}$$

sont individuellement proportionnels aux déterminants à quatre dimensions de la matrice

$$\left\|\begin{matrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & du_1 & du_2 & du_3\\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'u_1 & d'u_2 & d'u_3\\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3\end{matrix}\right\|.$$

Si donc nous désignons par Θ une fonction entière renfermant les x_i d'une façon homogène à l'ordre $m+m'-3$, les u_i d'une façon

---

[1] *Voir* la formation correspondante de l'intégrale simple pour l'intersection complète de deux surfaces dans CLEBSCH : *Anwendungen der Abel'schen Functionen auf Geometrie*, § 11 et suiv. (*Journal de Crelle*, t. 63). Il peut, du reste, y avoir aussi des coïncidences qui ne sont pas représentables comme intersections complètes de *deux* connexes.

homogène à l'ordre $n+n'-3$, il vient

$$dI = \frac{\Theta\left[\begin{vmatrix} dx_i & d'x_i & x_i & 0 & a_i & \alpha_i \\ du_i & d'u_i & 0 & u_i & b_i & \beta_i \end{vmatrix}\right]_{i=1,2,3}}{\begin{vmatrix} \Sigma a_i f'_{x_i} + \Sigma b_i f'_{u_i} & \Sigma \alpha_i f'_{x_i} + \Sigma \beta_i f'_{u_i} \\ \Sigma a_i \varphi'_{x_i} + \Sigma b_i \varphi'_{u_i} & \Sigma \alpha_i \varphi'_{x_i} + \Sigma \beta_i \varphi'_{u_i} \end{vmatrix}},$$

différentielle complètement indépendante des grandeurs a_i, α_i, b_i, β_i. Le facteur du numérateur compris entre crochets a été mis là par abréviation pour un déterminant à six dimensions dont il est aisé d'apercevoir le mode de formation effectif. Si maintenant Θ est déterminé de telle sorte que l'intégrale double qui tire son origine de dI reste finie pour toute portion limitée choisie à l'intérieur de la coïncidence, le nombre des coefficients arbitraires qui restent dans Θ et ne peuvent être détruits par l'emploi de $f=0$, $\varphi=0$, est égal *au genre* π *de la coïncidence* (1). On a donc, en général,

$$\begin{aligned}\pi = & \frac{(m+m'-1)(m+m'-2)}{2} \cdot \frac{(n+n'-1)(n+n'-2)}{2} \\ & - \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} \cdot \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} \\ & - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}.\end{aligned}$$

Pour simplifier encore l'expression dI, on ne peut plus ici choisir des directions d'avancement pour lesquelles tous les dx_i ou tous les du_i s'évanouissent; mais on peut faire nuls ou bien les a, α ou les b, β, et l'on obtient alors, pour dI, les deux représentations

$$\begin{aligned}dI &= \frac{\Theta.(x\,dx\,d'x).(u\,b\,\beta)}{\Sigma b_i f'_{u_i}.\Sigma \beta_i \varphi'_{u_i} - \Sigma b_i \varphi'_{u_i}.\Sigma \beta_i f'_{u_i}} \\ &= \frac{\Theta.(u\,du\,d'u).(x\,a\,\alpha)}{\Sigma a_i f'_{x_i}.\Sigma \alpha_i \varphi'_{x_i} - \Sigma a_i \varphi'_{x_i}.\Sigma \alpha_i f'_{x_i}}.\end{aligned}$$

Le genre d'un couple de courbes est enfin égal au nombre qui, suivant des théories connues, appartient comme genre à l'une des deux courbes du couple (liées unidéterminativement l'une à l'autre),

(1) Le second nombre générique de la coïncidence est égal au genre du couple de courbes déterminé dans la coïncidence $f=0$, $\varphi=0$ par un connexe $\Theta=0$ qui doit satisfaire aux conditions indiquées dans le texte.

et il a une relation connue avec les intégrales abéliennes qui correspondent à ces courbes (p. 167 et suiv.).

Faisons encore observer, en finissant, que pour les différentielles ici introduites d'intégrales triples et doubles on peut aussi trouver aisément des équations exactement analogues à l'équation différentielle du théorème d'Abel ([1]). Toutefois, une équation de cette espèce ne peut être immédiatement employée de la même façon que le théorème d'Abel à des applications géométriques, parce que les propriétés des intégrales algébriques multiples à limites complexes n'ont pas encore été étudiées d'une manière approfondie.

IV. — La coïncidence principale.

Parmi les connexes, il en existe un qui a une importance particulière : c'est le connexe linéo-linéaire donné par l'évanouissement du covariant identique u_x, c'est-à-dire par l'équation

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0; \tag{1}$$

nous l'appellerons, par abréviation, le *connexe identique*. Dans ce connexe, à tout point répond l'ensemble des droites qui y passent, et à toute droite l'ensemble des points situés sur elle, c'est-à-dire que l'élément du connexe identique est, en général, toute combinaison du point et de la droite en situation réunie. La courbe K_1 qui correspond à un point est donc le point lui-même considéré comme sommet d'un faisceau de rayons; la courbe C_1 qui correspond à une droite est cette droite elle-même considérée comme base d'une série ponctuelle.

L'ensemble des éléments communs à un connexe donné arbitrairement $f = 0$ et au connexe identique $u_x = 0$ fournit une coïncidence covariante particulièrement importante pour l'étude du connexe $f = 0$; nous l'appellerons la *coïncidence principale du connexe*. Dans cette figure, à tout point répondent n rayons passant par ce point (*rayons de coïncidence*) qui sont les tangentes menées de ce même point à la courbe correspondante

([1]) *Voir* Nöther, *Math. Annalen*, t. II, p. 305; note.

K_n; à toute droite répondent m points situés sur elle (*points de coïncidence*), savoir ses points d'intersection avec la courbe correspondante C_m.

Ainsi, à tout connexe répond une coïncidence principale, mais, au contraire, il existe inversement une infinité de connexes auxquels répond une même coïncidence principale (m, n). Si, en effet, $f = 0$ est l'un d'eux, tous les connexes

$$f + M u_x = 0, \tag{2}$$

$M = 0$ représentant un connexe quelconque $(m-1, n-1)$, comprennent évidemment la même coïncidence que f. Toutes les recherches suivantes sur la coïncidence principale d'un connexe f sont donc également vraies pour toutes les formes mixtes composées, comme dans (2), avec f et u_x.

La coïncidence principale présente un intérêt tout particulier, tenant à ce qu'elle est en connexion étroite avec *les équations différentielles algébriques du premier ordre* [1]. Si, par tout point du plan, on trace les n directions des droites qui lui correspondent dans la coïncidence principale, et qu'on les considère comme les éléments d'arc d'un système de courbes, on pourra composer ainsi une famille de courbes dont n passent par chaque point, et les tangentes desdites courbes en ce point sont les n rayons qui répondent à ce dernier dans la coïncidence principale. Pour la recherche des courbes qui prennent ainsi naissance, on aura à intégrer une équation différentielle qu'on trouvera de la manière suivante. Nous poserons de nouveau $f = a_x^m u_\alpha^n$. Soit u une droite passant par le point x et lui répondant dans la coïncidence principale, en sorte que $f(x, u) = 0$ et $u_x = 0$. Un point $x + dx$ voisin de x satisfait alors aux équations

$$\left\{\begin{aligned} u_{dx} &\equiv u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3 = 0, \\ u_x &\equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

en vertu desquelles on trouve les rapports des u_i égaux à ceux des

(1) L'emploi du mot *ordre*, dans un sens différent de celui qui lui a été attribué jusqu'ici dans le texte, ne peut entraîner aucune confusion. Nous entendons, suivant l'usage, par équation différentielle du premier ordre, une équation différentielle dans laquelle ne figurent que les premières différentielles dx_i ou du_i, celles-ci pouvant d'ailleurs entrer à une dimension quelconque.

déterminants formés avec les x_i et les dx_i. Si donc on introduit ces derniers dans f ou dans $f + \mathrm{M} u_x$, on obtient l'équation différentielle

$$(4)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3;\, x_2 dx_3 - x_3 dx_2,\, x_3 dx_1 - x_1 dx_3,\, x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \\ \quad \equiv a_x^m (\alpha x dx)^n = 0. \end{cases}$$

On peut corrélativement partir d'un rayon u et de ses n points de coïncidence. Si l'on mène par un de ceux-ci un rayon $u + du$ voisin de u, il se trouvera sur ce dernier un point $x + dx$ qui lui correspond; partant de ce nouveau point, on peut aller plus loin, et l'on obtient ainsi un système de courbes dont m touchent une droite quelconque. Pour leur détermination interviennent, à la place des équations (3), les équations

$$(5)\qquad u_x = 0, \quad (du)_x \equiv x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0,$$

et l'on trouve ainsi, par là, au lieu de (4), l'équation différentielle

$$(6)\qquad f[(u du),\, u] \equiv (a u du)^m u_\alpha^n = 0.$$

Ce système de courbes a, par conséquent, la propriété que la tangente d'une des courbes qui le composent en un de ses points est donnée par un des rayons de coïncidence de ce point. Mais le système de courbes donné par l'équation différentielle (4) était caractérisé absolument par la même propriété; *les deux systèmes sont donc identiques. L'équation* (6) *est l'équation différentielle en coordonnées-lignes pour le même système de courbes dont l'équation en coordonnées-points est obtenue par intégration de l'équation différentielle* (4). Nous appellerons les courbes ainsi représentées *courbes de coïncidence principale* ou *courbes intégrales du connexe* $f = 0$.

Les équations différentielles algébriques (4) et (6) qui se présentent ici sont les plus générales de leur espèce si l'on attribue au connexe $f = 0$ des coefficients généraux; car *toute équation différentielle du premier ordre à coefficients algébriques peut être obtenue de cette manière.* La connexion entre une équation différentielle donnée à deux variables et entre la coïncidence principale d'un connexe peut en effet évidemment se présenter de la façon suivante :

Soit donnée entre x, y *et* $p = \dfrac{dy}{dx}$ *une équation algébrique*

$\varphi(x, y, p) = 0$. *Mettons l'équation* $\varphi = 0$ *sous la forme*

$$(7) \qquad f(x, y; -p, xp - y) = 0,$$

ce qui peut être réalisé d'une infinité de manières. Alors

$$(8) \qquad f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}; \frac{u_1}{u_2}, \frac{u_3}{u_2}\right) = 0$$

sera toujours l'équation d'un connexe dont les courbes intégrales sont données par l'équation $f = 0$. Que l'on pose en effet de nouveau $u_i = (x\,dx)_i$ et ensuite $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$, $x_1 = x$, $x = y$, l'équation (8) se change de nouveau en (7). Au lieu de (8), on pourrait, du reste, choisir aussi comme équation correspondante de connexe toute équation

$$f + \frac{u_x}{x_3 u_2} \mathrm{M} = 0,$$

conformément à la circonstance que l'équation (7) peut être formée d'une infinité de manières différentes.

De même que nous avons sous les yeux, dans (4) et (6), deux équations différentielles pour les mêmes courbes, de même on peut remplacer toute équation différentielle algébrique par une autre qui lui est équivalente, et simplifier ainsi souvent l'intégration [1]. On aura, à cette fin, à ramener d'abord l'équation différentielle à la forme (7), à établir le connexe correspondant (8), et à y poser $x_i = (u\,du)_i$ au lieu de $u_i = (x\,dx)_i$.

Nous traiterons plus tard quelques exemples de la détermination des courbes intégrales ; nous considérerons seulement ici un cas particulièrement simple, savoir : le connexe qui est représenté par l'évanouissement du déterminant fonctionnel de deux formes $\varphi = a_x^m$, $\psi = \alpha_x^n$ et de la forme u_x

$$(9) \qquad (a\alpha u)\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} = 0.$$

Ce connexe donne l'équation différentielle

$$mn(a_x \alpha_{dx} - \alpha_x a_{dx}) a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} \equiv m\varphi\, d\psi - n\psi\, d\varphi = 0.$$

---

[1] Des considérations analogues pour l'espace (ou, en d'autres termes, la transformation d'une équation différentielle donnée en coordonnées-points en une équation différentielle en coordonnées de plans) se trouvent dans Plücker, *System der Geometrie des Raumes*, Düsseldorf, 1846, p. 27.

Ses courbes de coïncidence principale sont donc

$$m \log\psi - n \log\varphi = \log\lambda,$$

λ désignant un paramètre, ou

$$\psi^m - \lambda\varphi^n = 0. \tag{10}$$

Et par là est en même temps donnée l'intégration de l'équation différentielle

$$(a\alpha u)(audu)^{m-1}(\alpha udu)^{n-1} = 0;$$

du moins, cette intégration est fournie par la solution du problème purement algébrique qui consiste à établir l'équation des courbes (10) en coordonnées-lignes. On voit sur (10) que par tout point du plan passe effectivement une courbe du système, tandis que toute droite est touchée par $m+n-2$ courbes. En effet, l'équation de la courbe (10) en coordonnées-lignes serait d'abord du degré $2(mn-1)$ en λ; mais, comme la courbe ψ est comprise m fois dans le système, et qu'ainsi toute droite quelconque a un contact d'ordre $m-1$ en chacun de ses n points de rencontre, l'équation en coordonnées-lignes devra admettre pour *chaque* ligne la racine $n(m-1)^{\text{iple}}\lambda = 0$, et semblablement la racine $m(n-1)^{\text{iple}}\lambda = \infty$. Après suppression des facteurs correspondants, elle reste, par le fait, du degré

$$2(mn-1) - (m-1)n - (n-1)m = m+n-2.$$

La circonstance que dans (10) se présentent des courbes intégrales algébriques a pour cause la nature spéciale de l'exemple choisi; en général, on obtiendra des courbes transcendantes, mais dont encore n passeront toujours par un point quelconque, et m toucheront une droite quelconque. Donc aux nombres n, m appartient, dans ce système de courbes, une signification semblable à celle que nous avons attribuée plus haut dans la théorie des caractéristiques aux nombres μ, μ' (ou μ, ν), et effectivement différentes propositions relatives à ces nombres dans les systèmes de courbes algébriques peuvent être transportés immédiatement aux *systèmes* plus généraux *de courbes transcendantes qui sont définis par une équation différentielle*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \text{ou mieux} \quad a_x^m(\alpha x dx)^n = 0.$$

Menons, par exemple, par un point fixe toutes les droites possibles; chacune d'elles sera touchée en m points par les courbes du système, et l'équation $X_y = 0$ du lieu de ces points de contact s'obtient, par élimination de u entre les équations

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad a_x^m u_\alpha^n = 0,$$

et est, en conséquence, donnée par

$$X_y \equiv a_x^m (\alpha x y)^n = 0. \tag{11}$$

Le raisonnement dualistique conduit de même à l'équation

$$U_v \equiv (a u v)^m u_\alpha^n = 0, \tag{12}$$

et nous avons ces théorèmes (*voir* t. II, p. 128) :

Le lieu des points x qui, complétés par leurs lignes de jonction à un point fixe y, forment des éléments d'une coïncidence principale, est une courbe de l'ordre $m+n$

$$X_y = 0,$$

et cette courbe a, en y, un point multiple d'ordre n.

L'enveloppe des rayons u qui, complétés par leurs points de rencontre avec un rayon fixe v, forment des éléments d'une coïncidence principale, est une courbe de la classe $m+n$

$$U_v = 0,$$

et cette courbe a v pour tangente multiple d'ordre m.

L'ordre de la courbe $X_y = 0$ dépend donc, en réalité, des nombres m, n de la même façon que la courbe définie semblablement dans les systèmes algébriques dépend des caractéristiques μ, μ' d'un tel système, et la manière dont se comportent les deux courbes au point fixe y est également la même [1].

Parmi les points du plan sont particulièrement à remarquer ceux

[1] On a de même pour les systèmes de courbes transcendantes cette proposition qu'une courbe de l'ordre n' et de la classe k' est touchée par $k'n + n'm$ courbes du système; *voir* FOURET, *Sur les systèmes généraux de courbes planes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. II, p. 72 et 96). On aperçoit aussi combien les recherches ultérieures de Fouret sur les systèmes simultanés de courbes (*ibid.*, t. V, p. 19 et 130; t. VII, p. 177, et *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 mars, 1874) sont en relation étroite avec la théorie des connexes.

pour lesquels deux des n directions qui en sont issues se confondent, et, comme cette exigence est équivalente à une condition, il y aura un nombre infini de points de cette espèce, c'est-à-dire que les points dont il s'agit formeront une courbe. On obtient de même une autre courbe comme enveloppe des droites pour lesquelles deux points de coïncidence qui leur correspondent sont infiniment voisins l'un de l'autre. Si deux des n tangentes menées d'un point x à la courbe correspondante K_n doivent coïncider, il faut évidemment que le point x soit situé sur K_n; si donc on représente en coordonnées-points X sous la forme $F(x, X) = 0$ l'équation $f(x, u) = 0$ de cette dernière, $F(x, x) = 0$ est l'équation du lieu cherché. *On obtient le lieu des points x qui sont situés sur leur courbe correspondante K_n, et pour lesquels conséquemment deux des directions d'avancement homologues de la coïncidence principale se confondent, en représentant K_n en coordonnées-points. On obtient corrélativement l'enveloppe des droites qui touchent leur courbe correspondante C_m en représentant cette dernière en coordonnées-lignes u.*

La première courbe n'existe naturellement que si m est supérieur à 1, la seconde si n est supérieur à 1; les cas de $m = 1$ et $n = 1$ demandent donc à être traités à part; nous y reviendrons plus tard.

Pour le connexe $a_x u_\alpha^2 = 0$, on obtient, par exemple,

$$F(x, X) = a_x b_x (\alpha\beta X)^2,$$

et le lieu des points en question est, en conséquence, donné par la courbe du *quatrième* ordre

$$F(x, x) \equiv a_x b_x (\alpha\beta x)^2 = 0.$$

Pour le connexe $a_x^2 u_\alpha^2$, on trouve

$$F(x, X) = a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta X)^2$$

et conséquemment la courbe du *sixième* ordre

$$F(x, x) \equiv a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta x)^2 = 0.$$

Les courbes mentionnées ici se rattachent par des relations particulières et très importantes aux courbes intégrales du connexe

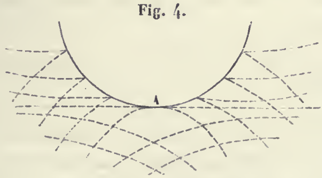
$f = 0$. Considérons les points situés de part et d'autre de la courbe $F(x, x) = 0$. Pour un point de cette dernière elle-même, deux des branches correspondantes des courbes intégrales se confondent; donc, d'après les lois connues de la continuité, ces branches sont nécessairement réelles pour les points placés d'un des côtés de la courbe $F(x, x) = 0$, imaginaires pour les points situés de l'autre côté. Par suite, en tout point de F, deux branches réelles des courbes intégrales ont la même tangente *sans se prolonger au delà de ce point,* c'est-à-dire qu'il se produit un point cuspidal de la courbe intégrale (*fig.* 4). Si donc on fait, en outre, le raisonnement corrélatif au point de vue dualistique et qu'on prenne la réciproque de tous les deux, on peut énoncer les deux propositions suivantes :

Le lieu ($F = 0$) *des points qui sont situés sur les courbes* K_n *qui leur correspondent dans le connexe est en même temps le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales du connexe* ([1]).

L'enveloppe ($F' = 0$) *des lignes qui touchent les courbes* C_m *qui leur correspondent dans le connexe est en même temps le lieu des tangentes d'inflexion des courbes intégrales du connexe.*

Les tangentes de rebroussement des courbes intégrales, qui appartiennent aux points de $F = 0$, envelopperont, en général, une

Fig. 4.



autre courbe $\Phi = 0$, et de même les points d'inflexion de ces courbes décriront une nouvelle courbe $\Phi' = 0$. C'est uniquement

([1]) Si l'on part d'une équation différentielle en coordonnées rectangulaires $f(\xi, \eta, p) = 0$, on obtient évidemment la courbe $F = 0$ en formant le discriminant de f par rapport à la variable $p = \frac{d\eta}{d\xi}$.

en des points particuliers de F qu'il arrivera que la tangente de rebroussement correspondante soit en même temps tangente de F en ce point, comme cela a lieu, par exemple, pour le point A dans la *fig.* 4 (¹). Dans le cas seulement où des conditions particulières existent entre les coefficients de l'équation $f=0$, il pourra se faire que la tangente de *tout* point de F soit aussi tangente de la courbe correspondante K_n. Alors F est touchée en chaque point par une courbe intégrale; la courbe $F=0$ donne, en ce cas, une intégrale singulière de l'équation différentielle $f=0$, ainsi que nous l'exposerons plus tard avec plus de détails; cette circonstance ne se présentera d'ailleurs pas en général.

Des lois de formation indiquées plus haut pour F et pour F′ peuvent aisément se déduire l'ordre ou la classe de ces courbes, car une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe est, en général, de l'ordre $n(n-1)$, et son équation en coordonnées-points est du degré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de l'équation en coordonnées-lignes. On trouve, en conséquence, pour l'ordre de F, le nombre $(n-1)(2m+n)$, et pour la classe de F′ le nombre $(m-1)(2n+m)$.

Les courbes $F=0$ qui se présentent ici ne sont nullement les courbes les plus générales de l'ordre $(n-1)(2m+n)$, et se distinguent, au contraire, par diverses singularités. Pour la détermination de ces dernières, nous examinerons avec plus de soin la relation entre les courbes $F=0$ et $\Phi=0$; rappelons que

$F=0$ représente le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales;

$\Phi=0$ l'enveloppe des tangentes de rebroussement de ces mêmes courbes.

Les deux courbes sont, d'après leur définition, rapportées *unidéterminativement* l'une à l'autre; à un point x de F correspond comme tangente de Φ précisément la tangente en x de la courbe

---

(¹) De la courbe intégrale tangente en A se sépare ici en même temps une droite. Cet exemple a d'abord été emprunté à la théorie des surfaces du troisième ordre dont les courbes asymptotiques se comportent ainsi dans le voisinage de la courbe parabolique (*voir* KLEIN, *Math. Annalen*, t. VI). Nous revenons, dans la dernière Section, sur la connexion de la courbe $F=0$ avec la solution singulière de l'équation différentielle.

K_n qui répond à x. Or une telle courbe K_n a, en général, $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ points doubles; il pourra donc arriver en un nombre fini de points du plan que le point x coïncide avec un point double de la courbe K_n correspondante, et alors il lui correspond deux tangentes différentes de cette dernière et, par conséquent, deux tangentes différentes de Φ. D'après les lois de la transformation unidéterminative, ce fait ne peut se produire que *si le point en question est un point double de* F. Nous déterminerons, d'après cela, le nombre de ces points doubles à l'aide du principe de correspondance de Salmon et Zeuthen (t. II, p. 108 et 109), ainsi qu'il suit.

A tout point x correspondent $\alpha = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ points y, savoir : les points doubles de la courbe K_n qui répond à x. Pour trouver le nombre α' des points x qui, réciproquement, répondent à y, nous avons à chercher le nombre des courbes K_n qui ont un point double en un point donné y. Tout rayon u passant par y sera touché par une infinité de courbes K_n; parmi elles figurent m^2 courbes qui touchent u en y, courbes qui correspondent aux m^2 points x déterminés par les équations

$$a_x^m u_\alpha^n = 0, \quad a_x^m u_\alpha^{n-1} w_\alpha = 0, \quad u_y = 0, \quad w_y = 0.$$

Donc il existe encore, en outre,

$$2(n-1)m^2 - 2m^2 = 2nm^2 - 4m^2$$

courbes K_n qui sont tangentes à u et passent en même temps par y. A chacune de ces dernières on peut encore mener de y $n-3$ tangentes v dont les points de contact ne sont pas situés sur u, et ainsi à tout rayon u répondent $2m^2(n-3)(n-2)$ rayons v et réciproquement. Si deux rayons correspondants coïncident, la courbe K_n considérée passe une seconde fois par y, c'est-à-dire a en y un point double. Or, comme deux coïncidences de cette espèce sont produites par la même courbe K_n, on a simplement

$$\alpha' = 2m^2(n-2)(n-3).$$

Pour trouver le nombre $\alpha + \alpha' + \beta$ des coïncidences des points x et y dans le plan, il nous faut maintenant obtenir encore l'ordre

β de la courbe parcourue par y si x décrit une droite. Or, si l'on pose $x = \xi + \lambda\eta$, l'équation

$$(a_\xi + \lambda a_\eta)^m u_\alpha^n = 0$$

représente un système de courbes K_n dont $2m(n-1)$ passent par un point quelconque, et m touchent une droite quelconque. Pour un tel système l'ordre cherché est immédiatement donné par l'interversion dualistique d'un théorème établi par Zeuthen, d'après lequel les tangentes doubles des courbes d'un système de C_n enveloppent une courbe de la classe

$$2n(n-2)(n-3)\mu,$$

s'il y a parmi elles μ courbes qui passent par un point donné et $2(n-1)\mu$ qui touchent une droite donnée ([1]). Nous trouvons, en conséquence, pour l'ordre du lieu du point double y, la valeur

$$\beta = 2(n-2)(n-3)nm.$$

Le nombre des points doubles de F *est donc finalement*

$$(13) \qquad \alpha + \alpha' + \beta = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)[(2m+n)^2 + 3n].$$

On trouve semblablement que le nombre des points de rebroussement de F est égal au nombre des points x qui coïncident avec un point cuspidal y de la courbe correspondante K_n. On a ici

$$\alpha = 3n(n-2), \quad \alpha' = 3m^2(n-2),$$

ce dernier nombre s'obtenant par la considération d'une correspondance

$$[m^2(n-2), \quad 2m^2(n-2)]$$

entre les rayons d'un faisceau quelconque. On trouve enfin, d'après les recherches de Zeuthen dont nous venons de parler,

$$\beta = 3mn(n-2),$$

et *le nombre des points de rebroussement de* $F = 0$ *est conséquem-*

([1]) *Voir* le Mémoire de Zeuthen, cité t. II, p. 127 (n° 34, p. 340 de ce Mémoire).

ment égal à

$$3(n-2)(m^2+mn+n). \tag{14}$$

Pour déterminer la classe de Φ, nous partirons des formules qui donnent la relation unidéterminative des tangentes de Φ à l'égard des points de F. Si $A_x^\mu \mathcal{A}_\mathrm{x}^\nu = 0$ est symboliquement l'équation en coordonnées-points X de la courbe K_n qui répond à x, μ étant égal à $2m(n-1)$, ν à $n(n-1)$, les susdites formules de transformation sont évidemment

$$\rho u_i = A_x^\mu \mathcal{A}_x^{\nu-1} \mathcal{A}_i \equiv \varphi_i(x). \tag{15}$$

En premier lieu, les trois courbes $\varphi_i = 0$ passent par tous les points doubles et cuspidaux de $F = 0$, car précisément, si x est un point double de la courbe $A_x^\mu \mathcal{A}_\mathrm{x}^\nu = 0$, les trois grandeurs $\varphi_i(x)$ s'annulent, et nous avons vu qu'alors F a un point double en x. Dans nos formules générales pour la transformation unidéterminative (p. 8), nous devons, en conséquence, poser

$$\left\{\begin{aligned} s &= \mu+\nu-1 = (n-1)(2m+n)-1, \\ \tau &= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)[(2m+n)^2+3n] \\ &\quad + 3(n-2)(m^2+mn+n). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Il nous reste maintenant à chercher le nombre σ des points simples de F par lesquels les trois courbes $\varphi_i = 0$ passent simultanément. Parmi les courbes K_n en nombre doublement infini, il y en aura une infinité simple qui posséderont une tangente double, et les points correspondants x formeront une courbe $P = 0$ qui s'obtient par élimination des u_i entre les équations

$$a_x^m u_\alpha^{n-1} \alpha_i = 0 \tag{17}$$

et est conséquemment de l'ordre $3m(n-1)^2$. Il existera de plus sur P un nombre fini de points x par lesquels passe la tangente double de la courbe correspondante K_n. Ces points sont situés en même temps sur $F = 0$, car, pour eux, deux des n rayons correspondants de la coïncidence principale se confondent avec la tangente double, et à leur égard ont lieu simultanément les trois équations

$$A_x^\mu \mathcal{A}_x^{\nu-1} \mathcal{A}_i = 0,$$

car la tangente double doit être considérée comme branche comptée deux fois de la courbe du $\nu^{\text{ième}}$ ordre $A_x^\mu \mathfrak{A}_x^\nu = 0$. *Les courbes* φ_i *passent donc toutes trois par les points ainsi caractérisés.* Le nombre de ces points se détermine ainsi qu'il suit. L'équation de la courbe enveloppée par les tangentes doubles s'obtient par élimination des x_i entre les équations (17); elle est donc de la classe $3m^2(n-1)$. Nous avons, en conséquence, sur la courbe $P = 0$ entre les points x et entre les points de rencontre y de la tangente double correspondante une correspondance

$$[3m(n-1)^2, \quad 3m^2(n-1)]_0.$$

Le nombre des points cherchés de $P = 0$, et par suite aussi le nombre des *points simples de* $F = 0$ *qui sont communs aux* φ_i, est donc égal à

$$3m(n-1)(m+n-1). \tag{18}$$

On doit enfin observer que les courbes $\varphi_i = 0$ touchent les tangentes de rebroussement de $F = 0$ aux points de rebroussement. Comme, en effet, d'après ce qui précède, la courbe $F \equiv A_x^\mu \mathfrak{A}_x^\nu = 0$ a elle-même un point double en un point double de la courbe K_n qui répond à x, les grandeurs $A_x^\mu \mathfrak{A}_x^{\nu-1} \mathfrak{A}_i$ et $A_x^{\mu-1} A_i \mathfrak{A}_x^\nu$ sont proportionnelles entre elles, et, par conséquent, on peut aussi remplacer les équations (15) par

$$\rho' u_i = A_x^{\mu-1} \mathfrak{A}_x^\nu A_i. \tag{19}$$

Si maintenant, pour un point de rebroussement x de F, les dx_i sont déterminés par l'équation $v_{dx}^2 = 0$, c'est-à-dire par

$$A_x^{\mu-2} \mathfrak{A}_x^{\nu-2} [\mu(\mu-1) A_{dx}^2 \mathfrak{A}_x^2 + 2\mu\nu A_x \mathfrak{A}_x A_{dx} \mathfrak{A}_{dx} + \nu(\nu-1) A_x^2 \mathfrak{A}_{dx}^2] = 0,$$

où les quantités v_i désignent les coordonnées de la tangente de rebroussement, la tangente de Φ qui répond à x est déterminée, d'après (15), par

$$\rho u_i = A_x^{\mu-1} \mathfrak{A}_x^{\nu-2} [\mu A_{dx} \mathfrak{A}_x + (\nu-1) A_x \mathfrak{A}_{dx}] \mathfrak{A}_i$$

ou, d'après (19), par

$$\rho' u_i = A_x^{\mu-2} \mathfrak{A}_x^{\nu-1} [(\mu-1) A_{dx} \mathfrak{A}_x + \nu A_x \mathfrak{A}_{dx}] A_i.$$

Nous avons, en conséquence,

$$(\rho'\mu + \rho\nu) u_{dx} = v_{dx}^2 \quad \text{et} \quad \rho'' u_i = v_{dx} . v_i = 0.$$

De fait, ces dernières équations expriment que les courbes $\varphi_i(x) = 0$ comprennent aussi le point $x + dx$, c'est-à-dire touchent la ligne $v_x = 0$ en x. Dans nos formules générales, pour la transformation unidéterminative (p. 8), nous avons donc à prendre le nombre σ égal à la somme du nombre (18) et du nombre des points de rebroussement

$$(20) \quad \sigma = 3m(n-1)(m+n-1) + 3(n-2)(m^2+mn+n).$$

Par suite enfin, *la classe de* Φ, *eu égard à* (16), *est égale à*

$$(21) \quad (\mu+\nu)s - \sigma - 2\tau = m^2 + 2mn - m + n \quad [1].$$

Par conséquent, comme la classe et le genre de la courbe $\Phi = 0$ sont connus, on peut aisément calculer le nombre de ses tangentes doubles, car il ne se présentera pas, en général, de tangentes d'inflexion; nous ne développerons pas toutefois ici ce calcul.

Par interversion dualistique des résultats acquis, on obtient les propriétés des courbes

$F' = 0$, lieu (enveloppe) des tangentes d'inflexion des courbes intégrales,

$\Phi' = 0$, lieu de leurs points d'inflexion.

La première courbe est de la classe $(n-1)(2n+m)$, le nombre

---

(1) Ce nombre peut aussi se trouver de la manière suivante. Sur toute ligne u menée par y sont situés m points correspondants x de la coïncidence principale, savoir les points de rencontre de u avec la courbe $X_y = a_x^m(\alpha x y)^n = 0$; de chacun de ces m points partent $n-1$ autres rayons v de la coïncidence principale; on obtient donc une tangente de Φ passant par y si une ligne u se confond avec une des $m(n-1)$ lignes correspondantes v. Or les lignes v enveloppent une courbe qui s'obtient par élimination des x entre les équations

$$a_x^m(\alpha x y)^n = 0, \quad v_x = 0, \quad a_x^m v_\alpha^n = 0,$$

et est par conséquent de la classe $(m+n)^2$. Mais de cette courbe se sépare le point y comptant m fois, et elle a en outre un point multiple d'ordre n en y. On peut donc lui mener de y encore $(m+n)^2 - m - n(n-1) = m^2 + 2mn - m + n$ tangentes, et ce nombre est par suite *la classe* de Φ.

de ses tangentes doubles est égal à

$$\frac{1}{2}(m-2)(m-3)[(2n+m)^2+3m],$$

et le nombre de ses tangentes d'inflexion égal à

$$3(m-2)(n^2+nm+m).$$

L'ordre de Φ' est enfin donné par le nombre

$$n^2+2nm-n+m.$$

On peut en déduire les autres nombres plückériens des deux courbes, puisque leur genre est le même, et que $\Phi'=0$ n'aura pas, en général, de points de rebroussement.

Nous avons ici considéré en premier lieu les courbes F et Φ dans leur rapport avec l'équation différentielle de la coïncidence principale. Indépendamment de ce point de vue, F et Φ peuvent évidemment être envisagés comme covariants ou contrevariants du connexe $f=0$, ou aussi de la coïncidence principale de ce dernier. Mais, comme l'équation différentielle des courbes intégrales est liée inséparablement à la coïncidence principale du connexe, on pourra parler aussi bien d'invariants fonctionnels de l'équation différentielle que d'invariants fonctionnels de la coïncidence principale, et les formes F, Φ, F', Φ' nous en offriront les exemples les plus simples ([1]). Ainsi s'ouvre un nouveau point de vue pour l'étude des différentielles algébriques : on ne se bornera pas à essayer leur intégration, mais on consacrera une partie de son attention à l'étude de leurs invariants fonctionnels, c'est-à-dire à la question de savoir ce qui, dans la théorie des équations différentielles, dépend des transformations linéaires, et ce qui demeure indépendant de ces transformations.

Mais, ces idées une fois acquises, on ira encore plus loin, et l'on fera intervenir les transformations unidéterminatives générales, telles qu'elles ont été brièvement considérées plus haut (p. 376 et

([1]) Les expressions dont il s'agit ici sont différentes de celles que M. Halphen a appelées invariants différentiels (*Sur les invariants différentiels*, Thèse pour le doctorat; Paris, 1878). Ces derniers sont les premiers membres des équations différentielles qui se reproduisent sans altération quand on effectue sur les variables une substitution homographique quelconque.

suiv.), à la place des transformations linéaires. Or nous devons faire observer que toute transformation unidéterminative de la forme

$$(22) \qquad \rho y_i = \varphi_i\begin{pmatrix} p & q \\ x, & u \end{pmatrix}, \quad \sigma v_i = \psi_i\begin{pmatrix} r & s \\ x, & u \end{pmatrix},$$

qui change le connexe $f(x, u) = 0$ en un connexe $F(y, v) = 0$, ne change pas par là même la coïncidence principale du connexe f en la coïncidence principale du connexe F, car, pour la coïncidence qui provient de la coïncidence principale de f, la condition $v_y = 0$ n'est pas nécessairement satisfaite en soi. La coïncidence principale de F tire au contraire son origine de la coïncidence détachée de $f = 0$ par le connexe $\Sigma\varphi_i\psi_i = 0$. Les éléments de la coïncidence principale qui sont formés dans $f = 0$ par les points et les tangentes d'une courbe $\chi(x) = 0$ deviennent donc, en général, les éléments d'un *couple* de courbes dans $F = 0$. Si, cependant, la substitution (22) est de telle nature qu'en vertu de $f = 0$ la condition $u_x = 0$ soit transformée en la condition $v_y = 0$, la coïncidence principale de f se change en la coïncidence principale de F. Le couple de courbes provenant d'une courbe $\chi = 0$ a donc actuellement la propriété que toute tangente de l'une des courbes du couple passe par le point correspondant de l'autre courbe. Mais si ces deux dernières courbes doivent se confondre, c'est-à-dire si les points et les tangentes d'une courbe $\chi(x) = 0$ doivent se transformer en les points et les tangentes d'une courbe $X(y) = 0$ (¹), *les deux conditions $u_x = 0$ et $u_{dx} = 0$ se changeront respectivement, par suite de notre transformation, en $v_y = 0$ et $v_{dy} = 0$, en vertu de $f = 0$.* C'est donc dans ce cas seulement que d'une courbe intégrale du connexe f dérive une courbe intégrale du connexe F; *c'est, par suite, ce cas seulement de la transformation qui présente de l'importance pour l'équation différentielle en connexion avec la coïncidence principale de f.*

C'est seulement par rapport à ce cercle étroit de transformations algébriques relatif à l'équation différentielle considérée en elle-même que l'on peut parler du *genre d'une équation différentielle,* en tant que l'on applique nos considérations antérieures sur les

(¹) Cette dernière peut en particulier se composer d'un point et des rayons qui y passent; elle n'est, il est vrai, plus représentable alors en coordonnées points. Dans ce cas, le point se présente donc comme une intégrale de l'équation différentielle.

coïncidences à la coïncidence principale de f (p. 382). Le genre est alors un nombre qui reste toujours invariable dans les transformations précitées.

Il va de soi qu'on peut établir aussi, pour la coïncidence principale, les différentielles formées plus haut, en remplaçant le connexe $\varphi = 0$ par le connexe identique $u_x = 0$. En posant, de plus, $(a\alpha)_i = c_i$ et $(b\beta)_i = \gamma_i$, on obtient simplement

$$dI = \frac{\Theta\,(x\,dx\,d'x)\,u_\gamma}{(\gamma f'_u x)} = \frac{\Theta.(u\,du\,d'u)\,c_x}{(c f'_x u)}.$$

Nous nous proposons maintenant d'établir les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions φ_i, ψ_i qui figurent dans (22) si les courbes de coïncidence principales de f doivent se transformer en celles de F. En premier lieu, les conditions $v_y = 0$, $v_{dy} = 0$ donnent immédiatement les équations

$$\Sigma\varphi_i\psi_i = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\psi_i d\varphi_i = 0.$$

Toutes deux doivent avoir lieu comme conséquence des équations $f = 0$, $u_x = 0$. La première conduit à l'identité à satisfaire

$$\Sigma\varphi_i\psi_i = Kf + Mu_x.$$

La seconde équation développée donne

$$(24) \qquad \sum\sum\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx_k + \sum\sum\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}du_k = 0.$$

Or, comme en même temps ont lieu les équations

$$\Sigma x_i du_i = 0, \quad \Sigma x_i u_i = 0, \quad \Sigma x_i f'_{x_i} \equiv mf = 0,$$

on peut poser

$$(25) \qquad du_i = \varkappa u_i + \lambda f'_{x_i}.$$

On déduit ensuite de $f = 0$ par différentiation

$$(26) \qquad \Sigma f'_{x_i}dx_i + \Sigma f'_{u_i}du_i = 0,$$

et de là résulte, en vertu de (25), puisque $\Sigma u_i f'u_i = 0$, une détermination de λ seulement, tandis que $\varkappa$ reste indéterminé.

Mais, en conséquence de l'équation

$$0 = \Sigma u_i f'_{u_i} \equiv (f'_u x\,dx),$$

on peut aussi poser

$$dx_i = \varkappa' x_i + \lambda' f'_{u_i}. \tag{27}$$

Si l'on porte de même ces valeurs dans (26), il reste

$$(\lambda + \lambda').\Sigma f'_{x_i} f'_{u_i} = 0. \tag{28}$$

Nous exclurons d'abord l'évanouissement du second facteur. Cette circonstance ne se présentant pas, on a $\lambda + \lambda' = 0$, et l'équation (24) se change, à cause de (25) et (27), en

$$(\varkappa' p + \varkappa q) \sum \varphi_i \psi_i + \lambda' \sum \sum \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Par conséquent, si l'on a recours à (23), il devra encore exister une identité de la forme

$$\sum_i \sum_k \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \mathrm{K}' f + \mathrm{M}' u_x. \tag{29}$$

Les équations (23) et (29) renferment toutes les conditions auxquelles les fonctions φ_i, ψ_i doivent satisfaire ; on peut, par suite de leur existence, exprimer immédiatement deux de ces fonctions par les autres.

La forme de la dernière équation est dissymétrique par rapport aux φ_i et aux ψ_i. Mais la circonstance que ces fonctions doivent être, en réalité, soumises à des conditions symétriques résulte du caractère dualistique démontré plus haut d'une manière générale pour les équations différentielles, et par le fait on déduit aisément des équations (23) et (29) réunies la condition qui est symétrique à (29). Si l'on soumet, en effet, l'équation (23) au procédé

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right),$$

on obtient, dans le premier membre, deux parties dont l'une est le premier membre de (29), tandis que l'autre en dérive par permutation de φ et de ψ ; mais, dans le second membre, on obtient la forme $\mathrm{K}'' f + \mathrm{M}'' u_x$, c'est-à-dire aussi l'expression symétrique à (29) semblablement représentée. C. Q. F. D.

Les conditions, pour que, par la transformation (22), *l'équa-*

tion différentielle des courbes intégrales de $f=0$ se change en l'équation différentielle des courbes intégrales de $F=0$ [1] *sont donc sous forme symétrique*

$$(30)\quad \begin{cases} \sum_i \sum_k \psi_i \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \dfrac{\partial f}{\partial u_k} - \dfrac{\partial x_i}{\partial u_k} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \right) = K'f + M' u_x, \\ \sum_i \sum_k \varphi_i \left(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \dfrac{\partial f}{\partial u_k} - \dfrac{\partial \psi_i}{\partial u_k} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \right) = K''f + M'' u_x. \end{cases}$$

Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas exceptionnel où déjà existe une équation

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = Kf + M u_x,$$

dont le premier membre entraîne à sa suite par son évanouissement l'existence de l'équation (28). *Nous nous proposons de montrer que dans ce cas il n'y a pas d'équation différentielle proprement dite.*

Soient d'abord $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ des grandeurs quelconques; on voit que le produit

$$\begin{vmatrix} x_1 & f'_{u_1} & \xi_1 \\ x_2 & f'_{u_2} & \xi_2 \\ x_3 & f'_{u_3} & \xi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & f'_{x_1} & \eta_1 \\ u_2 & f'_{x_2} & \eta_2 \\ u_3 & f'_{x_3} & \eta_3 \end{vmatrix}$$

s'annule pour tous les éléments de la coïncidence, car, dans le déterminant qui résulte de la multiplication, quatre éléments qui forment un rectangle s'annulent dans notre cas. Il faut donc que l'un des facteurs du produit précédent soit nul, c'est-à-dire que l'on a, puisque les quantités ξ, η sont quelconques, ou bien

$$(31)\quad x_2 f'_{u_3} - x_3 f'_{u_2} = 0, \quad x_3 f'_{u_1} - x_1 f'_{u_3} = 0, \quad x_1 f'_{u_2} - x_2 f'_{u_1} = 0,$$

ou

$$(32)\quad u_2 f'_{x_3} - u_3 f'_{x_2} = 0, \quad u_3 f'_{x_1} - u_1 f'_{x_3} = 0, \quad u_1 f'_{x_2} - u_2 f'_{x_1} = 0,$$

toujours dans la supposition de $f=0$, $u_x=0$.

---

[1] On peut aussi demander que cette propriété appartienne à la transformation (22) par rapport à *tout* connexe $f=0$. Cela donne ce qu'on appelle les *transformations de contact*. (*Voir* sur ce sujet la fin du présent Volume.)

Considérons actuellement l'équation

$$X_y \equiv f[x, (xy)] \equiv a_x^m (\alpha x y)^n = 0,$$

qui représente en fonction des variables y le produit des n droites issues de x dans la coïncidence principale, et qui donne naissance à l'équation différentielle si l'on remplace les y_i par les dx_i. Par la substitution $u_i = (xy)_i$, qui satisfait identiquement à la condition $u_x = 0$, les équations (31) se transforment en

$$(33) \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial y_3} = 0.$$

Ces équations doivent avoir lieu pour tous les systèmes de valeurs x, y relativement auxquels on a $X_y = 0$. Si donc X_y est irréductible, elles sont impossibles, car les premiers membres des équations (33) sont d'un degré moins élevé que X_y et, par conséquent, ne sont pas divisibles par X_y. Mais si X_y est réductible, égal, par exemple, à $\psi.\chi\ldots$, $\psi, \chi, \ldots$ étant irréductibles, les équations (33) se transforment en

$$\psi\ldots\frac{\partial \chi}{\partial y_i} + \chi\ldots\frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \ldots = 0.$$

Pour des valeurs satisfaisant à l'équation $\psi = 0$, cela donne

$$\chi\ldots\frac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0;$$

il faut donc, ou bien que l'un des facteurs $\chi, \ldots$ soit égal à ψ, ou bien que toutes les expressions $\frac{\partial \psi}{\partial y_i}$ s'évanouissent. On reconnaît ainsi que X_y doit avoir la forme

$$X_y = M^2 . \mathfrak{X},$$

$\mathfrak{X}$ ne renfermant plus les y. Si donc

$$M = \Psi\left[\overset{\rho}{x}, (\overset{\sigma}{xy})\right],$$

il vient

$$f = \mathfrak{X}_{m-2\rho} . \Psi^2\left(\overset{\rho}{x}, \overset{\sigma}{u}\right) + N u_x$$

pour la forme la plus générale du connexe en question.

Dans un semblable connexe $(m, 2\sigma)$, à tout point x correspond une courbe qui a, en ce point, un point multiple d'ordre σ, à toute droite u une courbe qui est touchée par cette droite en ρ points, tandis que ses autres $m-2\rho$ points de rencontre sont situés sur une courbe fixe $\mathfrak{X}=0$. *La coïncidence principale du connexe se compose, en ce cas, de la courbe singulière $\mathfrak{X}=0$, envisagée comme lieu de sommets de faisceaux, et de la coïncidence principale (comptée deux fois) du connexe $\Psi=0$.*

Le cas dans lequel les équations (32) se présentent à la place de (31) est simplement la contre-partie du précédent au point de vue dualistique.

On obtiendra les formules pour la transformation unidéterminative sous forme non homogène, si ξ, η désignent les nouvelles variables, en posant, dans les formules précédentes, $y_1=\xi y_3$, $y_2=\eta y_3$. On a alors

$$\xi=\frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad \eta=\frac{\varphi_2}{\varphi},$$

φ, φ_1, φ_2 étant des fonctions doublement homogènes des séries x, y, 1, $-p$, 1, $xp-y$ (p. 387). La manière la plus simple d'obtenir les équations pour les φ_i consiste à former $\frac{d\eta}{d\xi}$ et à substituer à l'expression $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui y figure sa valeur déduite de $\frac{df}{dx}=0$. L'équation $f=0$ se change par là en une équation entre ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$. Nous avons donc sous les yeux la transformation la plus générale dans laquelle les nouvelles variables et leurs premières dérivées sont des fonctions des anciennes variables et de leurs premières dérivées.

V. — Exemples relatifs à la détermination de courbes de coïncidence principale.

Dans ce qui suit nous nous proposons de donner quelques exemples d'intégration de l'équation différentielle des courbes de coïncidence principale. Ces exemples présentent un intérêt parti-

culier, en ce qu'ils sont pour partie en connexion avec d'autres recherches précédentes [1].

I. Il a déjà été observé plus haut (p. 351) que le connexe linéo-linéaire, c'est-à-dire le connexe (1, 1), fournit immédiatement la transformation collinéaire. Or, comme cette dernière peut généralement être prise (t. I, p. 326) sous la forme canonique

$$\rho y_i = \varkappa_i x_i,$$

le connexe général $a_x u_\alpha = 0$ peut aussi être réduit à la forme canonique

$$\varkappa_1 u_1 x_1 + \varkappa_2 u_2 x_2 + \varkappa_3 u_3 x_3 = 0.$$

Mais on tire de là l'équation différentielle [2]

$$\varkappa_1 x_1 (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \varkappa_2 x_2 (x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + \varkappa_3 x_3 (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0,$$

ou, après une transformation simple,

$$(\varkappa_2 - \varkappa_3)\frac{dx_1}{x_1} + (\varkappa_3 - \varkappa_1)\frac{dx_2}{x_2} + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Par suite, *l'équation des courbes de coïncidence principale du connexe linéo-linéaire est, en général, de la forme*

$$x_1^{\varkappa_2 - \varkappa_3} x_2^{\varkappa_3 - \varkappa_1} x_3^{\varkappa_1 - \varkappa_2} = \text{const.}$$

Elles sont donc, en particulier, algébriques si les grandeurs $\varkappa_i$ sont entre elles dans le rapport de nombres entiers. Nous reviendrons encore sur ces courbes en étudiant le connexe (1, 1).

II. Soient quatre coniques indépendantes les unes des autres, données par les équations

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0, \quad d_x^2 = 0.$$

---

(1) D'autres exemples concernant quelques cas particuliers de la coïncidence principale du connexe (1, 2) ou (2, 1) ont été donnés récemment par MM. DARBOUX et FOURET (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. II, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII).

(2) Cette équation différentielle n'est autre que l'équation dite de JACOBI; en effet, pour $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, elle devient

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

dans laquelle L, M, N désignent des fonctions linéaires. (*Voir* Jacobi, *Journal de Crelle*, t. 34; SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, Paris, 1868, t. II, p. 425; FOURET, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 15 juin 1874.)

Dans le système de courbes triplement infini

$$(1) \qquad \varkappa_1 a_x^2 + \varkappa_2 b_x^2 + \varkappa_3 c_x^2 + \varkappa_4 d_x^2 = 0,$$

il existe un nombre doublement infini de courbes qui se décomposent en deux lignes droites, et, pour préciser, il y a pour chaque point du plan un couple de droites dont le point double se trouve en ce point lui-même, fait dont on s'assure aisément (et qui résulte au surplus des développements algébriques qui suivent). Tous ces couples de droites envelopperont un système de courbes [1] dont deux passent par un point quelconque; nous nous proposons d'établir d'abord leur équation différentielle et de l'intégrer ensuite.

Toute ligne u du plan complétée par une autre ligne v forme un couple de droites de notre système (1). L'équation de la ligne v se trouve par élimination des grandeurs $\varkappa_i$ et v_i entre les équations

$$\varkappa_1 a_{ik} + \varkappa_2 b_{ik} + \varkappa_3 c_{ik} + \varkappa_4 d_{ik} = u_i v_k + v_i u_k,$$
$$0 = v_x$$

(a_x^2 étant égal à $\Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k, \ldots$) sous la forme

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & d_{11} & 2u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & d_{22} & 0 & 2u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & d_{33} & 0 & 0 & 2u_3 \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} & d_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ a_{31} & b_{31} & c_{31} & d_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} & d_{12} & u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente un connexe (1, 2); pour u constant, elle est l'équation de la droite v qui correspond à u; pour x constant, elle donne donc une conique comme enveloppe des lignes u dont les lignes correspondantes v passent par x. En particulier, les deux tangentes menées de x à cette conique, c'est-à-dire les deux lignes de la coïncidence principale qui répondent à x, for-

[1] Ce système de courbes a de l'importance pour ce qu'on appelle la surface de Steiner; *voir*, pour la suite, Clebsch, *Ueber die Steiner'sche Fläche.* (*Journal de Crelle,* t. 67.)

ment celui des couples de droites de notre système dont le sommet est situé au point x lui-même. L'équation qui dérive de notre connexe (2) par la substitution $u_i = (x\,dx)_i$ est, par conséquent, l'équation différentielle des courbes que nous cherchons.

Celle-ci, établie directement, apparaît sous une forme qui ne permet pas de reconnaître immédiatement son intégrale ; on l'obtient sous un aspect plus approprié au but par le raisonnement suivant. Il existe, comme cela est connu par des développements précédents (t. II, p. 107, et t. I, p. 368) un système tangentiel simplement infini de coniques ([1])

$$(3) \qquad u_\alpha^2 + \lambda u_\beta^2 = 0,$$

qui sont toutes harmoniquement inscrites à toutes les coniques du système (1), de sorte qu'indépendamment de λ ont lieu les équations

$$(4) \quad a_\alpha^2 + \lambda a_\beta^2 = 0, \quad b_\alpha^2 + \lambda b_\beta^2 = 0, \quad c_\alpha + \lambda c_\beta^2 = 0, \quad d_\alpha^2 + \lambda d_\beta^2 = 0.$$

Si maintenant un couple de droites doit être harmoniquement circonscrit à toutes les coniques (3), c'est-à-dire appartenir au système triplement infini (1), cela signifie que les lignes u et v sont polaires conjuguées l'une à l'autre relativement à toutes les courbes (3), c'est-à-dire qu'on a les équations

$$u_\alpha v_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad u_\beta v_\beta = 0.$$

Si l'on élimine entre elles et entre l'équation $v_x = 0$ les quantités v_i, on obtient le connexe (2) sous la forme plus simple d'un déterminant fonctionnel

$$(\alpha\beta x)\, u_\alpha u_\beta = 0.$$

Mais *les courbes de coïncidence principale de ce connexe* nous sont déjà connues par un exemple précédent (p. 387) ; *ce sont précisément les coniques du système* (3). *Ces dernières forment donc le système de courbes cherché.*

III. Nous passons à un exemple dont l'intérêt est accru par la circonstance qu'il se réfère à un connexe $f = 0$ à l'égard duquel,

---

([1]) Sur les autres relations algébriques et géométriques entre les systèmes (1) et (3), *voir* aussi les Mémoires de Smith et Rosanes, cités t. II, p. 248.

par suite de $f = 0$ et $u_x = 0$, la condition ci-dessus mentionnée $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ est satisfaite. Soit donnée une conique $a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 = 0$ et une droite $v_x = 0$ la rencontrant en deux points séparés [1]. En vertu de considérations précédentes (t. I, p. 95), la conique

$$(5) \qquad (\alpha + 1)^2 (auv)^2 . b_x^2 - 4\alpha . (auv) a_x . (buv) b_x = 0$$

représente le lieu des points x dont la ligne de jonction au point de rencontre de u et v rencontre la conique $a_x^2 = 0$, de telle sorte que les points x et (uv) déterminent avec les points d'intersection de la conique le rapport anharmonique α. Si donc nous ajoutons la condition $u_x = 0$, sur la ligne u se trouveront déterminés par (5) deux points formant avec x et (uv) le rapport anharmonique α. La même chose a lieu si nous transformons encore l'équation (5) sous le bénéfice de la supposition $u_x = 0$. Or on a identiquement

$$(buv) a_x = (auv) b_x - (abv) u_x + (abu) v_x,$$

et ensuite, d'après l'identité (IV) (t. I, p. 352), à cause de $u_x = 0$,

$$2 (abu)(avu) b_x v_x = (abu)^2 v_x^2.$$

Par conséquent, l'équation (5) se transforme en

$$(6) \qquad (\alpha - 1)^2 (auv)^2 . b_x^2 + 2\alpha (abu)^2 v_x^2 = 0.$$

On reconnaît immédiatement que chaque courbe C_2 et K_2 de ce connexe (2, 2) appartient au faisceau $a_x^2 + \lambda v_x^2 = 0$, c'est-à-dire est tangente à la courbe $a_x^2 = 0$ en ses points de rencontre avec $v_x = 0$. Il existe donc, dans le connexe (6), un seul système *simplement* infini de courbes C_2, et de même un seul système *simplement* infini de courbes K_2 identique au premier (t. I, p. 147). A un ensemble simplement infini de points x doit donc correspondre la même courbe K_2 et à tout ensemble simplement infini de droites u la même courbe C_2. Comme, d'ailleurs, chaque droite du plan est touchée par une seule conique du faisceau, tous les points auxquels correspond la même courbe

$$K_2 \equiv 2(abu)^2 - \lambda (auv)^2 = 0,$$

---

(1) *Voir*, pour ce qui suit, le Mémoire de Harnack, cité p. 195 et 215.

en vertu de (6), forment la conique $(\alpha-1)^2 b_x^2+\alpha\lambda v_x^2=0$, de sorte que par là se trouve donnée une association par couples des coniques de notre faisceau. Mais, parmi le système des connexes (6), on doit surtout remarquer celui obtenu pour $\alpha=-1$

$$f\equiv 2(avu)^2 b_x^2-(abu)^2 v_x^2=0. \tag{7}$$

On a, en effet, l'identité

$$f+2(abv)(avu)b_x.u_x=2[(avu)a_x]^2,$$

laquelle exprime, en vertu de nos explications générales (p. 403), que, par suite de $f=0$, $u_x=0$, la condition $\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}=0$ est satisfaite, que, par conséquent, dans notre cas, *tout point x est situé sur la courbe* K_2 *correspondante, et que toute droite u touche la courbe* C_2 *correspondante*. Il suit en même temps de là que *les courbes de coïncidence principale du connexe* (7) comptées deux fois se composent de celles du connexe $(avu)a_x=0$, c'est-à-dire (p. 387) précisément *des courbes* C_2 *ou* K_2 du connexe (7).

L'équation (6) peut aussi être déduite d'un certain système d'équations au moyen d'un procédé particulier d'élimination, et cette manière de l'obtenir conduit immédiatement à l'établissement de ses courbes intégrales par un raisonnement que nous exposerons incessamment avec quelques détails. Si l'on pose, en effet, dans (6), $x_i=(udu)_i$, on obtient l'équation différentielle

$$(\alpha-1)^2(auv)^2(budu)^2+2\alpha(abu)^2(vudu)^2=0, \tag{8}$$

ce qui n'est autre chose que le résultat de l'élimination de la quantité D entre les équations du second degré en D

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}D^2.(abu)^2(cuv)^2+D.(abu)^2(vudu)+(audu)^2=0,\\ \frac{1}{2}D^2.(abu)^2(cuv)^2-D\alpha.(abu)^2(vudu)+\alpha^2(audu)^2=0. \end{cases}$$

Mais la première des équations (9) s'obtient encore par élimination des x_i entre les trois équations

$$D.a_x(avu)+(du)_x=0,\quad a_x^2=0,\quad u_x=0;$$

et nous pouvons, en conséquence, lui assigner facilement un sens.

En effet, la quantité D est définie par la première des équations que nous venons d'écrire comme étant la différentielle de troisième espèce de la courbe primitive $a_x^2 = 0$, différentielle dont les infinis sont situés aux points de rencontre de $v_x = 0$ avec $a_x^2 = 0$, car, en vertu de $u_x = 0$ et $u_{dx} + (du)_x = 0$, on a (p. 139)

$$\mathrm{D} = -\frac{(du)_x}{a_x(avu)} = \frac{(cxdx)}{v_x \cdot a_x a_c} \quad \text{pour} \quad c_i = (vu)_i.$$

L'équation en question donne, d'après cela, la valeur de la différentielle D *aux points de rencontre de la courbe primitive* $^2 = 0$ *avec* $u_x = 0$, si l'on marche d'une ligne u à une ligne voisine $u + du$. Par conséquent, (8) est la condition pour que D et $-\frac{1}{\alpha}\mathrm{D}$ soient en même temps racines de la première équation (9), c'est-à-dire pour qu'entre les racines D_1 et D_2 de cette équation existe la relation

$$\mathrm{D}_2 + \alpha \mathrm{D}_1 = 0,$$

ou, si w_1, w_2 sont les valeurs de l'intégrale $w = \int \mathrm{D}$ aux points de rencontre de u avec $a_x^2 = 0$, pour que l'on ait l'équation

$$w_2 + \alpha w_1 = \mathrm{C}, \tag{10}$$

où C désigne une constante d'intégration.

Actuellement, on peut, comme on sait, représenter les points de la courbe $a_x^2 = 0$ comme fonctions rationnelles du second degré d'un paramètre $z = e^w$, $w = \int \mathrm{D}$ désignant de nouveau l'intégrale logarithmique, c'est-à-dire que nous pouvons, pour un point x de C_2, poser

$$\sigma x_i = \varphi_i(w),$$

les φ_i étant des fonctions simplement périodiques. Si maintenant entre les deux intégrales w_1, w_2 appartenant à deux points x, y de C_2 existe la relation (10), il vient $\sigma y_i = \varphi_i(\mathrm{C} - \alpha w)$, et les coordonnées de la ligne joignant les deux points sont

$$\mu u_1 = \varphi_2(w) \cdot \varphi_3(\mathrm{C} - \alpha w) - \varphi_3(w) \cdot \varphi_2(\mathrm{C} - \alpha w), \ \ldots . \tag{11}$$

Mais ces lignes de jonction enveloppent, en vertu du raisonnement par lequel nous avons déduit les équations (8) des équations (9), les courbes intégrales du connexe (6). *Les équations* (11) *donnent*

donc la représentation paramétrique des courbes intégrales du connexe (6); si l'on élimine entre elles les grandeurs w, on obtient l'équation des courbes intégrales elles-mêmes. On reconnaît immédiatement que ces dernières sont *algébriques* (et alors du genre zéro) si α désigne un nombre *rationnel*, qu'elles sont, au contraire, transcendantes si α est irrationnel. Pour toutes les valeurs de α, la courbe ponctuelle $a_x^2 = 0$ et la ligne double $v_x^2 = 0$ donnent une intégrale particulière de l'équation (8) en coordonnées-points; la courbe tangentielle $(abu)^2 = 0$ et le couple de points $(avu)^2 = 0$, une intégrale particulière en coordonnées-lignes.

IV. On aperçoit immédiatement la connexion qui existe entre ces dernières explications et nos recherches antérieures relatives à la géométrie sur une courbe du troisième ordre (t. II, p. 377 et suiv.), car alors, comme dans le cas actuel, nous avons utilisé les relations entre les couples de points sur une courbe pour déterminer les figures-enveloppes des lignes joignant deux points correspondants (liés par une relation transcendante). Nous avons représenté, dans le cas que nous rappelons, les coordonnées u_i de la tangente comme fonctions elliptiques d'un paramètre, et pour la représentation correspondante sont intervenues dans III, d'une manière analogue, des fonctions simplement périodiques. Or, de même que maintenant une relation entre les valeurs paramétriques de deux points de la conique permet la détermination des courbes intégrales d'un certain connexe, de même nous pouvons aussi employer, dans les courbes du troisième ordre, une relation correspondante pour l'intégration de certaines équations différentielles algébriques. Il y a possibilité de le faire en établissant au préalable l'équation qui fournit les valeurs de la différentielle de première espèce

$$D = \frac{(cx\,dx)}{a_x^2 a_c}$$

aux points de rencontre d'une ligne $u_x = 0$ avec la courbe primitive $a_x^3 = 0$, en supposant que les points $x + dx$ soient situés sur une droite voisine $u + du$, équation qui correspond alors exactement à la première des équations précédentes (9) [1].

---

[1] *Voir*, pour la suite, HARNACK, *Math. Annalen*, t. IX, p. 31 et suiv. et p. 218 et

Pour établir l'équation précitée, nous avons à éliminer les grandeurs x_i et dx_i entre les équations suivantes (*voir* p. 194) :

$$a_x^2 a_c D = (cx dx), \quad a_x^3 = 0, \quad a_x^2 a_{dx} = 0, \quad u_x = 0, \quad (du)_x + u_{dx} = 0.$$

Au moyen de ces dernières équations nous pouvons chasser de la première les dx_i en posant $c_i = (ru)_i$, les r_i étant complètement arbitraires; il vient alors, en vertu de $u_x = 0$,

$$(cx dx) = -r_x (du)_x.$$

Nous pouvons ensuite remplacer la seconde et la troisième équation par une autre formée d'une manière analogue à la première, et dans laquelle seulement les grandeurs arbitraires s_i figurent au lieu de r_i, car précisément les deux équations ne sont équivalentes *que* si $a_x^3 = 0$ et $a_x^2 a_{dx} = 0$. Finalement donc, le problème revient à éliminer les x_i entre les deux équations

$$(12) \qquad \begin{cases} \rho_x^2 \equiv \rho_x'^2 \equiv a_x^2 (aru).D + r_x (du)_x = 0, \\ \sigma_x^2 \equiv \sigma_x'^2 \equiv a_x^2 (asu).D + s_x (du)_x = 0, \end{cases}$$

et entre $u_x = 0$. Le résultat est, comme on sait, donné par l'équation (*voir* t. I, p. 350)

$$(13) \qquad (\rho\rho' u)^2.(\sigma\sigma' u)^2 - (\rho\sigma u)^2.(\rho'\sigma' u)^2 = 0.$$

Toutefois, au lieu de calculer directement, d'après (12), l'expression qui figure dans le premier membre, il est mieux de procéder de la manière suivante. Sur la ligne $u_x = 0$ sont représentées par ses points de rencontre avec les courbes $\rho_x^2 = 0$ et $\sigma_x^2 = 0$ deux formes binaires quadratiques; le résultant de ces dernières doit s'annuler si l'équation (13) a lieu, mais ce résultant se confond avec le discriminant du déterminant fonctionnel des deux formes (t. I, p. 270), et les deux points qui représentent ces dernières sont déterminées sur u_x par les intersections de la jacobienne $(\rho\sigma u)\rho_x\sigma_x = 0$. Si donc le déterminant cité doit être nul, la conique $(\rho\sigma u)\rho_x\sigma_x = 0$ devra être touchée par la ligne $u_x = 0$, ou, en d'autres termes, l'équation (13) est identique à l'équation en

---

suiv. Dans le Mémoire déjà cité du même auteur (*ibid.*, p. 407), on voit, entre autres choses, comment l'équation précédente dérive de celle que nous avons à considérer maintenant si la courbe C_3 se décompose en une conique et en une droite.

coordonnées-lignes de cette dernière conique rapportée aux coordonnées u_i. Or, dans notre cas, on a, d'après (12), Θ étant égal à $(abu)^2 a_x b_x$,

$$(\rho\sigma u)\rho_x\sigma_x = \frac{1}{2}(rsu)[(du)_x^2 + a_x(audu)D + \Theta D^2]$$

$$- u_x\left[\frac{1}{4}(rsdu)(du)_x + \frac{1}{2}a_x(ars)(audu)D\right].$$

Négligeant le facteur (rsu) qui renferme les grandeurs arbitraires r, s, nous avons à former, en vertu de $u_x = 0$, l'équation en coordonnées-lignes de la conique

$$(du)_x^2 + a_x^2(audu)D + \Theta D^2 = 0,$$

et, eu égard aux équations (5) et (6) de la page 280, t. II, celle-ci est donnée par

$$(14) \qquad D^3.F + 3D.\Theta' + 2f' = 0,$$

où Θ', f' sont ce que deviennent Θ, f si l'on pose $x_i = (udu)_i$ et où, par conséquent,

$$\Theta' = (abu)^2(audu)(budu), \quad f' = (audu)^3$$

et

$$F = (abu)^2(ceu)^2(acu)(beu).$$

La circonstance que dans l'équation (14) le coefficient de D^2 doit s'annuler était à prévoir, d'après le théorème d'Abel; car ce coefficient est proportionnel à la somme des trois valeurs de D aux points d'intersection de $a_x^3 = 0$ avec $u_x = 0$ [1].

Actuellement nous serons ramenés de l'équation (14) à notre point de départ par les réflexions suivantes : si l'on suppose entre les racines D_1, D_2, D_3 de cette équation, en outre de l'équation du théorème d'Abel $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, une seconde relation linéaire

$$m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0$$

(dans laquelle les quantités m_i désignent des nombres quelconques rationnels ou irrationnels), ou bien encore, en ayant égard à

---

[1] *Voir* la note 2 de la p. 195.

la première relation, la suivante

$$(15) \qquad D_1 - \rho D_2 = 0 \text{ avec } \rho = -\frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3},$$

en même temps que (14) sera satisfaite la condition

$$\rho^3 D^3 . F + 3\rho D . \Theta' + 2f' = 0;$$

et l'élimination de D entre ces deux équations donne

$$(16) \qquad Ff'^2 + \frac{3\sigma - 2}{\sigma^3}\Theta'^3 = 0, \ \sigma \text{ étant égal à } \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho^2 + \rho + 1}{\rho(\rho + 1)},$$

où l'on peut aussi substituer à ρ les valeurs

$$-\frac{1}{1+\rho} = -\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \quad \text{ou} \quad -\frac{1+\rho}{\rho} = -\frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2},$$

sans changer la valeur de σ. L'équation (16) est l'équation différentielle relative aux courbes de coïncidence principale d'un connexe (6, 6) dont l'intégration est ramené en vertu de (15) à une quadrature, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement par analogie avec l'exemple précédent.

Nous pouvons encore écrire l'équation du connexe (6, 6) sous une forme un peu différente. En effet, sur la ligne $u_x = 0$ se trouve déterminée par $f = 0$ une forme binaire du troisième ordre dont la forme hessienne est déterminée par la conique $\Theta = 0$ et dont le covariant cubique l'est par la courbe

$$Q \equiv (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x = 0$$

(t. II, p. 278 et suiv.). Or, entre la forme binaire primitive f, sa forme hessienne Δ, son invariant R et son covariant Q, existe l'identité (t. I, p. 277)

$$-2Q^2 = Rf^2 + \Delta^3.$$

Entre les formes ternaires f, Θ, F et Q existe donc aussi, en vertu de $u_x = 0$, l'identité

$$(17) \qquad \Theta^3 + Ff^2 = -2Q^2,$$

et par conséquent (16) donne aussi l'équation différentielle des courbes de coïncidence principale pour l'autre connexe

$$(18) \qquad 2\sigma^3 Q^2 + (\sigma^3 - 3\sigma + 2)\Theta^3 = 0.$$

Nous pouvons donc finalement énoncer le théorème suivant :

Les coordonnées des points d'une courbe fondamentale du troisième ordre étant représentées par des fonctions doublement périodiques $\varphi_i(v)$ d'un paramètre v, on obtient la représentation paramétrique des tangentes des courbes de coïncidence principale du connexe (18) en composant avec les coordonnées

$$x_i = \varphi_i(v) \quad \text{et} \quad y_i = \varphi_i(\rho v + c)$$

de deux points de la courbe fondamentale ayant pour arguments v et $\rho v + c$ les coordonnées $u_i = (xy)_i$ de leur ligne de jonction; le connexe correspondant est alors caractérisé par la valeur de ρ $\left[\text{ou de } -(1+\rho), -\frac{1+\rho}{\rho} \text{ et de leurs inverses}\right]$ et la constante d'intégration est donnée par c.

Pour des valeurs générales du module, les courbes de coïncidence principale ne sont *algébriques* que si ρ est un nombre *rationnel*, et, ainsi que nous l'avons vu précédemment (t. II, p. 382), elles sont de la classe $2(m^2 + mn + n^2)$ si $\rho = \frac{m}{n}$, m et n étant des nombres entiers. Elles sont donc, en particulier, *de la sixième classe pour $\rho = 1$, c'est-à-dire pour le connexe* $Q = 0$ [1], et les courbes de coïncidence principale de ce dernier *présentent, à l'égard des systèmes de couples de points de Steiner sur la courbe primitive $f = 0$, la relation exposée ci-dessus* (t. II, p. 381). Toutefois, pour $\rho = 1$, on doit encore tenir compte, comme solution improprement dite, de la condition $F = 0$, car le discriminant de l'équation (14) est en premier lieu égal à

$$F(\Theta^3 + Ff^2) = -2FQ^2.$$

Pour le connexe $\Theta = 0$, il vient en particulier $\rho^2 + \rho + 1 = 0$,

---

[1] Pour ce qui concerne le problème d'élimination qui fournit l'équation de ce système de courbes en coordonnées-points et en coordonnées-lignes, *voir* HARNACK, *loc. cit.*, p. 226 et 233.

et ρ est en conséquence égal à une racine cubique imaginaire de l'unité; *les courbes de coïncidence principale sont donc, en général (c'est-à-dire abstraction faite de valeurs particulières du module), transcendantes.*

Sur toute tangente d'une courbe intégrale du connexe $Q = 0$, le point de contact de cette tangente et ses trois points de rencontre avec $f = 0$ sont situés harmoniquement, et, de plus, le point de contact de la tangente d'une courbe de coïncidence principale de $\Theta = 0$ est équianharmonique par rapport aux points en question de $f = 0$ (t. I, p. 280). On peut, d'une manière tout à fait analogue, caractériser aussi les courbes intégrales d'un connexe quelconque du système (18) par une relation anharmonique. Si, en effet, sur le terrain binaire, un point ayant pour coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ doit former avec les points-racines d'une forme cubique $a_x^3 = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$ le rapport anharmonique α, on a à établir la condition pour que la forme biquadratique correspondante possède le rapport anharmonique α, c'est-à-dire qu'il faut former pour cette dernière forme les invariants i et j. On trouve, pour ces derniers (t. I, p. 375),

$$i = \frac{3}{2}(a_1^2 - a_2 a_0), \quad j = -\frac{3}{8}(2a_1^3 + a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2).$$

Mais les covariants Δ et Q de a_x^3 se changent en ces formes, à part des facteurs numériques, si l'on y fait $x_1 = 1$, $x_2 = 0$; donc, comme nous avons affaire à des relations invariantes, nous devons, d'une manière générale, poser

$$M^2 i = -\frac{3}{4}\Delta, \quad M^3 j = -\frac{3}{8}Q,$$

M désignant une grandeur indéterminée, et la condition cherchée devient [1]

$$\frac{\Delta^3}{Q^2} = -8\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Cette équation est enfin identique à l'équation (18), sous la condition de remplacer Δ par Θ, d'entendre par Q le connexe corres-

---

[1] Cette même équation se déduit de la théorie de la représentation typique des formes binaires. (*Voir* CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen*, p. 351).

pondant à $f=0$, de poser $\alpha=-\rho$ et d'introduire σ au lieu de ρ. Par conséquent,

Les tangentes des six courbes de coïncidence principale du connexe (18), *qui passent par un point quelconque x, coupent en ce point la courbe $f=0$ en trois points qui forment avec x le rapport anharmonique $-\rho$.*

Par ce théorème se trouve caractérisée géométriquement la classe entière des connexes dont les courbes intégrales sont ainsi en connexion simple avec l'intégrale elliptique de première espèce d'une courbe du troisième ordre.

VI. — Le connexe du premier ordre et de la première classe.

Le connexe du premier ordre et de la première classe a seul été étudié jusqu'ici d'une manière approfondie, soit sous le rapport géométrique [où il représente une collinéation (*voir* p. 351)], soit sous celui de la théorie des invariants. Le second ordre d'idées nous donne de nouveaux points de vue pour la théorie des transformations linéaires que nous avons considérée jusqu'ici plutôt géométriquement (t. I, p. 311); nous chercherons, pour cette raison, à mettre surtout en lumière les théories algébriques (¹).

Soit

$$f\equiv a_x u_\alpha \equiv b_x u_\beta \equiv \ldots \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} u_i x_k = 0 \tag{1}$$

l'équation du connexe donné, avec $a_{ik} \gtrless a_{ki}$; la collinéation correspondante (f étant supposé égal à ρu_y) est donnée par les équations

$$\rho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3, \tag{2}$$

ou en coordonnées-lignes (f étant égal à σv_x) par la substitution transposée

$$\sigma u_i = a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + a_{3i} v_3. \tag{3}$$

(¹) *Voir*, pour ce qui suit, spécialement CLEBSCH et GORDAN, *Math. Annalen*, t. I, p. 359 et suiv. Il est démontré, entre autres choses, dans ce travail, que les invariants fonctionnels mentionnés plus loin au texte forment le *système complet* de f.

Si ces équations doivent représenter une collinéation proprement dite, il faut que *leur déterminant* Δ ne soit pas nul; le déterminant est donc en toute hypothèse un invariant du connexe (1, 1). On peut, d'ailleurs, l'exprimer par des invariants moins élevés, car si nous posons

$$i = a_\alpha, \quad i_1 = b_\alpha a_\beta, \quad i_2 = b_\alpha a_\gamma c_\beta,$$

et que nous ayons égard à ce que symboliquement

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ c_3\gamma_1 & c_3\gamma_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (\alpha\beta\gamma),$$

on déduit de là, en permutant de toutes les manières les couples de symboles $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, et prenant le sixième de la somme,

$$(4) \qquad \Delta = \frac{1}{6}(abc)(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = \frac{i^3 + 2i_2 - 3ii_1}{6}.$$

Or tous les autres invariants de f peuvent s'exprimer aussi par les trois invariants du degré moins élevé i, i_1, i_2 qui figurent ici, car le connexe ne dépend que de deux constantes absolues, et ne peut, par suite, admettre que deux invariants absolus, c'est-à-dire trois invariants indépendants les uns des autres. En effet, f peut, en général, être amené à la forme canonique (comp. p. 405)

$$(5) \qquad f = \varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 X_2 U_2 + \varkappa_3 X_3 U_3,$$

dans laquelle sont comprises deux constantes absolues seulement.

Nous allons immédiatement former les trois invariants pour la forme canonique (5); on apercevra en même temps sur cette forme qu'ils sont, en général, indépendants les uns des autres. La méthode la plus simple est d'introduire préalablement les formes mixtes covariantes

$$(6) \qquad \begin{cases} f_1 = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{du_i} = a_x u_\beta b_\alpha, \\ f_2 = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_i} = \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{du_i} = a_x u_\gamma b_\alpha c_\beta; \end{cases}$$

on obtient en effet alors, pour les invariants en question, les lois

de formation non symboliques

$$(7)\qquad i=\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial u_i},\quad i_1=\sum\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i\partial u_i},\quad i_2=\sum\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i\partial u_i}.$$

Mais, dans la forme canonique, il vient d'abord, d'après (5) et (6),

$$(8)\ f_1=\varkappa_1^2 X_1U_1+\varkappa_2^2 X_2U_2+\varkappa_3^2 X_3U_3,\quad f_2=\varkappa_1^3 X_1U_1+\varkappa_2^3 X_2U_2+\varkappa_3^2 X_3U_3,$$

et par suite, d'après (7),

$$(9)\quad i=\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3,\quad i_1=\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+\varkappa_3^2,\quad i_2=\varkappa_1^3+\varkappa_2^3+\varkappa_3^3.$$

Nous connaissons, d'après cela, trois fonctions symétriques des grandeurs $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, et nous pouvons, en conséquence, établir une équation du troisième degré dont ces dernières sont les racines. On trouve, en effet,

$$(10)\quad \varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3\varkappa_1=\frac{i^2-i_1}{2},\quad \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3=\frac{i^3-3ii_1+2i_2}{6}.$$

Pour la détermination de $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, on a conséquemment l'équation

$$(11)\qquad \varkappa^3-\varkappa^2.i+\frac{1}{2}(i^2-i_1)\varkappa-\frac{1}{6}(i^3-3ii_1+2i_2)=0,$$

que nous avons précédemment (t. I, p. 325) trouvée sous la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varkappa & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\varkappa & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varkappa \end{vmatrix}=0.$$

Après que l'on a déterminé $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, on peut aisément établir la transformation qui ramène le connexe f à la forme (5); il suffit, pour préciser, de calculer les produits des quantités X_i, U_i au moyen des trois équations (5) et (8). Si l'on désigne le déterminant de ces trois équations par K, il vient

$$(12)\qquad \begin{cases} K.U_1X_1=(\varkappa_2-\varkappa_3)[(\varkappa_2+\varkappa_3)f-\varkappa_2\varkappa_3u_x-f_1],\\ K.U_2X_2=(\varkappa_3-\varkappa_1)[(\varkappa_3+\varkappa_1)f-\varkappa_3\varkappa_1u_x-f_1],\\ K.U_3X_3=(\varkappa_1-\varkappa_2)[(\varkappa_1+\varkappa_2)f-\varkappa_1\varkappa_2u_x-f_1], \end{cases}$$

avec

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 \\ \varkappa_1^2 & \varkappa_2^2 & \varkappa_3^2 \end{vmatrix} = (\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_1 - \varkappa_2).$$

Les équations (12) déterminent les coefficients de substitution cherchés à l'aide des racines de (11), autant que cela est ici possible et nécessaire, c'est-à-dire en ce sens que tous les coefficients de la même fonction X_i ne se trouvent déterminés que sauf un facteur commun quelconque dont la valeur inverse se présente dans les coefficients de U_i.

Les éléments communs des trois connexes qui interviennent ici $f = 0$, $f_1 = 0$, $u_x = 0$ forment, d'après nos explications générales, un couple de courbes du troisième ordre et de la troisième classe (p. 356) dont la courbe d'ordre et la courbe de classe sont respectivement données par les équations

$$(13) \quad \begin{cases} \varphi \equiv (\alpha\beta x)\, a_x c_x b_\gamma \equiv \sum \pm \dfrac{\partial f}{\partial u_1} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \dfrac{\partial u_x}{\partial u_3} = 0, \\ \psi \equiv (abu)\, u_\alpha u_\gamma b_\gamma \equiv \sum \pm \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \dfrac{\partial u_x}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Il résulte de là pour la forme canonique, si r désigne le déterminant de la substitution (12), lequel doit être ajouté ici à cause des facteurs entre parenthèses $(\alpha\beta x)$ ou (abu),

$$\varphi = r \begin{vmatrix} \varkappa_1 X_1 & \varkappa_2 X_2 & \varkappa_3 X_3 \\ \varkappa_1^2 X_1 & \varkappa_2^2 X_2 & \varkappa_3^2 X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = r.X_1X_2X_3(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_1 - \varkappa_2),$$

et de même

$$\psi = r.U_1U_2U_3(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_1 - \varkappa_2).$$

Chacune des formes cubiques φ, ψ *se décompose donc en trois facteurs linéaires qui représentent respectivement les côtés et les sommets du triangle de base.* La décomposition de ces formes en leurs facteurs (t. II, p. 350) est, par suite, déjà donnée par la transformation (12).

La signification géométrique du connexe $f_1 = 0$ est immédiatement visible sur la forme canonique; *il représente la collinéation*

que l'on obtient par une double application de la collinéation $f = 0$, ce que l'on vérifie sans peine directement. On obtient de même la collinéation du connexe $f_2 = 0$ qui figure dans (6) et (8) par une triple application de la collinéation $f = 0$, et ainsi de suite. D'une manière générale, la collinéation obtenue par l'application $h+1$ fois répétée de la collinéation $f = 0$ est donnée par le connexe

$$(14) \qquad f_h \equiv \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial u_i} \equiv \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_i} = 0.$$

Mais il est à remarquer que toutes les formes f_h qui prennent ainsi naissance peuvent s'exprimer linéairement par les formes f, f_1 et u_x. En effet, toutes les collinéations $f_h = 0$ se réfèrent au même triangle de base, mais, comme toutes les collinéations répondant au même triangle de base ne forment qu'un système doublement infini, elles doivent nécessairement être représentables sous la forme

$$f + \varkappa f_1 + \lambda u_x = 0.$$

Pour confirmer ce résultat par le calcul, le mieux est d'avoir recours à une autre forme mixte

$$(15) \qquad g = (abu)(\alpha\beta x),$$

laquelle, égalée à zéro, représente, comme nous le savons déjà, le connexe conjugué de $f = 0$ (p. 369); nous reviendrons, d'ailleurs, incessamment sur son interprétation géométrique. *Cette forme* g *est également exprimable par* f, f_1 *et* u_x, car nous avons directement

$$(16) \quad g \equiv (abu)(\alpha\beta x) = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_x \\ b_\alpha & b_\beta & b_x \\ u_\alpha & u_\beta & u_x \end{vmatrix} \equiv (i^2 - i_1)u_x - 2if + 2f_1.$$

On a ensuite

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = (abu)(\alpha\beta\gamma)c_x = \frac{1}{3}(\alpha\beta\gamma)[(abu)c_x - (acu)b_x - (cbu)a_x]$$

$$= \frac{1}{3}(\alpha\beta\gamma)(abc)u_x;$$

et si l'on établit la même forme au moyen du second membre de

(16), on obtient, pour f_2, eu égard à (4), l'identité

$$\frac{1}{3}(i^3 + 2i_2 - 3ii_1)u_x = (i^2 - i_1)f - 2if_1 + 2f_2.$$

On trouve également, par répétition du même procédé,

$$\frac{1}{3}(i^3 + 2i_2 - 3ii_1)f = (i^2 - i_1)f_1 - 2if_2 + 2f_3,$$

$$\frac{1}{3}(i^3 + 2i_2 - 3ii_1)f_1 = (i^2 - i_1)f_2 - 2if_3 + 2f_4,$$

et ainsi de suite, ce qui permet de calculer chaque forme f_h en fonction de toutes les formes précédentes.

A côté de la série de connexes $f_h = 0$ se place une série de connexes $g_h = 0$ qui se forment de g comme f_h de f, en sorte que

$$g_{h+1} = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g_h}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g_h}{\partial x_i}.$$

Leur sens géométrique est de même facile à reconnaître. *En premier lieu, le connexe $g = 0$ donne la transformation inverse de* $f = 0$, transformation qui, rapportée au même triangle de base, apparaît sous la forme $\sigma Y_1 = x_2 x_3 X_1, \ldots$. En effet, dans le cas de la forme canonique, on tire de l'identité (16), en vertu de (8), (9) et (10), la valeur de g

$$\frac{1}{2}g = x_2 x_3 U_1 X_1 + x_3 x_1 U_2 X_2 + x_1 x_2 U_3 X_3,$$

et l'on déduit ensuite de là

$$\frac{1}{2}g_h = (x_2 x_3)^{h+1} U_1 X_1 + (x_3 x_1)^{h+1} U_2 X_2 + (x_1 x_2)^{h+1} U_3 X_3.$$

Les connexes $g_h = 0$ représentent donc respectivement les transformations inverses des transformations $f_h = 0$.

Au moyen d'un point x, nous obtenons, par toutes ces collinéations, une série de points séparés qui peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens. En désignant le point x lui-même par le nombre 0, nous pouvons distinguer les points de la série d'avant par les nombres 1, 2, 3, ..., ceux de la série d'arrière par les nombres $-1, -2, -3, \ldots$, en sorte qu'à chacun d'eux corres-

ponde l'équation écrite au-dessous :

$$(17)\quad \begin{cases} \ldots(-2), & (-1), & 0, & 1, & 2, & \ldots, \\ \ldots g_1 = 0, & g = 0, & u_x = 0, & f = 0, & f_1 = 0, & \ldots, \end{cases}$$

et le point λ a alors, sous la forme canonique, l'équation

$$(18)\qquad x_1^\lambda U_1 X_1 + x_2^\lambda U_2 X_2 + x_3^\lambda U_3 X_3 = 0.$$

Mais toute équation semblable est en même temps l'équation d'un système collinéaire qui conduit immédiatement du point o au point λ. Ainsi donc à la série de points (17) correspond la série (18) de systèmes collinéaires.

Il y a un intérêt particulier pour nous dans cette circonstance *que tous les points de la série sont situés sur une courbe (en général transcendante) que l'on obtient par élimination de* ρ *et* λ *entre les équations*

$$(18)^*\qquad \rho Y_1 = x_1^\lambda X_1, \quad \rho Y_2 = x_2^\lambda X_2, \quad \rho Y_3 = x_3^\lambda X_3,$$

savoir :

$$(19)\qquad \log\frac{Y_1}{X_1}\cdot\log\frac{x_2}{x_3} + \log\frac{Y_2}{X_2}\cdot\log\frac{x_3}{x_1} + \log\frac{Y_3}{X_3}\cdot\log\frac{x_1}{x_2} = 0,$$

ou, si nous entendons par C un paramètre (constante d'intégration), et que nous posions $k_1 = \log\frac{x_2}{x_3}$, $k_2 = \log\frac{x_3}{x_1}$, $k_3 = \log\frac{x_1}{x_2}$,

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3} = C,$$

avec $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Cette équation est de la même forme que celle des courbes de coïncidence principale de $f = 0$ (p. 405)

$$(20)\qquad X_1^{x_2 - x_3} X_2^{x_3 - x_1} X_3^{x_1 - x_2} = C.$$

Ainsi, au connexe $f = 0$ *et en même temps à tous les connexes* $f_h = 0$ *ou* $g_h = 0$, *c'est-à-dire à tous les connexes du système représenté par* (18) *correspond un certain connexe*

$$U_1 X_1 \log x_1 + U_2 X_2 \log x_2 + U_3 X_3 \log x_3 = 0,$$

dont les courbes de coïncidence principale fournissent les courbes (19) *sur lesquelles sont situés tous les points de l'une des séries précédentes.*

Les courbes (19) sont d'une nature tout aussi générale que les courbes (20) et réciproquement, mais les premières se prêtent mieux, ainsi que nous le verrons par la suite, à l'étude des courbes de coïncidence principale, parce que des propriétés importantes résultent directement du mode de déduction de l'équation (19).

Les courbes (19) sont, en particulier, algébriques si les grandeurs $\log \frac{\varkappa_i}{\varkappa_k}$ sont entre elles comme des nombres entiers positifs ou négatifs. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on peut se poser la question de savoir dans quelles circonstances certains points de la série sont situés sur une courbe *algébrique*. Par cette condition, on sera conduit, pour le connexe $f = 0$, à une relation invariante que nous expliquerons ici sur quelques exemples [1].

On ne peut pas, en général, demander que les points 0, 1, 2 soient situés sur une droite, car alors tous les points de la série provenant de 0 seraient situés sur cette même droite. En effet, dans cette hypothèse, le déterminant ci-dessus désigné par K devrait s'annuler, et l'équation (11) avoir, en conséquence, deux racines égales, ce que nous avons exclu provisoirement.

Si, au contraire, les points 0, 1, 3 doivent être, en ligne droite, on aura l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^3 \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^3 \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est évidemment divisible par le déterminant K; le facteur restant est linéaire et symétrique en $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, et, par suite, proportionnel à la somme $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$. *La condition pour que les points* 0, 1, 3 *soient en ligne droite est, par conséquent,*

$$(21) \qquad i \equiv \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0 \quad [2].$$

---

[1] Pour une étude générale du problème qui se présente ici, *voir* CLEBSCH et GORDAN, *loc. cit.*

[2] Si l'on introduit la notion des connexes polaires (c'est-à-dire des connexes de la forme $a_x^{m-\varkappa} a_y^{\varkappa} u_\alpha^{n-\lambda} v_\alpha^{\lambda} = 0$), on peut aussi, à l'aide de cette relation invariante, donner une interprétation à des formations algébriques dont le sens géométrique n'est pas immédiatement fourni par la théorie des polaires des courbes ou par le principe de translation (t. II, p. 16); toutefois cela est pratiquement de peu

Naturellement, le $r^{\text{ième}}$, le $(r+1)^{\text{ième}}$ et le $(r+3)^{\text{ième}}$ point sont aussi en ligne droite, r désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif. On trouve semblablement, si les points 0, 1, 4 doivent être en ligne droite, la relation invariante

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 \equiv \frac{1}{2}(i^2 + i_1) = 0,$$

et ainsi de suite.

Si l'on demande que les points 0, 1, 2, 3, 4, 5 soient situés sur une conique, *tous* les points de la série qui a zéro pour point de départ seront également sur la même conique, c'est-à-dire que, dans ce cas, les courbes (19) se composeront d'un système de coniques, et la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\begin{array}{llll} & k_1 = k_2 = 1, & k_3 = -2, & \text{d'où} \quad x_1x_2 - x_3^2 = 0, \\ \text{ou} & k_2 = k_3 = 1, & k_1 = -2, & \quad » \quad x_2x_3 - x_1^2 = 0, \\ » & k_3 = k_1 = 1, & k_2 = -2, & \quad » \quad x_3x_1 - x_2^2 = 0. \end{array}$$

La relation invariante correspondante exige, par conséquent, l'évanouissement de l'expression

$$\begin{aligned} &(x_2x_3 - x_1^2)(x_3x_1 - x_2^2)(x_1x_2 - x_3^2) \\ &\quad = (x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3 x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

d'où, en vertu de (9) et (10), la conséquence suivante : *Les courbes* (19) *se composent d'un faisceau de coniques de la forme*

$$x_ix_k - Cx_l^2 = 0$$

lorsque [1]

$$3(i^2 - i_1)^3 - i^3(i^3 - 3ii_1 + 2i_2) = 0. \tag{22}$$

Les *courbes de coïncidence principale* de $f = 0$ restent toutefois, en général, transcendantes dans ce cas. *Si, au contraire, ces dernières doivent se composer de coniques, on doit avoir*

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)(x_3 + x_1 - 2x_2) = 0,$$

---

d'utilité, et nous ne nous en occuperons pas davantage. On peut toujours, par exemple, trouver ainsi la signification des invariants simultanés de deux coniques (t. I, p. 368).

[1] Ce cas de la collinéation présente un intérêt particulier pour la Géométrie non euclidienne. (*Voir* le Mémoire de KLEIN, cité t. I, p. 188. *Math. Annalen*, t. IV).

ou

$$(23) \qquad 2i^3 - 9ii_1 + i_2 = 0.$$

Parmi les courbes comprises dans (19), nous devons mentionner particulièrement la *spirale logarithmique;* sa présence ne provient pas d'une propriété invariante du connexe, mais d'une situation particulière, au point de vue métrique, de deux sommets du triangle de base; relativement à la Géométrie projective, elle peut donc être considérée comme type des courbes intégrales générales du connexe (1, 1). Qu'on fasse, en effet, coïncider deux sommets du triangle de base avec les points circulaires imaginaires [1], qu'on introduise ensuite des coordonnées polaires au moyen de la substitution

$$X_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad X_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi), \quad X_3 = 1,$$

et qu'on pose enfin $k_1 = p + iq$, $k_2 = -p + iq$, l'équation des courbes (19) devient

$$r^{2iq} e^{2\varphi p i} = C,$$

ou, γ et ρ désignant de nouvelles constantes,

$$r = \gamma e^{\rho\varphi},$$

ce qui est, en effet, l'équation d'un système de spirales logarithmiques ayant pour paramètre la quantité γ.

Actuellement nous serons conduits à des points de vue très féconds pour l'étude des systèmes de courbes (19) et (20) si, au lieu d'assigner au paramètre λ dans le système de connexes (18) des valeurs entières, nous le considérons comme un paramètre variant *d'une façon continue*. Même alors, le connexe (18) représente une collinéation, bien que cette dernière ne soit pas toujours telle qu'elle puisse être engendrée en réitérant un nombre fini de fois la transformation $f = 0$ ou $g = 0$. Pour le système des connexes (18) ou des transformations (18)*, les deux théorèmes suivants continuent à être exacts :

Deux transformations quelconques du système donnent, em-

---

[1] Tous les angles sont alors conservés dans la transformation; on a une *transformation de similitude*. Eu égard à cette circonstance, on obtient facilement, à l'aide des raisonnements développés plus loin, les nombreuses propriétés métriques de la spirale logarithmique. (*Voir* HOLZMÜLLER, *Schlömilch's Zeitchrift*, t. XVI.)

ployées successivement, la même transformation nouvelle indépendamment de l'ordre de succession.

Cette nouvelle transformation est elle-même une transformation du système.

Eu égard à la première propriété, les transformations du système seront appelées *permutables;* eu égard à la seconde, le système sera dit être un système *fermé*. Nous avons ainsi affaire à un *système fermé de transformations linéaires permutables, en nombre simplement infini* [1]. Et ce sont les seules transformations de cette espèce qu'il y ait; en effet, leur recherche directe conduit à une équation différentielle (24) que nous établirons incessamment et dont l'intégration donne uniquement les transformations (18)*.

Dans le système est en particulier comprise une transformation qui prend naissance lorsqu'on suppose λ infiniment petit, égal ainsi à $d\lambda$, transformation que nous désignerons sous l'appellation de transformation *infiniment petite* du système. Elle associe à chaque point X un point voisin $Y = X + dX$ qui est déterminé, d'après (18)*, par les équations

$$\sigma dX_i = X_i . \log \varkappa_i, \tag{24}$$

la quantité $d\lambda$ étant supposée comprise dans σ. Pour cette transformation la direction qui correspond à X dans la coïncidence principale coïncide évidemment avec la tangente de la courbe (19) qui passe par X. Le connexe déduit de (18) pour $\lambda = d\lambda$ est donc *celui dont les courbes de coïncidence principale sont données par les courbes* (19); en effet, l'équation de ce dernier est encore $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$.

Il est évident qu'on peut engendrer toute transformation du système en répétant un nombre infini de fois cette transformation infiniment petite. Tous les points qui correspondent à un point X décrivent alors une courbe déterminée; cette courbe a, d'après son origine, la propriété que chacun de ses points se change par une trans-

---

[1] *Voir*, pour ce qui suit, KLEIN et LIE, *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 et 13 juin 1870), et *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen* (*Math. Annalen*, t. IV).

formation (24) en un autre de ses points (infiniment voisin). Donc, même lorsqu'on répète un nombre infini de fois la transformation infiniment petite, le point X reste toujours sur la même courbe, c'est-à-dire que cette dernière se transforme en elle-même par chaque transformation de notre système. Son équation s'obtient conséquemment en éliminant λ entre les équations $(18)^*$, c'est-à-dire qu'elle est donnée par (19), ainsi qu'on le vérifie aussi par intégration de l'équation différentielle (24).

Toute courbe intégrale d'un connexe (1, 1) *a donc la propriété de se changer en elle-même par un système fermé d'un nombre simplement infini de transformations linéaires permutables, et, pour préciser, par les transformations* $\rho Y_i = \varkappa_i^\lambda X_i$ si le connexe est donné sous la forme $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$ (¹).

De cette propriété peuvent se déduire avec facilité un grand nombre d'autres. Nous pouvons expliquer, sur un exemple, le mode de raisonnement simple qu'on emploie en cette circonstance. Imaginons qu'on donne plusieurs courbes appartenant à un même système (20), et qu'une tangente soit menée à l'une d'elles. Dans l'application des transformations linéaires correspondantes, les courbes elles-mêmes restent invariables, tandis que la tangente prend successivement la position de toute autre tangente de la même courbe. Le point où il y a contact avec l'une des courbes et les points d'intersection avec les autres deviennent respectivement le point de contact et les points de rencontre de la nouvelle tangente avec ces mêmes courbes; d'où ce théorème que *les points*

(¹) D'après un théorème connu de Cinématique, ces courbes consistent en cercles si la transformation est équivalente à un mouvement du plan sur lui-même. En effet, deux sommets du triangle de base sont alors situés aux points circulaires et le troisième d'une façon quelconque dans le plan; ce dernier sommet reste donc fixe, et par conséquent le mouvement doit être remplacé par une rotation autour de lui. Cette rotation devient en particulier une translation si le centre de rotation est situé à distance infinie. Les nombreuses recherches relatives à la Géométrie cinématique sont ainsi liées aux recherches relatives aux transformations considérées au texte, et peuvent en conséquence être susceptibles d'une généralisation projective immédiate si l'on remplace constamment la collinéation spéciale du mouvement par une collinéation générale. [*Voir* sur ce sujet Burmester, *Kinematisch geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und collinear veränderlicher Systeme* (*Schlömilch's Zeitschrift*, t. XIX et XX); *voir* aussi la note de la p. 326, t. I]. Les courbes (19) sont appelées par Burmester *Selbsthüllcurven* (courbes qui sont leurs propres enveloppes).

d'intersection forment avec le point de contact une série qui, pour des positions quelconques de la tangente à la même courbe, est toujours projective à la même série. — Il en résulte comme corollaire, eu égard à ce que les trois côtés du triangle de base doivent toujours être considérés comme courbes du système, la proposition suivante : *Le rapport anharmonique du point de contact d'une tangente d'une courbe* (20) *et de ses trois points de rencontre avec les côtés du triangle de base est constant.* On pourrait aussi réciproquement faire usage de la propriété énoncée ici pour définir le système.

Par un procédé analogue on obtient aisément les théorèmes suivants, dont l'énoncé suffira pour montrer la fécondité de la méthode mentionnée plus haut et applicable dans un grand nombre de circonstances (1) :

Que l'on coupe une courbe du système par une ligne droite et que l'on construise les tangentes en n quelconques des points de rencontre, parmi les autres intersections de ces n tangentes, n sont toujours en ligne droite.

Les courbes du système ne peuvent se couper qu'aux sommets du triangle de base.

Elles ne possèdent en aucun de leurs points, si ce n'est aux trois points fondamentaux, de singularités du genre de celles qu'on rencontre dans les courbes algébriques.

Toute courbe covariante par rapport à elles est une courbe du même système (car elle doit se changer en elle-même par les mêmes transformations).

Si l'on applique les transformations de notre système fermé à une courbe quelconque, assujettie uniquement à ne pas appartenir à un système de courbes (20) *ayant le même triangle de base, la courbe enveloppe de la série de courbes ainsi engendrée se compose uniquement de courbes du système donné.*

Nous allons indiquer brièvement dans ce qui suit les cas d'exception qui se présentent par suite de ce que deux ou trois

---

(1) *Voir*, pour plus de détails, KLEIN et LIE, *loc. cit.*

racines de l'équation du troisième degré (11) deviennent égales entre elles [1].

I. Soit $\varkappa_2 = \varkappa_3$; deux des côtés du triangle de base se confondent tandis que le troisième ($X_1 = 0$) en reste distinct. En toute hypothèse on peut avoir, pour la collinéation, la forme canonique

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho Y_1 = \varkappa_1 X_1, \quad \rho Y_2 = \varkappa_2 X_2, \\ \rho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3. \end{array}\right.$$

Mais si l'on met l'équation cubique en question sous la forme

$$\left|\begin{array}{ccc} \varkappa_1 - \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 - \varkappa & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma - \varkappa \end{array}\right| = 0,$$

on reconnaît qu'on doit avoir $\gamma = \varkappa_2$. Actuellement, si l'on substitue

$$Y_3 + \frac{\alpha}{\varkappa_1 - \varkappa_2} Y_1 \text{ à } Y_3 \quad \text{et} \quad X_3 + \frac{\alpha}{\varkappa_1 - \varkappa_2} X_1 \text{ à } X_3,$$

les équations (25) se transforment en

$$(26)\qquad \rho Y_1 = \varkappa_1 X_1, \quad \rho Y_2 = \varkappa_2 X_2, \quad \rho Y_3 = \beta X_2 + \varkappa_2 X_3,$$

et *le connexe $f = 0$ apparaît sous la forme canonique*

$$f = \varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + \beta X_2 U_3.$$

Deux sommets du triangle de base sont ici réunis au point $U_3 = 0$; le point $U_1 = 0$ est, d'autre part, le point de rencontre des côtés du triangle infiniment voisin l'un de l'autre.

En répétant λ fois la transformation, on obtient, à la place de $(18)^*$, les équations

$$(27)\qquad \rho Y_1 = \varkappa_1^\lambda X_1, \quad \rho Y_2 = \varkappa_2^\lambda X_2, \quad \rho Y_3 = \varkappa_2^\lambda X_3 + \lambda\beta\varkappa_2^{\lambda-1} X_2,$$

---

[1] *Voir* Clebsch et Gordan, *loc. cit.*, ainsi que la discussion géométrique de ces cas dans Hirst, Mémoires cités, p. 360. Ces cas particuliers peuvent aussi être abordés, d'après la méthode appliquée par Weierstrass, aux formes bilinéaires renfermant un nombre quelconque de variables : *Monatsberichte der Berliner Academie*, 1858 et 1868.

et, en éliminant λ, on trouve, à la place de (19), l'équation

$$\varkappa_2(Y_3X_2 - Y_2X_3)\log\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} - \left(\log\frac{Y_1}{X_1} - \log\frac{Y_2}{X_2}\right)\beta Y_2X_2 = 0.$$

Pour $Y_2 = X_2 = 1$, $X_1 = x$, $X_3 = y$, on obtient donc en particulier *la logarithmique* $y = A\log Bx$, A, B désignant des constantes.

On trouve, d'autre part, l'équation des courbes de coïncidence principale de $f = 0$ sous la forme

$$(\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{x_3}{x_2} + \beta\log\frac{x_2}{x_1} = C.$$

II. Dans le cas où l'on a, en outre, $\beta = 0$, les équations (26) donnent

$$Y_1X_2 - Y_2X_1 = 0;$$

nous avons une *transformation perspective*, cas déjà traité par nous d'une manière approfondie (t. I, p. 328). On peut caractériser algébriquement cette transformation par la circonstance que les formes φ et ψ sont identiquement nulles. Toutes les courbes (28) se composent de droites passant par le centre de collinéation.

III. Si les trois racines de l'équation du troisième degré sont toutes égales entre elles, on ne peut plus prendre, pour la collinéation correspondante, qu'une *seule* équation sous la forme

$$\rho Y_1 = \varkappa X_1; \tag{28}$$

les deux autres se présentent d'abord ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \rho Y_2 &= aX_1 + (b+\varkappa)X_2 + cX_3,\\ \rho Y_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 + (\gamma+\varkappa)X_3. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Actuellement, pour que l'équation du troisième degré en z

$$\begin{vmatrix} \varkappa - z & 0 & 0 \\ a & b + \varkappa - z & c \\ \alpha & \beta & \gamma + \varkappa - z \end{vmatrix} = 0$$

admette trois fois la racine $z = \varkappa$, il faut que l'on ait

$$b + \gamma = 0, \quad b\gamma - c\beta = 0. \tag{30}$$

Ces équations sont satisfaites identiquement si l'on pose

$$c = \mu^2, \quad \beta = -\nu^2, \quad b = \mu\nu, \quad \gamma = -\mu\nu,$$

et les équations (29) se transforment par là en

$$\rho Y_2 = a X_1 + \varkappa X_2 + \mu(\nu X_2 + \mu X_3),$$
$$\rho Y_3 = \alpha X_1 + \varkappa X_3 - \nu(\nu X_2 + \mu X_3).$$

Or on en déduit

$$\rho(\nu Y_2 + \mu Y_3) = (a\nu + \alpha\mu) X_1 + \varkappa(\nu X_2 + \mu X_3).$$

Si donc on substitue encore Y_2 à $\nu Y_2 + \mu Y_3$ et X_2 à $\nu X_2 + \mu X_3$, on obtient une équation de la forme

$$(31) \qquad \rho Y_2 = a X_1 + \varkappa X_2,$$

qui peut toujours être déduite des équations (29). On peut donc admettre que l'une des équations (29) ait déjà la forme (31), c'est-à-dire que $b = c = 0$. Les équations (30) donnent alors $\gamma = 0$, tandis que β reste quelconque. La troisième équation (29) devient, en conséquence,

$$(32) \qquad \rho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \varkappa X_3.$$

Si l'on change encore Y_3 et X_3 en leur substituant respectivement $Y_3 - \frac{\alpha}{a} Y_2$, $X_3 - \frac{\alpha}{a} X_2$, le terme en X_3 disparaît dans (32), et il reste

$$(33) \qquad \rho Y_3 = \beta X_2 + \varkappa X_3,$$

où l'on peut encore, sans détruire la généralité, poser $\beta = a$.

Au moyen de (28), (31), (33), on trouve donc *l'équation du connexe sous la forme canonique*

$$(33)^* \quad f \equiv \varkappa(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + a(X_1 U_2 + X_2 U_3) = 0.$$

Pour les courbes de coïncidence principale, on a ici simplement, en vertu de $U_X = 0$, l'équation différentielle

$$X_1(X_3 dX_1 - X_1 dX_3) + X_2(X_1 dX_2 - X_2 dX_1) = 0,$$

d'où résulte par intégration, la constante d'intégration étant dé-

signée par C,

$$CX_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_3 = 0.$$

Les courbes intégrales forment un faisceau de coniques qui ont toutes entre elles au même point un contact du troisième ordre (comp. t. I, p. 175), et le point de contact est le point $U_3 = 0$, dans lequel sont réunis les sommets du triangle; la tangente commune en ce point est à compter trois fois comme côté du triangle.

On obtient un pareil système de coniques pour les courbes qui sont transformées en elles-mêmes par la collinéation (33)*. En effet, on trouve, en répétant λ fois la transformation, les formules

$$\rho Y_1 = \varkappa^\lambda X_1, \quad \rho Y_2 = \varkappa^\lambda X_2 + a\varkappa^{\lambda-1} X_1,$$

$$\rho Y_3 = \varkappa^\lambda X_3 + a\varkappa^{\lambda-1} X_2 + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)a^2\varkappa^{\lambda-2} X_1,$$

ou, en divisant dans les deux membres par $\varkappa^{\lambda-2}$,

$$\rho Y_1 = \varkappa^2 X_1, \quad \rho Y_2 = \varkappa^2 X_2 + \lambda a\varkappa X_1,$$

$$\rho Y_3 = \varkappa^2 X_3 + \lambda a\varkappa X_2 + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)a^2 X_1.$$

Mais ces équations représentent précisément les coordonnées des points Y d'une courbe de la nature dont il s'agit exprimées en fonction d'un paramètre $\varkappa$.

IV. Dans les équations (31) et (33), une des constantes α, β peut encore être nulle. Supposons $\beta = 0$; nous avons la collinéation

$$(34) \qquad \rho Y_1 = \varkappa X_1, \quad \rho Y_2 = \varkappa X_2 + a X_1, \quad \rho Y_3 = \varkappa X_3.$$

Il en résulte $Y_1X_3 - X_1Y_3 = 0$; les deux systèmes de points Y et X sont donc perspectifs, le centre de collinéation est situé au point $X_1 = 0$, $X_3 = 0$; l'axe de collinéation [1] passe par ce point. Les courbes considérées plus haut sont les droites du faisceau $X_1 + \lambda X_3 = 0$.

---

[1] Si cet axe est la droite de l'infini, on a le cas de la translation (*voir* la note de la p. 428).

V. Si enfin, dans (31), (33), α et β sont nuls simultanément, on a des systèmes de points identiques dont les points correspondants coïncident toujours.

VII. — Sur les connexes $(m, 1)$ ou $(1, n)$, particulièrement dans le cas de $n = 2$.

Quelques-unes de nos recherches générales sur les connexes (m, n) demandent une étude spéciale si l'un des nombres m, n devient égal à 1. Déjà, à propos du connexe conjugué, nous avons eu occasion de faire cette remarque (p. 368); un élément (y, v) de ce dernier a été défini pour $n = 1$ par la circonstance que v est tangente commune de *toutes* les courbes C_m qui répondent aux lignes u passant par y, et réciproquement pour $m = 1$, par le fait que y est un point commun à *toutes* les courbes K_n qui répondent aux points x de v dans le connexe $f = 0$. Pour le cas de $m = 1$, auquel nous nous bornons dans ce qui suit, se présente d'ailleurs cette particularité que les courbes désignées plus haut par $F' = 0$, $\Phi' = 0$ n'existent pas; car, puisqu'une ligne quelconque u forme exclusivement avec un *seul* de ses points un élément de la coïncidence principale, il ne peut plus être question du fait que deux semblables points de u se confondent. Par contre, se présentent ici, en général, des lignes u qui forment avec *chacun* de leurs points un élément de coïncidence principale, circonstance qui, pour $n > 1$, $m > 1$, ne peut se présenter que dans des cas particuliers et à titre de singularité (comp. p. 352). Pour $m = 1$, nous pouvons, en effet, poser

$$f = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des fonctions de la $n^{\text{ième}}$ classe par rapport aux u_i. Ici la ligne u est caractérisée de la manière indiquée, dès que l'équation $f = 0$ est satisfaite pour $x_i = (uv)_i$ indépendamment des quantités v_i, c'est-à-dire lorsque l'on a simultanément

$$A_1 u_2 - A_2 u_1 = 0, \quad A_2 u_3 - A_3 u_2 = 0, \quad A_3 u_1 - A_1 u_3 = 0.$$

Ces équations admettent, d'après des règles connues (t. II, p. 113),

$n^2 + n + 1$ solutions communes, et nous avons, par conséquent, ce théorème :

Dans un connexe $(1, n)$, *il existe* $n^2 + n + 1$ *droites qui forment chacune avec tous ses points des éléments de coïncidence principale.* Nous les appellerons *rayons fondamentaux* du connexe ou de sa coïncidence principale.

Évidemment aussi, l'équation différentielle des courbes de coïncidence principale qui dérive de $f = 0$ pour $x_i = (udu)_i$ est satisfaite par chacun de ces rayons fondamentaux indépendamment des différentielles du_i. *Les* $n^2 + n + 1$ *rayons fondamentaux d'un connexe* $(1, n)$ *font donc partie du système de courbes intégrales de la coïncidence principale* (¹).

Les rayons fondamentaux présentent, d'ailleurs, une connexion particulière avec les courbes $F = 0$, $\Phi = 0$ considérées plus haut et qui sont liées entre elles par une relation à détermination unique (p. 392). La détermination donnée précédemment des singularités de ces courbes subsiste encore pour $m = 1$. Donc F *est de l'ordre* $(n-1)(n+2)$; *le nombre des points doubles de* F *est égal à*

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)[(n+2)^2 + 3n],$$

le nombre des rebroussements egal à

$$3(n-2)(2n+1),$$

et l'on trouve en conséquence, *pour le genre de* F, *le nombre*

$$\frac{1}{2}n(7n-11).$$

Il résulte de là que la classe de F est égale à $3n^2$, le nombre des points d'inflexion égal à $12n(n-1)$, celui des tangentes doubles égal à $\frac{1}{2}(9n^4 - 40n^2 + 35n + 2)$.

(¹) Il faut évidemment attribuer à ces rayons fondamentaux le même rôle par rapport aux courbes intégrales que celui qui appartient aux ombilics d'une surface par rapport à ses lignes de courbure.

La courbe Φ *est, d'autre part, de la classe* $3n$; son genre concorde avec celui de F; *le nombre de ses tangentes doubles* se trouve donc égal à

$$\frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)-\frac{1}{2}n(7n-11)=n^2+n+1,$$

car il n'y aura pas, en général, de tangentes d'inflexion.

Nous verrons que ces tangentes doubles sont précisément les rayons fondamentaux de notre connexe $(1, n)$.

Dans le cas actuel, nous pouvons aisément établir directement l'équation de la courbe $\Phi = 0$. Nous partirons, dans ce but, du réseau tangentiel de courbes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ classe (p. 389)

$$(1) \qquad U_v \equiv (auv)\,u_\alpha^n \equiv \Sigma A_i (uv)_i = 0.$$

Chacune des courbes qui en font partie touche les n^2+n+1 rayons fondamentaux et en outre la ligne v à laquelle elle correspond, et le point de contact y de v est le point qui répond à v dans la coïncidence principale. De tout point de v on peut, en dehors de la droite v elle-même, mener encore n autres tangentes à la courbe $U_v = 0$, et ce sont là les n rayons de la coïncidence principale qui répondent au point considéré de v; mais, pour le point y lui-même, l'un de ces rayons coïncide avec la ligne v. Maintenant, si v est une tangente de la courbe $\Phi = 0$, y est un point de $F = 0$, et un autre des n rayons de la coïncidence principale issus de y (c'est-à-dire des tangentes de $U_v = 0$) se confond avec la ligne v; en d'autres termes, v devient tangente de rebroussement de la courbe $U_v = 0$. La condition pour cela est que v touche en même temps la hessienne de $U_v = 0$. Soit donc $U_v = u_\pi^{n+1}$; l'équation de la courbe $\Phi = 0$ est donnée par

$$(\pi\pi'\pi'')^2\, u_\pi^{n-1}\, u_{\pi'}^{n-1}\, u_{\pi''}^{n-1} = 0,$$

si l'on fait $u = v$. Le premier membre de cette équation est du degré $3n$ par rapport aux u_i et du troisième degré par rapport aux coefficients de f. Si l'on essaye de former symboliquement un contrevariant de cette espèce, on n'a le choix qu'entre les trois formes

$$(abc)\,u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n, \quad (abu)\,c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n, \quad a_\alpha u_\alpha^{n-1}(bcu)\,u_\beta^n u_\gamma^n.$$

La première d'entre elles s'évanouit identiquement, parce qu'elle

change de signe par permutation de b, β et c, γ; la même chose a lieu pour la dernière (qui, en outre, se décompose en deux facteurs séparés); *l'équation de la courbe* $\Phi = 0$ *est donc*

$$(2) \qquad \Phi \equiv (abu) c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n = 0.$$

Si u est un rayon fondamental du connexe, les grandeurs $(bu)_i u_\beta^n$ s'évanouissent, et, par conséquent, Φ lui-même est nul. Mais les dérivées de Φ s'annulent aussi, car on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = (ab)_i c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n$$
$$+ (abu) c_\alpha u_\alpha^{n-2} u_\beta^{n-1} u_\gamma^{n-1} [(n-1)\alpha_i u_\beta u_\gamma + n u_\alpha (u_\beta \gamma_i + u_\gamma \beta_i)].$$

Dans le second membre, le second et le troisième terme s'évanouissent à cause des facteurs $(abu) u_\beta^n$; le quatrième est égal à

$$u^n \beta_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} [(acu) b_\alpha + (cbu) a_\alpha + (abc) u_\alpha];$$

il est donc encore nul. Enfin le premier terme est égal à

$$\frac{1}{2} (ab)_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^n (c_\alpha u_\beta - c_\beta u_\alpha) = \frac{1}{2} (ab)_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^n (cuw),$$

si $w_i = (\alpha\beta)_i$; il s'annule donc aussi à cause des facteurs $(cuw) u_\gamma^n$. Nous avons ainsi cette proposition :

Les $n^2 + n + 1$ *rayons fondamentaux d'un connexe* $(1, n)$ *sont les tangentes doubles de la courbe correspondante* $\Phi = 0$, *et cette dernière n'a, en général, pas d'autres tangentes singulières.*

Les mêmes rayons fondamentaux sont aussi des tangentes doubles de la courbe $F = 0$, ainsi qu'il résulte de l'étude attentive des systèmes de courbes représentés par $U_\nu = 0$ et

$$(3) \qquad X_y \equiv a_x (\alpha x y)^n = 0 \text{ [1]}.$$

Nous insisterons d'abord sur le réseau tangentiel de courbes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ classe $U_\nu = 0$. Une courbe de ce réseau est, en général,

---

[1] L'étude de ses systèmes a été donnée par l'auteur (M. Lindemann) dans l'édition allemande du présent Ouvrage. Plus tard, M. Laguerre s'est occupé de ces mêmes courbes (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VI, p. 129; 1878).

déterminée par deux tangentes quelconques u', u'', les paramètres v_i pouvant alors se calculer au moyen des équations

$$(4) \qquad (au'v)u'^n_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad (au''v)u''^n_\alpha = 0.$$

Une exception se présente toutefois lorsque le point de rencontre y de u' et u'' est en même temps point de coïncidence pour ces deux lignes, c'est-à-dire lorsqu'ont lieu les équations

$$a_y u'^n_\alpha = 0, \quad a_y u''^n_\alpha = 0, \quad u'_y = 0, \quad u''_y = 0,$$

car alors les deux équations (4) sont satisfaites aussi bien pour $v = u'$ que pour $v = u''$, et, par suite, ne servent plus à la détermination de v. Il existe donc encore un système linéaire de courbes U_v qui toutes touchent les lignes u', u'' et aussi les $n - 2$ autres rayons auxquels répond le même point de coïncidence y. C'est ce que nous pouvons exprimer dans la proposition suivante [1] :

Les $n^2 + n + 1$ rayons fondamentaux du connexe $(1, n)$ forment, conjointement avec les n rayons de coïncidence qui répondent à un point quelconque dans la coïncidence principale, un système de $(n+1)^2$ droites qui sont touchées par une infinité de courbes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ classe $(U_v = 0)$.

Cette circonstance distingue essentiellement le réseau tangentiel $U_v = 0$ d'un réseau tangentiel quelconque de courbes de $(n+1)^{\text{ième}}$ classe. En effet, ce dernier serait déjà complètement déterminé par $\frac{1}{2}n(n+5)$ tangentes fixes, tandis que nous en avons ici $n^2 + n + 1$. Les rayons fondamentaux ne sont donc pas indépendants les uns des autres; ils forment, au contraire, un système particulier de lignes, et ce système correspond dualistiquement aux systèmes brièvement mentionnés plus haut de R points par lesquels passe un nombre q fois infini de courbes d'un ensemble t fois infini de courbes C_n sous la condition $q > t - R$ (p. 124). Dans notre cas, nous devons remplacer n par $n+1$, et nous

---

[1] Les considérations qui suivent sont des généralisations des recherches entreprises par Godt sur le connexe (1, 2). (*Voir* sa Thèse *Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Klasse,* Göttingen, 1873.)

avons

$$t = \frac{1}{2}(n+1)(n+4), \quad q = 2, \quad R = n^2 + n + 1.$$

Par conséquent, d'après les résultats obtenus alors, les coordonnées des $n^2 + n + 1$ rayons fondamentaux satisfont à un système d'équations équivalent à

$$(q+1)(R - t + q) = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)$$

relations indépendantes. Dans notre cas se présente, en outre, cette propriété que les n autres tangentes communes à deux courbes du système se coupent en un point. Cette seconde propriété est-elle une conséquence de la première? Existe-t-il encore d'autres relations entre les $n^2 + n + 1$ rayons fondamentaux? Ce sont là des questions qui exigeraient une étude plus approfondie.

Dans le réseau tangentiel $U_\nu = 0$ seront comprises des courbes en nombre infini ayant une tangente double, puis un nombre fini de courbes ayant deux tangentes doubles ou une tangente d'inflexion. Toutes ces courbes particulières sont en relation étroite avec la courbe $F = 0$. Les $n(n+1) - 2 = (n-1)(n+2)$ intersections simples de ν avec U_ν sont, en effet, caractérisées par la circonstance qu'en elles coïncident deux des n directions correspondantes de la coïncidence principale (deux des tangentes de U_ν); or cette propriété n'appartient qu'aux points de $F = 0$. *Les* $(n-1)(n+2)$ *points de rencontre de* $U_\nu = 0$ *avec* ν *sont donc identiques aux* $(n-1)(n+2)$ *points de rencontre de* ν *avec* F [1]. Si U_ν doit avoir une tangente double, il faut que deux de ces points de rencontre se confondent l'un avec l'autre au point de rencontre de ν avec la tangente double, c'est-à-dire que ν devient tangente de F, et réciproquement U_ν a toujours une tangente double si ν est tangente de F; car autrement la droite ν elle-même serait alors une tangente double de $U_\nu = 0$; nous aurions donc sur

---

[1] De même dans le connexe (m, n) la courbe U_ν qui a ν pour tangente multiple d'ordre m est rencontrée par ν en

$$(m+n-1)(m+n) - m(m-1) - 2m = (n-1)(n+2m)$$

points simples qui sont en même temps les points d'intersection de F avec ν.

v deux et, par conséquent, une infinité de points de coïncidence, c'est-à-dire que v serait un rayon fondamental de notre connexe. D'autre part, on reconnaît immédiatement sur l'expression U_v qu'en fait tout rayon fondamental v est tangente double de sa propre courbe U_v; or, par suite du raisonnement précédent, il sera aussi tangente double de F. Nous avons ainsi les théorèmes suivants :

Les droites v dont les courbes U_v *ont une tangente double enveloppent la courbe* $F = 0$. *Le discriminant de la forme* U_v *égale à zéro donne, par suite, l'équation de la courbe* F *en coordonnées-lignes*. Ce discriminant est, en fait, du degré $3n^2$ par rapport aux v_i. (*Voir* t. II, p. 14.)

Les $n^2 + n + 1$ *rayons fondamentaux sont des tangentes doubles de* F; *aux deux points de contact ils sont également touchés par les courbes correspondantes* U_v.

On déduit encore sans peine des derniers développements les propositions qui suivent :

Les tangentes doubles des courbes $U_v = 0$ *enveloppent la courbe* $\Phi = 0$ *donnée par* (2); cette dernière (qui a de même, suivant ce qui précède, les rayons fondamentaux pour tangentes doubles) est donc liée unidéterminativement à $F = 0$ par ce théorème.

Aux $\frac{3}{2}n(n-1)(3n^2+3n-11)$ *tangentes doubles de* F *qui ne sont pas des rayons fondamentaux du connexe correspondent, comme lignes v, des courbes* U_v *à deux tangentes doubles; ces dernières passent par les deux points de contact de v avec* F.

Les $12n(n-1)$ *tangentes d'inflexion de* F *sont les lignes auxquelles repondent des courbes* U_v *ayant une tangente d'inflexion.*

Le système des courbes $X_y = 0$ donné par (3) est d'une manière semblable en relation avec la courbe $F = 0$. Chacune des courbes qui en font partie a au point y un point multiple d'ordre n dont les n tangentes sont les rayons de coïncidence qui répondent à y, et sont représentés par l'équation $a_y(\alpha xy)^n = 0$. *Si donc*

deux de ces n tangentes doivent se confondre, il faut nécessairement que y soit situé sur la courbe F. Pendant que y parcourt la courbe F, les tangentes correspondantes, comptées deux fois, enveloppent la courbe de $3n^{\text{ième}}$ classe $\Phi = 0$. Par conséquent, si l'on joint y aux $(n^2-1)(n+2)$ points de rencontre de $X_y = 0$ avec $F = 0$, les $3n$ tangentes de Φ qui passent par y figurent en toute hypothèse, comptées deux fois, parmi les lignes de jonction, et, comme sur chacune ne se trouve qu'un seul point de coïncidence, $6n$ des $(n^2-1)(n+2)$ intersections dont il a été parlé coïncident par couples; nous avons donc ce théorème :

Chacune des courbes $X_y = 0$ *touche la courbe* F *en* $3n$ *points et, par conséquent, la rencontre encore en* n^3+2n^2-7n-2 *autres points.* Ce dernier nombre donne en même temps la classe de la courbe enveloppée par les $n-2$ rayons simples de la coïncidence principale qui répondent à un point de F.

Nous pouvons encore facilement indiquer une troisième courbe passant par les points de contact de $X_y = 0$ et $F = 0$, et telle que ces $3n$ points (qui ne forment pas un système d'intersections complet) soient déterminés comme points communs aux trois courbes. En effet, deux courbes X_y et X_z se coupent en $(n+1)^2$ points. Parmi ces points, un se trouve toujours sur la ligne $\overline{yz}$, savoir : celui qui lui correspond dans la coïncidence principale. Si nous rapprochons maintenant indéfiniment z de y sur la ligne $\overline{yz}$, le point de rencontre placé sur $\overline{yz}$ reste fixe, et les n^2+2n autres points se déplacent sur X_y. Les lignes qui les joignent à y et à z deviennent alors infiniment voisines les unes des autres (tant que les points en question ne se rapprochent pas eux-mêmes indéfiniment de y), et deviennent, en conséquence, tangentes de Φ; par suite, $3n$ seulement de ces points d'intersection peuvent avoir une situation séparée; les $(n+1)^2-3n-1$ points restants doivent nécessairement se réunir en y. *Les points de contact de* F *avec* X_y *sont donc les intersections simples, non situées sur* $\overline{yz}$, *des courbes* $X_y = 0$ *et* $X_{y+\iota z} = 0$, ε étant infiniment petit, c'est-à-dire des courbes $X_y = 0$ et

$$(5) \qquad a_x(\alpha xy)^{n-1}(\alpha xz) = 0.$$

On reconnaît, en effet, par les équations des deux courbes que

$n^2 - n$ de leurs intersections sont réunies les unes aux autres au point y.

Si, en particulier, le point y est situé sur un rayon fondamental du connexe, il résulte de la définition de la courbe X_y que le rayon fondamental doit se séparer de cette courbe elle-même (comme en faisant partie). *Aux points d'un rayon fondamental correspond ainsi une série de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre dont chacune touche la courbe* F *en* $3n - 2$ *points.* Au point de rencontre de deux rayons fondamentaux correspond, par suite, une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre qui touche F en $3n - 4$ points.

Nous nous proposons maintenant d'utiliser, en particulier, les développements précédents pour le cas de $n = 2$, c'est-à-dire pour le connexe $(1, 2)$ [1]. La courbe $F = 0$ est alors du quatrième ordre et n'a pas de points singuliers; c'est la courbe *générale* du quatrième ordre, car le nombre des constantes dont dépend la coïncidence principale du connexe $(1, 2)$ est égal à 14, c'est-à-dire au nombre des constantes d'une courbe générale du quatrième ordre. On reconnaît ainsi que la théorie du connexe $(1, 2)$ est étroitement liée à *la théorie d'une courbe générale* C_4, et le cas de $n = 2$ acquiert ainsi un intérêt tout particulier. Il suffit, en effet, de prendre constamment dans les théorèmes précédents $n = 2$ pour obtenir immédiatement une série de propositions relatives *aux tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre,* ainsi que nous le verrons encore incessamment. Observons préalablement que, dans ce cas simple où $m = 1$ et $n = 2$, on peut aisément établir d'une manière effective quelques-unes des courbes covariantes que nous avons mentionnées plus haut à titre d'exemples (p. 360); en effet, si nous considérons x_1, x_2, x_3 comme des paramètres, nous avons uniquement affaire à un réseau tangentiel de coniques K_2; or nous nous sommes occupés déjà d'un réseau de cette espèce (t. II, p. 248). Nous pouvons donc énoncer immédiatement les théorèmes suivants :

Tous les points x dont les coniques correspondantes K_2 *se décomposent en un couple de points forment la courbe du troisième*

---

[1] *Voir*, pour ce qui suit, GODT, *loc. cit.*

ordre

$$(6) \qquad P \equiv a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma)^2 = 0.$$

Les tangentes doubles de la courbe décomposable K_2 *enveloppent la courbe de troisième classe*

$$(7) \qquad I \equiv (abc)(\alpha\beta\gamma) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

c'est-à-dire la jacobienne du réseau tangentiel $a_x u_\alpha^2 = 0$.

Les couples de points de la courbe décomposable K_2 *forment la courbe du troisième ordre*

$$H \equiv (abc)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x) = 0,$$

c'est-à-dire la courbe de Hermite relative au réseau tangentiel.

Les relations des courbes $I = 0$ et $H = 0$ entre elles sont connues par la théorie des réseaux tangentiels de coniques. La courbe $P = 0$ est, en vertu des équations

$$a_x u_\alpha \alpha_1 = 0, \quad a_x u_\alpha \alpha_2 = 0, \quad a_x u_\alpha \alpha_3 = 0,$$

rapportée linéairement à la courbe $I = 0$; toutes deux ont donc le même invariant absolu. A trois points de $P = 0$ qui sont situés sur une ligne droite u correspondent trois couples de points de $H = 0$ formant les sommets d'un quadrilatère complet; les côtés de ce dernier sont les tangentes communes du système de coniques $a_y u_\alpha^2 + \lambda a_z u_\alpha^2 = 0$, y et z étant deux points de u. Chacun de ces quatre côtés forme un élément de connexe avec *tout* point quelconque de u; en d'autres termes, si x est situé sur l'un des quatre côtés, x et u forment ensemble un élément du connexe conjugué (p. 434). *L'équation de ce dernier, savoir* (p. 369)

$$(abu)(cdu)(\alpha\delta x)^2(\beta\gamma x)^2 = 0,$$

représente donc le produit des tangentes communes à toutes les coniques qui, dans le connexe (1, 2), *répondent aux points de u.*

Nous allons maintenant donner, dans ce qui suit, un résumé des propositions qui résultent de nos explications générales sur le connexe (1, n); nous les laisserons dans l'ordre suivant lequel elles ont été obtenues; pour quelques-unes seulement nous ajou-

terons quelques éclaircissements, en faisant usage de résultats connus tirés de la théorie des courbes du troisième ordre ou de la troisième classe :

Il existe sept rayons qui forment avec tous leurs points les éléments de coïncidence principale d'un connexe (1, 2); *ce sont « les rayons fondamentaux » de ce dernier.*

La courbe $F = 0$, c'est-à-dire le lieu des points x qui sont situés sur la courbe correspondante $K_2 \equiv a_x u_\alpha^2 = 0$, est la courbe générale du quatrième ordre, et elle est donnée par l'équation $a_x b_x (\alpha\beta x)^2 = 0$.

La courbe $\Phi = 0$, c'est-à-dire l'enveloppe des tangentes que l'on peut mener des points de $F = 0$ aux courbes correspondantes K_2 est de la sixième classe, et elle est donnée par l'équation $(abu) c_\alpha u_\alpha u_\beta^2 u_\gamma^2 = 0$.

Les sept rayons fondamentaux sont des tangentes doubles de la courbe Φ; cette dernière n'a pas d'autres tangentes doubles.

Les rayons fondamentaux forment avec les deux rayons qui répondent à un point quelconque x dans la coïncidence principale, c'est-à-dire avec les tangentes menées de x à la courbe $K_2 \equiv a_x u_\alpha^2 = 0$, un système de neuf droites qui ne déterminent pas une courbe de troisième classe.

L'équation $U_\nu \equiv (au\nu) u_\alpha^2 = 0$ représente le réseau tangentiel général de courbes de troisième classe à sept tangentes (rayons fondamentaux) communes.

L'invariant ternaire absolu d'une courbe $U_\nu = 0$ est égal à l'invariant binaire absolu des quatre points de rencontre de F avec ν. Les invariants S_ν et T_ν de U_ν sont donc proportionnels aux contrevariants $(AB\nu)^4$ et $(AB\nu)^2 (BC\nu)^2 (CA\nu)^2$ de $F \equiv A_x^4$.

En particulier, l'équation de la courbe F en coordonnées-lignes ν est

$$S_\nu^3 - 6T_\nu^2 = 0.$$

Les sept rayons fondamentaux sont des tangentes doubles de $F = 0$ [1].

---

[1] La théorie du réseau tangentiel de troisième classe, déterminé par sept tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre C_4, a été étudiée pour la première

Aux vingt et une autres tangentes doubles de F correspondent des courbes U_ν à deux tangentes doubles, c'est-à-dire des courbes qui se décomposent en une conique et en un point. La conique ne peut toucher que cinq des sept rayons fondamentaux ; le point est conséquemment situé à l'intersection des deux autres. Donc :

A chacune des vingt et une autres tangentes doubles de F *correspond une intersection déterminée des sept rayons fondamentaux, de telle façon que la courbe* U_ν *homologue à la tangente double se décompose et comprend : 1° l'intersection en question; 2° une conique tangente aux cinq rayons fondamentaux qui ne passent pas par cette intersection.*

Les deux tangentes que l'on peut mener du point d'intersection à la conique sont les tangentes doubles de la courbe considérée U_ν : elles passent, en conséquence, par les deux points de contact de la tangente double ν avec F [1].

Il existe vingt-quatre courbes U_ν à tangente d'inflexion, et répondant aux tangentes communes des deux courbes $S_\nu = 0$ et $T_\nu = 0$.

L'équation $X_y \equiv a_x(\alpha x y)^2$ représente un système de courbes du troisième ordre dont chacune a, au point y, un point double ; les tangentes de ce dernier sont les rayons qui forment avec y des éléments de la coïncidence principale. Si S_y, T_y sont les deux invariants de la courbe X_y, la condition $S_y^3 - 6T_y^2 = 0$ est ici satisfaite identiquement pour y. Comme, d'ailleurs, S_y et T_y s'évanouissent en même temps si y est situé sur $F = 0$, puisqu'alors la courbe $X_y = 0$ a un point de rebroussement en y, *les invariants* S_y, T_y *de* X_y *ne diffèrent respectivement du carré et du cube de la forme* $F = a_y b_y(\alpha\beta y)^2$ *que par un facteur numérique.*

---

fois par Aronhold, *Berliner Monatsberichte*, 1864, p. 499. Sur les tangentes doubles de C_4, *voir* ci-dessus, p. 244.

[1] Comme ces lignes sont aussi des tangentes de $\Phi = 0$, on a, par réciprocité dualistique, la proposition suivante : *Sept points quelconques étant donnés dans le plan, les quarante-deux points où la ligne qui joint deux d'entre eux coupe la conique déterminée par les cinq autres sont situés sur une courbe du sixième ordre qui a les sept points pour points doubles.*

Chacune des courbes X_y *touche la courbe* F *en six points, c'est-à-dire en tous les points où elle la rencontre.*

Par les six points de contact de X_y passe aussi la courbe $a_x(\alpha xy)(\alpha xz) = 0$. Mais cette dernière est symétrique en y et z et de là résulte que :

Les douze points de contact de deux courbes X_y *et* X_z *sont situés sur la courbe du troisième ordre*

$$a_x(\alpha xy)(\alpha xz) = 0 \quad (9)$$ [1].

Les courbes X_y qui répondent aux points y de l'un des sept rayons fondamentaux se décomposent en ce rayon lui-même et en un système de coniques en nombre simplement infini dont chacune touche la courbe du quatrième ordre F en quatre points.

La courbe X_y qui correspond au point d'intersection y de deux rayons fondamentaux se décompose en ces deux rayons et en l'une des vingt et une autres tangentes doubles de F. *A tout point d'intersection* y *de deux des rayons fondamentaux* (*qui forment sept tangentes doubles de* F) *se trouve associée une autre tangente double déterminée* ν *de cette courbe, de telle sorte qu'on obtient par là la totalité des vingt-huit tangentes doubles de* F. A la tangente double ν répond alors le point y comme partie de la courbe U_ν en question, suivant la manière indiquée ci-dessus (p. 445).

Chaque rayon fondamental est coupé par les six autres. Dans chaque série de coniques de contact qui répond à un rayon fondamental sont donc compris six couples de tangentes doubles; l'une des tangentes doubles de chaque couple est précisément l'un des six autres rayons fondamentaux.

Si y et z sont situés tous deux sur le même rayon fondamental, toute courbe $X_{y+\lambda z} = 0$ renfermera ce rayon, et il en sera conséquemment de même pour la courbe (9). Il résulte ainsi de là que *les huit points de contact de deux coniques du même système sont toujours situés sur une conique* (comp. p. 234).

---

[1] Cette courbe est le lieu des points x dont les couples homologues de rayons de la coïncidence principale divisent harmoniquement la ligne qui joint deux points quelconques y et z.

La plupart des propositions énoncées ici se réfèrent exclusivement aux sept rayons fondamentaux et à la courbe du quatrième ordre; ils sont donc vrais d'une manière absolue, indépendamment de la circonstance que nous y avons été conduits par le connexe $a_x u_\alpha^2 = 0$. On peut donc inversement partir d'une courbe du quatrième ordre; on a alors des relations entre sept tangentes doubles quelconques (parmi lesquelles ne doit se trouver aucun groupe de quatre formant des coniques décomposables du même système de coniques de contact), et entre les vingt et une autres tangentes doubles de la courbe C_4. Mais on peut aussi partir de sept droites quelconques du plan et construire par leur intermédiaire les vingt et une autres tangentes doubles de C_4 et leurs points de contact. On déduira cette construction très simplement de notre connexe en prenant pour point de départ un autre connexe qui a la même coïncidence principale que le connexe donné et qui est d'une nature particulièrement simple. Cela est permis, puisque la courbe $F = 0$ dépend uniquement de la coïncidence principale du connexe $(1, 2)$.

Nous prendrons trois des sept rayons fondamentaux pour côtés du triangle de base. L'équation du connexe doit alors être satisfaite par chacun des trois systèmes de valeurs

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad x_1 = 0;$$
$$u_3 = 0, \quad u_1 = 0, \quad x_2 = 0;$$
$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Les termes possédant les facteurs $x_1 u_2^2$, $x_1 u_3^2$, $x_2 u_3^2$, $x_2 u_1^2$, $x_3 u_1^2$, $x_3 u_2^2$ manquent nécessairement; on peut ensuite, par l'adjonction du produit de u_x par une expression linéaire en u_1, u_2, u_3, faire disparaître aussi les termes en $x_1 u_1^2$, $x_2 u_2^2$, $x_3 u_3^2$. *La coïncidence principale d'un connexe général* $(1, 2)$ *peut donc toujours être représentée comme coïncidence principale d'un connexe de la forme*

$$a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0, \tag{10}$$

dont l'équation est rapportée à trois des sept rayons fondamentaux; et il existe trente-cinq connexes de cette espèce, corrélativement aux trente-cinq manières dont on peut choisir trois rayons fondamentaux.

Le connexe (10) est caractérisé par la circonstance que toutes ses courbes K_2 touchent les côtés du triangle de coordonnées. La courbe $I = 0$ se décompose donc en trois points qui sont les trois sommets du triangle, la courbe $H = 0$ en trois droites qui en sont les trois côtés (*voir* t. II, p. 255), et pour la courbe $P = 0$, dont l'équation s'obtient par élimination des u entre les équations

$$b_x u_3 + c_x u_2 = 0, \quad c_x u_1 + a_x u_3 = 0, \quad a_x u_3 + b_x u_1 = 0,$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x \\ c_x & 0 & a_x \\ b_x & a_x & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 a_x b_x c_x = 0.$$

Enfin l'équation de la courbe du quatrième ordre est donnée par l'équation en coordonnées-points de la conique (10); *elle prend donc la forme simple*

$$(11) \qquad \frac{1}{2} F \equiv - \begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x & x_1 \\ c_x & 0 & a_x & x_2 \\ b_x & a_x & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous formons ensuite $X_y = 0$, en plaçant y au sommet $u_1 = 0$ du triangle de coordonnée, il vient, en faisant y_1 égal à 1,

$$X_y = - a_x x_2 x_3.$$

Les lignes $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ *qui figurent dans* (10) *sont, par suite, les tangentes doubles de* F *qui sont liées de la façon précédemment décrite aux sommets du triangle comme points d'intersections de rayons fondamentaux.*

Les six formes linéaires qui se présentent dans le déterminant (11) désignent donc, égalées à zéro, des tangentes doubles de $F = 0$. On le vérifie aussi sans peine directement sur l'équation (11). Si l'on pose, en effet, $c_x = 0$, par exemple, dans cette dernière, on obtient l'équation

$$(a_x x_1 - b_x x_2)^2 = 0,$$

et le même résultat se produit pour $x_3 = 0$. Les lignes $c_x = 0$, $x_3 = 0$ touchent donc $F = 0$ en ses points de rencontre avec la

conique $a_x x_1 - b_x x_2 = 0$. Cette dernière passe par les points de rencontre de $a_x = 0$ avec $b_x = 0$ et $x_2 = 0$, de $b_x = 0$ avec $x_1 = 0$ et de $x_1 = 0$ avec $x_2 = 0$. On obtient ainsi le théorème suivant, dont nous aurons encore à faire usage incessamment et qui est indépendant de la forme d'équation de notre connexe.

Si s_1, s_2, s_3 sont trois tangentes doubles de F *comprises parmi les sept indépendantes les unes des autres, et se coupent respectivement aux points p_1, p_2, p_3; si, de plus, σ_1, σ_2, σ_3 sont les p tangentes homologues des points p_i et se coupent en π_1, π_2, π_3, les points de contact de s_1 et σ_1 sont situés sur une conique aussi bien avec les points p_1 et π_1 qu'avec les intersections de s_2 et σ_3, de s_3 et σ_2, etc.,* et les trois coniques qui prennent ainsi naissance passent par les quatre mêmes points, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement sur leurs équations

$$(12) \qquad x_2 b_x - x_3 c_x = 0, \quad x_3 c_x - x_1 a_x = 0, \quad x_1 a_x - x_2 b_x = 0.$$

Actuellement, en cherchant d'abord pour sept droites données arbitrairement l'un des connexes spéciaux (1, 2) de la forme (10), nous pouvons résoudre, sans difficultés essentielles, le problème suivant :

Étant données sept droites quelconques comme rayons fondamentaux d'un connexe général (1, 2), *construire la coïncidence principale de ce dernier.*

Nous emploierons trois quelconques des sept rayons comme rayons fondamentaux d'un connexe de la forme (10). Soient s_1, s_2, s_3 ces trois rayons, et p_1, p_2, p_3 leurs points de rencontre; désignons par t_1, t_2, t_3, t_4 les quatre autres rayons, et par $p_{12}, p_{13}, \ldots$ leurs points de rencontre respectifs. Comme toutes les coniques K_2 du système appartenant au connexe doivent toucher les lignes s_i, plusieurs coniques de cette espèce se trouvent immédiatement déterminées par le choix des lignes dont il s'agit. En effet, aux points d'un rayon fondamental correspondent des coniques tangentes à ce rayon lui-même, et par conséquent aux points de rencontre de deux droites t coniques tangentes à ces deux droites et dont, par suite, cinq tangentes sont connues. On connaît ainsi de

prime abord les coniques qui répondent aux sommets du quadrilatère complet des lignes t_i.

Mais on peut ensuite trouver aussi, pour tous les autres points des droites t_i, les coniques qui s'y rapportent. Ainsi, par exemple, le système de courbes K_2 qui répond aux points de t_1 est projectif à la série de ses points de contact sur t_1; et cette relation projective est fixée par la circonstance que l'on connaît les coniques K_2 qui répondent aux trois points p_{12}, p_{13}, p_{14} et, par conséquent, aussi leurs points de contact π_{12}, π_{13}, π_{14}. On peut donc, pour tout point quelconque p de t_1, construire le point de contact correspondant π, et aussi, après avoir préalablement trouvé ce dernier, la conique répondant à p, laquelle est alors déterminée, de la manière connue, par les quatre tangentes s_1, s_2, s_3, t_1 et par le point de contact π sur t_1. On peut encore, par une construction linéaire, mener du point p à cette conique l'autre tangente qui forme avec t_1 le couple de rayons de la coïncidence principale qui répond à t_1.

Il s'agit ensuite de construire les lignes $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ importantes pour le connexe (10). Or tout point de s_1 forme avec le point de rencontre p_1 de s_2 et s_3 une conique qui répond comme courbe K_2 à un point déterminé de $a_x = 0$. Les points de s_1 et de $a_x = 0$ se trouvent par là liés projectivement. Mais on connaît les quatre points de cette dernière ligne qui correspondent aux points de rencontre de s_1 avec les lignes t_1, d'après les observations faites il y a un instant, car ces points de rencontre forment avec p_1 des coniques des systèmes déjà connus qui correspondent aux points des droites t_i. Par là se trouve déterminée la droite $a_x = 0$ et en même temps la coordination projective de ses points par rapport aux points de s_1. Les choses se passent d'une manière analogue pour les lignes $b_x = 0$ et $c_x = 0$; on peut donc construire toutes les coniques décomposables et les points auxquels elles répondent comme courbes K_2.

Les problèmes importants qui nous restent encore à traiter : *Construire pour un rayon quelconque u la droite de connexe* C_1, *et pour un point quelconque x la conique de connexe* K_2, se résolvent très simplement.

Trouver pour un rayon u la droite de connexe, cela signifie *déterminer la droite aux points x de laquelle répondent les coniques*

K_2 *tangentes au rayon u*. Or, évidemment, de pareilles coniques K_2 sont formées par les trois points de rencontre de s_1, s_2, s_3 pris respectivement avec les sommets opposés p_1, p_2, p_3; les points correspondants x sont situés sur les droites a, b, c et, par suite, sont connus, d'après ce qui précède; mais eux-mêmes sont situés sur une droite qui est précisément la droite cherchée C_1 répondant à x.

Pour trouver la conique K_2 relative à un point x, on mènera une droite ν par x; on connaît alors les coniques décomposables qui correspondent aux points de rencontre de la droite avec $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$, par conséquent aussi celle qui répond à x, car le système des courbes K_2 qui répondent aux points x de ν est projectif à la série de ces points x.

En conséquence de cette construction, le connexe (10) doit être considéré comme complètement connu; on connaît donc aussi sa coïncidence principale, c'est-à-dire la coïncidence principale d'un connexe quelconque qui a les sept droites données pour rayons fondamentaux ([1]).

A l'aide de la construction de cette coïncidence principale on résout ensuite aisément l'important problème qui suit ([2]) :

Étant données sept tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre indépendantes les unes des autres, construire les vingt et une autres, ainsi que les points de contact de toutes ces vingt-huit tangentes doubles.

On emploiera les sept tangentes doubles données comme rayons fondamentaux d'une coïncidence principale (1, 2) qui peut être construite de la manière indiquée. Si de chaque point de rencontre de deux de ces sept rayons on mène le couple de tangentes à la conique déterminée par les cinq autres et qu'on cherche sur les

---

([1]) On peut rattacher à ces considérations la solution de beaucoup d'autres problèmes. Ainsi, par exemple, pour trouver la neuvième tangente commune de deux courbes de troisième classe si huit autres sont données, on déterminera la coïncidence principale (1, 2) qui répond à sept de ces dernières, et dans cette coïncidence principale le point répondant à la huitième. On mènera de ce dernier point la seconde tangente à la courbe correspondante K_2; ce sera la droite cherchée.

([2]) *Voir* Aronhold, *loc. cit.*

tangentes de chaque couple les points de coïncidence, la ligne qui joint les points de coïncidence d'un couple est précisément une tangente de la conique employée, mais elle est aussi une des vingt et une tangentes doubles cherchées, et les points de coïncidence sont ses points de contact (*voir* les théorèmes donnés p. 445).

Pour trouver ensuite les points de contact sur les trois tangentes doubles données qui sont employées dans la construction de la coïncidence principale (1, 2) comme rayons s_1, s_2, s_3, il suffit, d'après un théorème précédent, de déterminer leurs points de rencontre avec les trois coniques (12), lesquels peuvent être construits aisément. Pour obtenir enfin les points de contact des quatre autres tangentes doubles t_1, t_2, t_3, t_4, on remarquera que ce sont ceux des points des quatre droites qui sont situés sur leur conique correspondante K_2. Il suffit alors de construire les points qui se correspondent à eux-mêmes dans les séries projectives superposées déjà employées qui existent sur chacune des droites en question; ce qui se fait de la manière connue (t. I, p. 65). Le problème posé se trouve ainsi résolu.

VIII. — Sur la théorie des équations différentielles.

Nous avons vu comment la coïncidence principale d'un connexe algébrique est liée de la façon la plus étroite à une équation différentielle algébrique déterminée, et nous avons appelé l'attention sur ce fait que de la théorie des invariants des connexes doivent naître de nouveaux points de vue pour la théorie des équations différentielles; nous avons, en outre, effectué réellement dans quelques exemples l'intégration des équations différentielles considérées. Mais la méthode de considération de la théorie des invariants, et, en particulier, l'homogénéité qu'elle exige dans les équations n'est pas seulement utile pour les équations différentielles purement algébriques; elle offre, au contraire, également des avantages essentiels pour le cas où les puissances des différentielles dx, dy apparaissent multipliées par des fonctions transcendantes, ou même aussi pour celui où ces différentielles entrent elles-mêmes d'une façon transcendante, c'est-à-dire pour l'équa-

tion différentielle du premier ordre entièrement générale

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

On peut, en effet, transformer toute fonction Φ de cette nature en une fonction homogène d'ordre zéro en posant $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, et alors tout d'abord le théorème d'Euler, si utile pour les fonctions homogènes, se présente sous la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} x_3 = 0.$$

Dans ce qui suit, nous ne ferons que signaler brièvement quelques faits que l'application des points de vue projectifs permet immédiatement d'éclaircir et qui, en particulier, se présentent au premier plan dans les recherches contemporaines sur les équations différentielles; toutefois, nous nous bornerons à une introduction courte et nullement complète à ces théories, surtout parce que ces dernières sont encore en formation. Le but de ce qui va suivre est, en particulier, de faire ressortir la connexion des nouveaux points de vue avec la théorie ordinaire, et pour cette raison nous commencerons par faire usage des coordonnées rectangulaires. Les sujets que nous avons à exposer peuvent être caractérisés de la façon suivante :

1° Notion de l'intégrale d'une équation différentielle;

2° Notion des transformations générales de contact et établissement de ces transformations;

3° Solutions singulières d'une équation différentielle.

Si, dans l'équation

$$\varphi(x, y, p) = 0, \quad \text{où} \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

on entend par x, y des coordonnées ponctuelles dans le plan, à tout point x, y sera associé, en général, par ces coordonnées une direction p ou un nombre fini de telles directions, et le problème de l'intégration revient à trouver des courbes

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

(α étant un paramètre) qui soient touchées en chacun de leurs points par une direction correspondante p, ou autrement dit de faire succéder les uns aux autres de manière à constituer des courbes les éléments d'arc issus des points individuels x, y.

Dorénavant nous appellerons x, y, p les *coordonnées* de l'élément d'arc considéré, et nous ferons observer, comme idée fondamentale dans ce qui va suivre, que ces coordonnées seront toujours envisagées comme variables *similaires*. Les éléments d'arc qui satisfont à $\varphi = 0$ seront appelés les *éléments principaux de l'équation* (au lieu d'être appelés *éléments de la coïncidence principale*), et les courbes $f = 0$, qui représentent les intégrales de $\varphi = 0$, les *courbes intégrales* correspondantes. De l'ensemble de tous les éléments principaux du plan qui sont en nombre triplement infini (c'est-à-dire des éléments du connexe identique $u_x = 0$) un nombre doublement infini est détaché par l'équation $\varphi = 0$, et ces éléments apparaissent décomposés par les courbes intégrales en un nombre simplement infini de groupes comprenant chacun un nombre simplement infini d'éléments principaux. Les éléments principaux en nombre infini qui se rattachent à une même courbe intégrale sont groupés d'une manière déterminée et remarquable. En tant, effectivement, qu'on peut considérer une tangente de la courbe comme ligne de jonction de deux points consécutifs de cette dernière, on peut dire de deux éléments principaux consécutifs

$$x, y, p \quad \text{et} \quad x + dx, y + dy, p + dp$$

d'une courbe intégrale que la droite de l'un passe par le point de l'autre, ce qui trouve son expression analytique dans l'équation

$$(2) \qquad dy - p\,dx = 0,$$

c'est-à-dire dans l'équation de définition de p. Comme cette équation se présente très fréquemment dans la suite, nous attribuerons à la relation de deux éléments voisins qui y satisfont la dénomination de *situation réunie* des deux éléments.

Nous appliquerons maintenant à la notion ordinaire exposée ici de la courbe intégrale l'idée fondamentale de la Géométrie projective, savoir qu'on doit regarder comme assimilables entre eux tous les résultats qui dérivent les uns des autres par *collinéation* (projection) ou par *transformation dualistique* (principe de dua-

lité). L'introduction des collinéations n'exige pas, à proprement parler, une extension particulière, ou du moins pas une extension extraordinaire des notions formulées jusqu'ici. Nous devons, d'ailleurs, faire observer que, conformément au principe précité, on peut parler aussi bien d'éléments principaux à distance infinie que d'éléments à distance finie, ce que précisément l'emploi des coordonnées homogènes met parfaitement en lumière; on peut aussi, comme cela va de soi, admettre par avance les éléments principaux imaginaires. On aperçoit du reste clairement comment, par la prolongation d'une courbe intégrale à travers l'infini (c'est-à-dire à travers la droite de l'infini), on est amené à apercevoir en particulier que la droite de l'infini, par exemple, peut se présenter elle-même comme courbe intégrale, etc. La conception ordinaire sera déjà bien davantage dépassée si l'on demande par analogie de considérer aussi de la même manière, dans les recherches sur les solutions singulières, les résultats à distance infinie. Une nouvelle idée est, d'ailleurs, introduite par la considération des transformations dualistiques. Par elles les éléments principaux qui se rattachent à une courbe donnent, en général, naissance aux éléments principaux d'une nouvelle courbe. Cette dernière dégénère toutefois en un point si la première consiste en une droite, et l'on est ainsi conduit à envisager aussi *le point* ou, si l'on veut, *le faisceau de rayons comme forme possible d'une courbe intégrale.* Cette conception s'accorde au fond avec l'équation (2), laquelle est caractéristique pour deux éléments principaux consécutifs d'une courbe intégrale; elle est également satisfaite si l'on pose $dx = dy = 0$, p restant arbitraire, ou autrement dit si un élément principal tourne autour d'un point fixe.

Un exemple relatif à cet objet nous est fourni par le système des courbes intégrales d'un connexe (1, 1) qui peuvent, en général, être représentées sous la forme (p. 435)

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} = \text{const.}$$

(avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$). Ici les trois côtés du triangle de base forment une courbe du système; de même aussi ses trois sommets doivent être envisagés comme courbes intégrales, car l'équation des courbes en coordonnées-lignes est absolument de la même forme. Il existe bien, d'ailleurs, des équations différentielles dont toutes

les courbes intégrales se composent de lignes droites (par exemple, celle de l'équation $p = 0$), et de même aussi on concevra des équations dans lesquelles des points se présentent exclusivement comme courbes intégrales. Analytiquement ce sont simplement les équations qui ne renferment pas p, c'est-à-dire les équations de la forme $\varphi(x, y) = 0$, ou simplement $x = 0$. Elles sont satisfaites par tous les éléments principaux dont les points sont situés sur une courbe fixe (p. 352 et suiv.), et les courbes intégrales qu'on en peut déduire sont précisément ces points eux-mêmes considérés comme faisceau de rayons et, en outre, la courbe formée par les points en question, laquelle doit être considérée comme solution singulière [1].

Nous satisferons aux conditions de la Géométrie projective rappelées ici si (en négligeant d'abord les éléments à distance infinie), nous définissons une courbe intégrale de la manière suivante [2] :

Une série simplement infinie d'éléments principaux x, y, p sera appelée une courbe intégrale ou mieux (afin que l'expression de courbe ne donne lieu à aucune confusion) une variété intégrale à une dimension (une intégrale M_1*), si, pour deux éléments principaux consécutifs x, y, p et $x + dx, y + dy, p + dp$ situés à distance finie, la condition* (2), *c'est-à-dire*

$$dy - p\,dx = 0$$

est satisfaite.

Le problème de l'intégration d'une équation $\varphi(x, y, p) = 0$ peut alors, y compris le cas où p ne figure pas dans φ, se formuler en disant que *les éléments principaux en nombre doublement infini de l'équation $\varphi = 0$ doivent être rassemblés dans les intégrales* M_1 *en nombre simplement infini.*

Donc analytiquement on demande, pour embrasser tous les cas, d'établir une équation supplémentaire renfermant un paramètre arbitraire α

$$\psi(x, y, p, \alpha) = 0, \tag{3}$$

---

(1) *Voir* le dernier exemple à la fin de cette section.

(2) *Voir* LIE, *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* (*Göttinger Nachrichten,* 1872, p. 473).

et telle qu'en vertu de $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ la condition (2) soit satisfaite indépendamment de la valeur du paramètre α, que cela ait lieu pour tous les éléments principaux qui satisfont aux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ou pour une partie seulement d'entre eux. En effet, pour une valeur donnée de α, les éléments principaux communs aux deux équations forment un système simplement infini, et l'on obtient l'équation des courbes intégrales en coordonnées-points

$$f(x, y, \alpha) = 0, \tag{4}$$

dans le cas où il est possible de l'établir, en éliminant p entre $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Mais on peut aussi considérer l'équation (4) elle-même comme une équation de la forme (3), puisque, conjointement avec l'équation implicitement supposée

$$p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

elle remplace complètement la combinaison des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Si l'équation (1) ne renferme pas la quantité p, une équation (4) est tout à fait insuffisante pour représenter l'intégrale M_1. On devra, au contraire, combiner avec l'équation $\varphi = 0$ une équation (3), en sorte que, dans ce cas, notre nouvel énoncé du problème de l'intégration devient par le fait nécessaire. Il est, d'ailleurs, évident en soi que les équations (3), qui deviennent actuellement applicables à la représentation des intégrales M_1 de $\varphi = 0$, sont précisément des équations ne renfermant pas p, mais bien un paramètre α. Il ne s'agit plus alors que de représenter les points de la courbe $\varphi = 0$; ce à quoi on arrive le plus simplement possible en coupant $\varphi = 0$ par un système simplement infini d'autres courbes.

Les propriétés que doit posséder une fonction ψ pour déterminer de la manière décrite une intégrale M_1 de φ peuvent se représenter par une équation différentielle linéaire du premier ordre aux dérivées partielles. On doit, en effet, pouvoir alors trouver pour chaque élément principal commun de φ et ψ un élément principal voisin qui soit en situation réunie avec le premier (p. 454) et appartienne aussi aux deux équations, ou, autrement dit, il faut

la coexistence des trois équations

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp = 0, \\ &\qquad\qquad p\,dx - dy = 0, \end{aligned} \right.$$

desquelles résulte

$$(6)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) = 0.$$

C'est là la condition pour que les éléments principaux communs de $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (*ou même seulement une partie séparable de ces éléments*) *forment une intégrale* M_1 *pour les deux équations* [1]. Il faut naturellement exclure le cas où deux des équations (5) se confondent l'une avec l'autre, c'est-à-dire où l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\partial\psi}{\partial x} : \frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial p},$$

ce qui arrive, par exemple, pour $\varphi = \psi + \text{const.}$, ainsi que le cas où l'équation (6) est satisfaite par l'évanouissement des dérivées particulières de φ ou ψ. Nous reviendrons ultérieurement

---

[1] *Voir*, JACOBI, *Vorselungen über Dynamik*, herausgegeben von CLEBSCH, Berlin, 1866, p. 172 et 237 et suiv. L'équation (6) se transforme effectivement en l'équation de condition de Jacobi si l'on introduit en outre le quotient $p : q$ au lieu de $-p$; il faut alors traiter p, q absolument comme des coordonnées-lignes On aura ensuite à éliminer les grandeurs dx, dy, dp, dq entre les quatre équations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{dx}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}dq = 0, \\ &p\,dx + q\,dy \qquad\qquad\qquad\quad = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad x\,dp + y\,dq = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, eu égard à ce que φ, ψ sont homogènes en p, q, l'équation de condition de Jacobi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Voir aussi ci-dessous la même question traitée en coordonnées homogènes.

sur ces cas exceptionnels quand nous ferons usage des coordonnées homogènes.

Nous pouvons établir et énoncer ce résultat sous une autre forme qui nous sera utile plus tard. Les équations (5) expriment, en effet, que l'expression $p\,dx - dy$ s'évanouit en conséquence des équations $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$, et cette circonstance se présente évidemment toujours si l'on peut déterminer une fonction $\chi(x, y, p)$, telle que l'on ait

$$d\varphi - \chi\,d\psi = (dy - p\,dx)\rho, \tag{7}$$

et réciproquement. Nous nous proposons donc maintenant d'établir la condition à laquelle les fonctions φ, ψ, χ doivent satisfaire pour qu'une équation de cette espèce soit possible.

L'équation (7) se décompose immédiatement en les trois relations suivantes :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial y} = \rho, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\rho p, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0,$$

et, en éliminant χ et ρ, on retrouve l'équation (6). Nous obtenons cette dernière sous une autre forme en introduisant les dérivées totales; comme, en effet,

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}, \tag{8}$$

la seconde équation donne, eu égard à la première,

$$\frac{d\varphi}{dx} - \chi\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

et par combinaison avec la troisième équation il en résulte ensuite

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} = 0, \tag{9}$$

équation qui se tire directement aussi de (6) en vertu de (8). *Si donc* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *doivent avoir une intégrale* M_1 *commune, c'est-à-dire s'il doit exister une équation de la forme* (7), *il faut l'accomplissement de la condition* (9), dans laquelle, contrairement à (6), interviennent les dérivées totales.

Or ces considérations gagnent immensément sous le rapport de

la symétrie et de la clarté de l'exposition à l'introduction de coordonnées homogènes et, pour préciser, à l'emploi simultané de coordonnées-points et de coordonnées-lignes homogènes. Ces coordonnées s'introduisent dans le cas général absolument comme il a été expliqué plus haut (p. 386 et suiv.) pour le cas particulier des équations algébriques, en transformant l'équation différentielle en une équation entre les coordonnées-points et les coordonnées-lignes et en ajoutant alors les conditions $u_x = 0$, $u_{dx} = 0$, en faisant, par conséquent, la substitution

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad p = -\frac{u_1}{u_2}, \quad xp - y = \frac{u_3}{u_2}.$$

Dans les fonctions homogènes de *dimension nulle* qui prennent ainsi naissance, les dénominateurs x_3, u_2 jouent tout d'abord un rôle remarquable; toutefois, on n'a nullement à considérer exclusivement des fonctions ayant ces dénominateurs, et il sera, au contraire, avantageux de les remplacer par les fonctions *les plus générales* d'ordre nul et de classe nulle. Si l'on a, en particulier, affaire à des équations différentielles algébriques, on ne partira pas nécessairement de fonctions dont le dénominateur est formé par des puissances de u_2 et x_3, mais on choisira, au lieu de ces dernières, les quotients de deux fonctions algébriques, dans lesquels le numérateur et le dénominateur ont la même généralité, en sorte que si, par exemple, l'on fait Φ égal au quotient des connexes $a_x^m u_\alpha^n$ et $a_x'^m u_{\alpha'}^n$, l'équation $\Phi = \text{const.}$ représente le système linéaire le plus général des connexes.

La condition (2) *de la situation réunie* de deux éléments voisins x, u et $x + dx$, $u + du$ est actuellement à remplacer par les deux équations

$$(10) \qquad \Sigma u_i dx_i = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma x_i du_i = 0,$$

dont chacune est, en vertu de $u_x = 0$, $(u + du)_{x+dx} = 0$, une conséquence de l'autre. En effet, la première équation (10) combinée avec $u_x = 0$ exprime la même chose que l'équation (2), savoir que du point x part une direction d'avancement u qui est déterminée par le point $x + dx$. Un fait analogue existe à l'égard de la seconde équation (10).

Supposons maintenant qu'on ait sous les yeux une équa-

tion

$$\Phi(x, u) = 0$$

homogène en x, u et de dimension nulle, et cherchons la condition pour qu'elle ait, avec une autre équation $\Psi(x, u) = 0$, une intégrale M_1 commune, c'est-à-dire pour que les éléments principaux qui satisfont aux équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $u_x = 0$ forment une courbe intégrale (courbe de coïncidence principale) de $\Phi = 0$. Nous avons alors, à la place de (5), les conditions

$$\sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_i} du_i = 0,$$
$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} du_i = 0,$$
$$\Sigma u_i dx_i = 0, \quad \Sigma x_i du_i = 0;$$

et par élimination de dx_i, du_i, en désignant par les indices 1, 2, 3 la différentiation par rapport à x_1, x_2, x_3, par les indices I, II, III la différentiation par rapport à u_1, u_2, u_3, et en fixant les valeurs absolues des x, u par les équations $k_x = 1$, $u_l = 1$ (d'où $\Sigma k_i dx_i = 0$, $\Sigma l_i du_i = 0$), on en tire l'équation de condition

$$0 = \begin{vmatrix} \Phi_1 & u_1 & k_1 & \Psi_1 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & u_2 & k_2 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ \Phi_3 & u_3 & k_3 & \Psi_3 & 0 & 0 \\ \Phi_{\rm I} & 0 & 0 & \Psi_{\rm I} & x_1 & l_1 \\ \Phi_{\rm II} & 0 & 0 & \Psi_{\rm II} & x_2 & l_2 \\ \Phi_{\rm III} & 0 & 0 & \Psi_{\rm III} & x_3 & l_3 \end{vmatrix}$$
$$= \Sigma \pm \Phi_1 u_2 k_3 . \Sigma \pm \Psi_{\rm I} x_2 l_3 - \Sigma \pm u_1 k_2 \Psi_3 . \Sigma x_1 l_2 \Phi_{\rm III}.$$

Or, en désignant par i les indices 1, 2, 3, par j les indices I, II, III, on a, eu égard au théorème d'Euler,

$$\Sigma \pm \Phi_1 u_2 k_3 . \Sigma \pm \Psi_1 x_2 l_3 = \begin{vmatrix} \Sigma \Psi_j \Phi_i & \Sigma \Psi_j u_j & \Sigma \Psi_j k_j \\ \Sigma \Phi_i x_i & u_x & k_x \\ \Sigma \Phi_i l_i & u_l & k_l \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \Sigma \Psi_j \Phi_i & 0 & \Sigma \Psi_j k_j \\ 0 & 0 & 1 \\ \Sigma \Phi_i l_i & 1 & k_l \end{vmatrix} = - \Sigma \Psi_j \Phi_i.$$

Une équation analogue a lieu pour le produit des deux autres dé-

terminants, et nous obtenons, en conséquence, la condition

$$(11)\qquad \sum \Phi_j \Psi_i - \sum \Psi_j \Phi_i \equiv \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0,$$

qui doit exister, en vertu de $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $u_x = 0$.

Cette équation aux dérivées partielles intervient à la place de (6) ou (9); elle est, suivant une expression dont nous nous servirons, la condition nécessaire pour que *les équations* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ *soient en « situation d'involution »* (pour qu'elles aient une intégrale M_1 commune). L'équation (11) est, d'ailleurs, aussi satisfaite pour les éléments principaux singuliers de Φ et Ψ pour lesquels toutes les quantités Φ_i, Φ_j ou Ψ_i, Ψ_j s'évanouissent (par exemple, si $\Psi = f^2$) et également encore lorsque les grandeurs Φ_i, Φ_j deviennent proportionnelles les unes aux autres. En excluant ces cas seulement, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Le problème qui consiste à intégrer l'équation $\Phi = 0$ *se confond avec la question de trouver une fonction* Ψ *homogène en* x, u *de dimension nulle qui satisfasse à l'équation aux dérivées partielles* (11) *et renferme un paramètre* α.

Les avantages que présente l'usage de coordonnées homogènes par rapport à la représentation précédente sont déjà évidents sur cet exemple. Premièrement, en effet, l'équation (11), contrairement à (6) et (9), est absolument symétrique, et elle renferme uniquement des dérivées partielles [1]; de plus, les éléments à distance infinie n'ont plus besoin d'être considérés à part; il ne reste plus à avoir égard qu'aux cas exceptionnels déjà ainsi dénommés et dont l'existence tient à la nature de la question.

Le problème donné dans l'équation (7) acquiert un intérêt particulier et une utilité particulière pour les applications ultérieures lorsqu'on le traite en employant des coordonnées-points et des coordonnées-lignes homogènes. Comme alors l'expression $dy - p\,dx$ doit être remplacée par u_{dx} ou du_x sous la condition $u_x = 0$, nous avons évidemment le problème suivant.

On demande d'indiquer les conditions auxquelles les fonctions

---

(1) *Voir* la note de la page 458.

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, F_1, F_2, F_3$ doivent satisfaire pour qu'il existe une équation de la forme

$$\Phi_1 dF_1 + \Phi_2 dF_2 + \Phi_3 dF_3 = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3, \tag{12}$$

de laquelle résulte, en vertu de $u_x = 0$, l'équation symétrique

$$F_1 d\Phi_1 + F_2 d\Phi_2 + F_3 d\Phi_3 = x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3. \tag{13}$$

Dans le second membre de (12), nous pourrions ajouter un facteur ρ comme dans (7); toutefois, nous imaginerons que ce facteur est compris dans les Φ_i, et nous admettrons qu'il ait toujours été déterminé de telle sorte que toutes les fonctions Φ_i et F_i soient de dimension nulle en x et u.

Nous écrirons l'équation (12) sous la forme

$$\sum_i \sum_k \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_i \sum_k \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} du_k = u_{dx},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = u_k, \quad \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} = 0. \tag{14}$$

On obtient ensuite, par différentiation,

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} - \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} = 0,$$

d'où, en développant

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_i}{\partial x_h} \right) = 0, \quad \sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_i}{\partial u_h} \right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_i}{\partial u_k} \right) = 1, \quad \sum \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h} \frac{\partial F_i}{\partial u_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} \frac{\partial F_i}{\partial u_h} \right) = 0.$$

Ces quatre relations expriment que des six équations $(i = 1, 2, 3)$

$$v_i = \sum_k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial F_i}{\partial u_k} z_k \right),$$

$$w_i = \sum_k \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} z_k \right)$$

résultent les six autres

$$y_h = \sum_i \left(v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h} - w_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} \right)$$

$$- z_h = \sum_i \left(v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h} - w_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h} \right).$$

Si donc on porte ces valeurs de y_h, z_h dans les équations précédentes, il doit en résulter des identités, et de cette manière on trouve que l'on doit avoir aussi les relations suivantes :

$$(15) \quad (F_i, F_k) = 0, \quad (F_i, \Phi_k) = 0; \quad (\Phi_i, \Phi_k) = 0, \quad (F_i, \Phi_i) = 1,$$

où, d'une manière générale, le symbole (PQ) désigne l'expression dont l'évanouissement donne, d'après (11), la condition de la situation en involution pour les équations $P = 0$, $Q = 0$, où, par conséquent,

$$(16) \qquad (P, Q) = \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial u_i} - \frac{\partial P}{\partial u_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right).$$

Le même raisonnement peut être poursuivi en sens inverse; on a, en conséquence, l'important théorème qui suit :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des équations (12) et (13) *sont données, sous le bénéfice de* $u_x = 0$,

---

(1) *Voir* les Mémoires de S. Lie, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania*, 3 mai 1872 et 21 mai 1873, et *Math. Annalen*, t. VIII, où la démonstration est déduite du problème de Pfaff. Pour la marche suivie au texte, *voir* A. Mayer, *Göttinger Nachrichten*, avril 1874, ou *Math. Annalen*, t. VIII, p. 304, et Lie, *ibid*, t. IX. Si l'on ajoute au second membre de (12) pour raison de généralité un facteur ρ, à la place de la dernière équation (15) se présentera l'équation $(F_i \Phi_i) = \rho$, mais tout le reste demeure inaltéré. (*Voir* Mayer, *loc. cit.*). Dans les formules de Mayer, il suffit de prendre toujours z constant pour obtenir celles du texte.

par les équations aux dérivées partielles (15) *dont le sens est mis en lumière par* (16).

Ces derniers développements, et en particulier les équations (15), deviennent précisément d'une grande utilité lorsqu'il s'agit d'établir toutes les transformations appelées *transformations de contact*. On comprend sous cette désignation les transformations du plan qui changent des courbes qui se touchent en des courbes possédant la même propriété, et, par conséquent, *des transformations vis-à-vis desquelles le contact est une propriété invariante* [1]. A cette classe appartiennent d'abord les collinéations du plan et, en général, les *transformations ponctuelles* proprement dites, c'est-à-dire les transformations de la forme

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y), \tag{16}$$

puis aussi toutes les *transformations dualistiques*. Déjà, dans ces dernières, il peut arriver qu'une courbe (et pour préciser une droite) soit transformée en un point, et quelque chose d'analogue se présente dans le cas plus général où l'on prend pour base de la détermination de coordonnées, non le point, mais l'*élément principal*, et où l'on définit conséquemment comme courbe une variété simplement infinie d'éléments principaux dont deux éléments voisins sont en situation réunie. Cette conception conduit aux transformations les plus générales dans lesquelles le contact est une relation invariante. Nous pouvons, en effet, définir également une transformation de contact en disant : *une transformation qui change des éléments voisins réunis en des éléments de même nature*.

Nous ferons d'abord de nouveau usage de coordonnées non homogènes pour la représentation analytique. D'après notre dernière définition, nous obtenons la transformation de contact la plus générale en remplaçant les coordonnées x, y, p d'un élément principal par des fonctions des nouvelles coordonnées x', y', p'

(1) Elles ont été introduites par LIE (bien que considérées déjà occasionnellement par PLÜCKER et JACOBI). *Voir* le Mémoire de LIE, *Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen* (*Math. Annalen*, t. VIII), où les résultats des différents travaux antérieurs sont résumés.

telles que les expressions

$$dy' - p'\,dx' \quad \text{et} \quad dy - p\,dx$$

s'évanouissent toujours ensemble. Si donc nous posons

$$(17) \qquad x' = \varphi(x, y, p), \quad y' = \psi(x, y, p), \quad p' = \chi(x, y, p),$$

entre φ, ψ, χ doit avoir lieu l'équation (7), et de nos développements précédents résulte la proposition suivante :

Les équations (17) *représentent une transformation de contact si la condition* (6) *ou* (9) *est remplie, c'est-à-dire si*

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

relation où

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}.$$

A côté de cette représentation la plus générale dans laquelle il n'y a pas de distinction entre les cas où ce sont des points et ceux où ce sont des courbes qui correspondent aux points x, y, s'en présentent de plus particulières.

Par exemple, si aux points x, y correspond un nombre doublement infini de courbes, celles-ci peuvent être supposées données par l'équation (*æquatio directrix* de Plücker)

$$(18) \qquad \Omega(x, y, x', y') = 0,$$

en vertu de laquelle aux éléments principaux en nombre infini x, y, p qui comprennent le point x, y répondent les éléments principaux en nombre infini x', y', p' qui se réfèrent à la courbe $\Omega = 0$. Aux points d'une courbe $f(x, y) = 0$ correspond alors un ensemble de courbes $\Omega = 0$, et l'enveloppe de ces dernières (qui peut aussi se composer de points séparés) est la courbe homologue de la courbe $f = 0$ [1]. Un élément x, y, p qui comprend les deux points x, y et $x + dx, y + dy$ et qui satisfait, par suite, à la condition $dy - p\,dx = 0$, a pour correspondant l'élément qui est

---

[1] *Voir* Plücker, *Analytisch geometrische Entwicklungen*, t. II, Essen, 1831, p. 251. Un exemple est fourni par le cas considéré, t. II, p. 83, où les courbes $\Omega = 0$ sont données par les premières polaires d'une courbe donnée.

commun aux courbes

$$\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \Omega + \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy = 0;$$

si donc x', y' est un point d'intersection des deux courbes, la quantité p' qui s'y rapporte est évidemment donnée par

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'} + p'\frac{\partial\Omega}{\partial y'} = 0.$$

On a en même temps

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy = 0,$$

ou

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0.$$

Toute transformation de contact qui n'est pas une simple transformation ponctuelle peut, par conséquent, être aussi représentée par des équations de la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} \Omega(x, y, x', y') = 0, \\ p = -\dfrac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}}, \quad p' = -\dfrac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x'}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y'}}. \end{cases}$$

Au contraire, les transformations de contact qui sont de simples transformations ponctuelles peuvent être représentées par les équations (16)

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y);$$

on a alors

$$(20)\qquad p' = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}p}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}p}.$$

Les définitions analytiques données ici des transformations de contact peuvent s'énoncer immédiatement pour le cas des coordonnées homogènes si l'on se rappelle que la condition $dy - p\,dx = 0$ doit être remplacée par $u_{dx} = 0$ ou $(du)_x = 0$, et qu'alors la con-

dition (7) se change en l'équation (12) ou (13). Nous avons ainsi d'abord ce théorème qui embrasse tous les cas :

Par les équations

$$(21) \qquad y_i = F_i(x, u), \quad v_i = \Phi_i(x, u),$$

dans lesquelles les fonctions F_i, Φ_i *sont des fonctions homogènes de dimension nulle, se trouve représentée une transformation de contact si les conditions*

$$(F_i F_k) = 0, \quad (F_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (F_i \Phi_i) = 1.$$

sont satisfaites.

En effet, il vient alors, en vertu de $v_y = 0$, $u_x = 0$,

$$\Sigma v_i dy_i = \Sigma u_i dx_i, \quad \Sigma y_i dv_i = \Sigma x_i du_i.$$

Les équations (19) donnent, d'autre part, cette proposition : *Toute transformation de contact qui n'est pas une transformation ponctuelle peut être représentée par des équations de la forme*

$$(22) \qquad \begin{cases} \Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0, \\ \sigma u_i = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_i}, \quad \tau v_i = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_i}. \end{cases}$$

Si, enfin, il s'agit d'une *transformation ponctuelle*, on peut employer la représentation suivante. On partira de deux équations entre les x_i et les y_i

$$\Omega'(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Omega''(x, y) = 0,$$

et l'on déterminera un élément principal passant par x au moyen d'un paramètre λ par les équations

$$\rho u_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial x_i}.$$

L'élément principal correspondant qui passe par y est alors déterminé par

$$\sigma v_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial y_i} \quad [1],$$

---

[1] *Voir* Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 470, et Lie, *Math. Annalen*, t. VIII, p. 223.

et *l'ensemble des équations*

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0,$$
$$\rho u_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial x_i}; \quad \sigma v_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial y_i}$$

représente la transformation de contact.

L'importance fondamentale des transformations de contact pour la théorie des équations différentielles est déjà évidente d'après leur définition et ressortira encore davantage dans ce qui suit. En effet, de notre définition de l'intégrale M_1 d'une équation différentielle (p. 456), il résulte immédiatement que :

Les transformations de contact sont identiques aux transformations d'une équation différentielle (ou d'un connexe) dans lesquelles l'intégrale M_1 *de l'équation donnée se transforme en l'intégrale* M_1 *de la nouvelle équation.*

La chose a lieu en même temps pour *toute* équation différentielle *quelconque*, et par là se trouve établie une différence entre les transformations générales de contact et ces transformations que nous avons considérées précédemment et auxquelles était simplement imposée la condition restrictive de ramener l'intégrale M_1 d'*une* équation donnée à l'intégrale M_1 de l'équation transformée, et qui, par suite, sont à peu près, par rapport aux transformations générales de contact, ce que sont les transformations unidéterminatives d'une courbe particulière par rapport aux transformations Cremona de tout le plan. Bien que nous ayons, dans des considérations précédentes, supposé le caractère unidéterminatif de la transformation, cette supposition est inutile pour les questions qui se présentent actuellement ; en effet, les développements donnés alors, et en vertu desquels la transformation (21) doit satisfaire aux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\sum_i \Phi_i(F_i, f) = Kf + Lu_x,$$
$$\sum_i F_i(\Phi_i, f) = K'f + L'u_x,$$

pour présenter à l'égard d'une équation $f(x, u) = 0$ la relation

précitée (p. 403), continuent à être vrais indépendamment de la circonstance dont il s'agit.

Si ces conditions doivent être remplies indépendamment de $f = 0$, en vertu de $u_x = 0$, on en déduit de nouveau les équations (14), dont sont dérivées les équations (15). Il suffit, en effet, dans ce but, de remplacer f dans le second membre de la première équation par $\sum \frac{\partial f}{\partial u_i} u_i$, à part un facteur numérique, et dans la seconde équation par $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$. Si l'on annule alors individuellement les coefficients des grandeurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial u_i}$, on tire de nouveau de la première équation les conditions (14), à part le facteur K qui se présente dans le second membre, et de la seconde les équations correspondantes au point de vue dualistique

$$\sum_i \mathrm{F}_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} = \mathrm{K} x_k, \quad \sum_i \mathrm{F}_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = 0.$$

Mentionnons immédiatement ici l'important théorème qui suit :

Toute équation différentielle du premier ordre peut être changée par des transformations de contact en une équation différentielle quelconque du premier ordre ([1]); *elle n'a donc point d'invariants vis-à-vis de ces transformations.*

Pour le prouver, il suffit de montrer que l'on peut ramener l'intégrale M_1 de l'une des équations à celle de l'autre; et, pour apercevoir immédiatement que cela est possible, il suffit d'observer que tout système doublement infini de courbes peut être transformé en la double infinité des points du plan et que, par suite, tout système simplement infini de courbes peut l'être dans les points d'une droite telle que $x_1 = 0$. La possibilité de transformer toute équation différentielle en une autre quelconque résulte, en effet, de la possibilité démontrée par là de mettre toute équation sous la forme canonique $x_1 = 0$. Avec la réduction de l'équation

---

([1]) Le fait n'a plus lieu pour les équations d'ordre supérieur. (*Voir* LIE, *Göttinger Nachrichten*, 1872).

différentielle à cette forme très simple, son intégration serait naturellement fournie aussi, car les courbes intégrales de l'équation x_1 sont connues; elles se composent, d'après ce qui précède, des points de la ligne $x_1 = 0$ considérés comme sommets de faisceaux de rayons. C'est là une manière très digne d'attention de formuler le problème d'intégration.

Comme vis-à-vis des transformations de contact les points et les courbes ne diffèrent pas essentiellement, dans le but d'obtenir une généralité complète, nous ne parlerons plus de coordonnées-points. Au contraire, nous désignerons actuellement, en finissant, par x_1, x_2, x_3 les paramètres homogènes d'un système doublement infini de courbes (M_1) que nous appellerons système « spécial ». Une équation

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera la courbe enveloppée par les courbes spéciales M_1 dont les paramètres x_i satisfont à l'équation $\varphi = 0$. L'équation

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

représente, si les x_i sont considérés comme des paramètres, un nouveau système *linéaire* doublement infini de courbes M_1 que nous appellerons système *conjugué* du système originaire. Si l'on attribue aux grandeurs x_i, u_i des valeurs fixes telles que cette équation soit satisfaite, nous appellerons encore ces grandeurs les coordonnées d'un *élément principal*. Il ressort immédiatement de la signification par nous attribuée à une équation $\varphi(x) = 0$ que deux courbes des systèmes conjugués l'un à l'autre qui forment un élément principal se touchent respectivement; c'est ainsi que s'exprime géométriquement la condition réciproque dans les deux sens qui intervient à la place de la condition de la situation réunie du point et de la droite. En général, dans notre détermination actuelle de coordonnées, la spécialité de rôle que nous avons attribuée jusqu'ici au point et à la droite disparaît. La division des transformations de contact en transformations ponctuelles ou tangentielles proprement dites et en transformations plus générales d'éléments perd également ici son principal caractère. Il doit naturellement subsister une semblable division dans les formules, mais cette division ne répond plus à des conditions géométriques;

la séparation n'est plus que relative et dépendante du système de coordonnées choisi; elle n'est pas absolue.

A l'égard des éléments principaux ainsi définis, ont lieu tous les théorèmes précédents si l'on définit encore la situation réunie d'éléments voisins par la condition $u_{dx} \equiv -(du)_x = 0$. En particulier, une équation $\varphi(x, u) = 0$ qui renferme d'une manière homogène les x et les u et qui est supposée liée avec $u_x = 0$ sera appelée une équation différentielle. Intégrer cette dernière, ce sera établir une nouvelle équation

$$\psi(x, u, \alpha) = 0$$

renfermant un paramètre α, de telle façon qu'en vertu de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $u_x = 0$, on ait aussi

$$u_{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad (du)_x = 0$$

(p. 460), et ainsi de suite. Toutefois nous ne nous proposons pas de parcourir ici cette systématisation générale.

Nous avons considéré plus haut des transformations linéaires infiniment petites (p. 427). On peut de même établir des *transformations de contact infiniment petites*. Nous représenterons une transformation de cette espèce sous la forme

$$(23) \qquad y_i = x_i + \varepsilon\varphi_i(x, u), \quad v_i = u_i + \varepsilon\psi_i(x, u),$$

ε désignant une grandeur infiniment petite, les φ_i étant du degré zéro par rapport aux u_i, du premier par rapport aux x_i, et les ψ_i étant du premier degré par rapport aux u_i, du degré zéro par rapport aux x_i. En opposition à nos hypothèses précédentes, nous faisons donc usage maintenant de *fonctions de la première dimension* [1]. Les seconds membres des équations (23) doivent satisfaire encore ici aux conditions (15) si l'on pose

$$F_i = x_i + \varepsilon\varphi_i, \quad \Phi_i = u_i + \varepsilon\psi_i.$$

Mais on trouve alors, en développant et négligeant les grandeurs

---

[1] Une fonction de la première dimension par rapport aux x sera, en général, de la forme $\Sigma A_i x_i$, les A_i étant des fonctions de dimension nulle en x et u. On voit facilement que les équations (15) subsistent aussi pour les fonctions de dimension non nulle.

infinitésimales du second ordre,

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_i},\quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial\psi_k}{\partial u_i},\quad \frac{\partial\psi_i}{\partial u_k}=\frac{\partial\psi_k}{\partial u_i},$$

les lettres k, i pouvant recevoir toutes les valeurs 1, 2, 3 et, en particulier aussi, toutes deux une même valeur. Ces équations expriment qu'il existe une fonction H pour laquelle

$$\varphi_i=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i},\quad \psi_i=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}.$$

Les seconds membres de ces équations doivent être du même degré en x, u que les seconds membres de (23); on a donc

$$\sum_i u_i\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_k}\right)=0,\quad \sum_i u_i\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_i u_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}\right)=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_k},\quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i u_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}\right)=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k},$$

et, en intégrant et négligeant une constante inutile à considérer,

$$\sum_i u_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}=\mathrm{H}\quad\text{et de même}\quad \sum_i x_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}=\mathrm{H};$$

c'est-à-dire que H doit être une fonction de la première dimension par rapport aux x_i et aux u_i. Si l'on pose encore, dans (23), $x+dx$ à la place de y, $u+du$ à la place de v, et dt à la place de ε, on obtient ce théorème :

H *étant une fonction de la première dimension par rapport aux* x_i *et aux* u_i, *toute transformation de contact infiniment petite peut être représentée sous la forme* [1]

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i},\quad \frac{du_i}{dt}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}. \tag{24}$$

Au moyen de ces équations, à tout élément principal d'une équa-

---

[1] *Voir* LIE, *Göttinger Nachrichten*, 1874, p. 537, et *Math. Annalen*, t. VIII, p. 239.

tion $\Phi = 0$ répond un élément principal voisin. Il peut arriver en particulier que ce dernier appartienne de même à l'équation $\Phi = 0$, et alors cette équation est évidemment ramenée à elle-même par la transformation (24), ainsi que nous l'avons déjà également vu plus haut pour les transformations linéaires. Parmi les équations $\Phi = 0$ de cette espèce figure, en premier lieu, l'équation $H = 0$ elle-même. En effet, si, dans H, on pose $x + dx$ à la place de x et $u + du$ à la place de u, H se transforme, eu égard à (24), en

$$H + \sum \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial H}{\partial u_i} du_i = H.$$

C. Q. F. D.

Si l'on applique, au contraire, la transformation H, c'est-à-dire la transformation (24), à une équation quelconque $\Phi = 0$, il vient

$$\Phi + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} du_i = \Phi + dt \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial u_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right);$$

la fonction Φ se transforme donc en elle-même lorsque $(\Phi, H) = 0$, en vertu de $\Phi = 0$ (ou Φ identiquement nul), mais ne s'annule pas immédiatement en vertu de $H = 0$.

Le problème de l'intégration de l'équation $\Phi = 0$ est, dans ce sens, identique au problème de la détermination d'une transformation infiniment petite qui ramène la fonction Φ à elle-même. Mais toute fonction H qui représente une équation différentielle en involution avec Φ ne représente pas réciproquement sans préparation une transformation infiniment petite. On reconnaît par cette proposition combien l'étude plus étendue de ces transformations présente d'intérêt; toutefois nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet ([1]).

A ces explications sur la notion idéale des équations différentielles, nous ajouterons pour finir quelques remarques sur leurs

---

([1]) En particulier, on obtient une nouvelle manière de concevoir la proposition appelée Théorème de Poisson et de Jacobi. (*Voir* Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 268). On arrive ensuite à interpréter géométriquement la théorie du facteur d'ingrabilité. Sur ce dernier point de vue, *voir* un Mémoire de Lie, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania*, 1874, p. 242 et suiv.

solutions singulières. On a coutume d'introduire ces dernières de la manière suivante ([1]). L'équation

$$f(x_1, x_2, x_3; \alpha) = 0,$$

dans laquelle α est un paramètre, représentant une infinité de courbes, on considérera le lieu des points d'intersection des courbes consécutives, lieu dont l'équation s'obtient en éliminant α entre

$$(25) \qquad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{d\alpha} = 0.$$

Ce lieu, s'il n'existe pas de relations particulières entre les constantes de la fonction f, est *l'enveloppe des courbes* $f = 0$, et il se présente comme solution singulière de l'équation différentielle dont les courbes intégrales sont précisément données par $f = 0$. Or il peut arriver que la courbe ainsi trouvée ne soit pas une courbe proprement dite, mais soit absorbée en tout ou en partie par le lieu des points doubles des courbes $f = 0$ ou d'autres points singuliers mobiles, ou qu'il n'y ait pas de courbe du tout, comme, par exemple, si $f = \varphi + \alpha\psi$, c'est-à-dire si $f = 0$ représente un faisceau de courbes. D'ailleurs on peut, dans ce dernier cas, en conséquence de notre définition générale des courbes intégrales (p. 457), considérer comme figure enveloppe les points de base d'un faisceau de courbes envisagés chacun comme sommet d'un faisceau de rayons et, dans ce sens, parler encore d'une solution singulière. Si, au contraire, les points d'intersection de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, par exemple, se réunissent par couples, toutes les courbes intégrales se touchent aux points dont il s'agit, et il existe un nombre fini d'éléments principaux spéciaux, mais aucune solution singulière formée par eux.

En présence des diverses hypothèses possibles, on doit se poser tout d'abord cette question : *Qu'arrive-t-il en général* ([2])? c'est-

---

([1]) Pour ce qui concerne une exposition systématique de ces théories sous leur aspect usuel et, en particulier, dans leur développement historique, *voir* BOOLE, *A treatise on differential equations*, 2ᵉ ed., Cambridge and Dublin, 1865, p. 163 et suiv., et *Supplementary volume*, p. 28 et suiv.

([2]) *Voir*, pour ce qui suit, DARBOUX, *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. IV, 1873), ainsi que CLEBSCH (*Math. Annalen*, t. VI, p. 211).

à-dire si les coefficients de l'équation différentielle donnée ne satisfont à aucune relation particulière. En premier lieu, il est clair que pour tout point de la courbe intégrale singulière deux des directions d'avancement correspondantes (éléments principaux) se confondent. Or le lieu des points pour lesquels cette circonstance se présente est, en général, le lieu des rebroussements des courbes intégrales, et n'est pas, à proprement parler, une courbe enveloppe, ainsi que nous l'avons déjà vu précédemment dans les équations différentielles algébriques (p. 391), et qu'on le démontre absolument de la même manière pour les autres équations. D'autre part, il va de soi que l'on déduit des équations (25) une courbe enveloppe proprement dite si les coefficients de $f = 0$ sont de nature générale [1]. Nous pouvons exprimer ce fait dans la proposition suivante :

Les constantes, dans une équation différentielle du premier ordre, sont assujetties à satisfaire à des conditions particulières, si les courbes intégrales doivent avoir une courbe enveloppe proprement dite; dans le cas contraire, il existe entre les constantes de l'équation intégrale des relations telles qu'à la place de cette courbe se présente un lieu de points de rebroussement. La question de savoir lequel des deux cas se présente en général dépend de la question de savoir si l'on suppose que l'équation différentielle ou l'équation intégrale soit donnée comme générale [2].

Il nous reste à indiquer les conditions moyennant lesquelles on obtient une courbe enveloppe proprement dite. Notre raisonnement précédent, qui nous a conduits au lieu de rebroussements

---

[1] Il peut naturellement se présenter dans des cas particuliers des exceptions d'une autre espèce. Ainsi, par exemple, de la courbe déduite de (25) se séparera le lieu des points doubles des courbes $f = 0$, ainsi qu'il a été observé, lorsqu'il se rencontrera un lieu de cette nature; il se pourrait aussi que la courbe fût absorbée tout entière par un lieu semblable, et alors il n'y a plus d'enveloppe. Un tel lieu de points doubles n'a d'ailleurs plus de rapport avec le lieu des rebroussements, car pour un point du premier deux des rayons homologues de coïncidence ne se confondent nulle part.

[2] Le fait qu'un lieu de rebroussement se présente lorsqu'il n'existe pas de courbes enveloppes proprement dites a déjà été démontré par De Morgan : *On some points of the calculus* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. IX, Part II).

$F = 0$ ne devient inexact que si la direction d'avancement, qui appartient à un point de $F = 0$ et qui doit être comptée double, se confond avec la tangente de F en ce point, car alors une courbe intégrale peut s'approcher de ce point et s'en éloigner de nouveau sans franchir la courbe F et sans pourtant former un rebroussement précisément, parce qu'elle touche la courbe F au point dont il s'agit; la courbe $\Phi = 0$ enveloppée par les droites des éléments principaux comptant double (dont les points sont situés sur $F = 0$) doit, par conséquent, se confondre avec $F = 0$. Mais la condition du contact proprement dit est réciproque par rapport à elle-même; la même courbe F sera donc nécessairement aussi enveloppée par les droites qui sont, en général, les tangentes d'inflexion des courbes intégrales (tangentes de $F' = 0$), c'est-à-dire qui, complétées par un point comptant double, forment un élément principal comptant double de l'équation différentielle; et enfin le lieu $\Phi' = 0$ de ces derniers points sera identique à $F = 0$.

Si donc une solution singulière (une courbe enveloppe proprement dite) doit se produire, il faut que le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales ($F = 0$), *ou une partie de ce lieu, se confonde avec le lieu des tangentes d'inflexion de ces courbes* ($F' = 0$), *ou avec une partie de ce dernier*. Avec l'enveloppe se confondent alors le lieu des points d'inflexion et l'enveloppe des tangentes d'inflexion, ou du moins des parties de cette courbe.

La formation des équations $F = 0$, $F' = 0$ peut s'effectuer de la manière décrite précédemment, car les règles qui y sont relatives sont applicables aussi bien aux courbes transcendantes qu'aux courbes algébriques. On peut alors reconnaître immédiatement sur ces équations s'il existe une solution singulière et indiquer cette dernière; F *doit précisément renfermer un facteur qui, représenté en coordonnées-lignes, est précisément identique à un facteur de* F'. Des facteurs linéaires de F et F', s'il s'en présente, exigent seuls des études spéciales, parce qu'ils ne sont représentables que dans un seul système de coordonnées. Dans ce qui précède, sont renfermés les principes d'après lesquels on tranchera de la manière la plus avantageuse ce genre de questions.

Nous observerons encore seulement que, dans des cas particuliers, les courbes intégrales peuvent être liées à la courbe $F = 0$

d'une façon encore plus étroite. Si, par exemple, les courbes intégrales se composent des cercles de courbure d'une courbe plane, cette dernière est une enveloppe d'osculation; elle est en même temps touchée et traversée par les courbes intégrales. Ou encore, si les courbes intégrales appartiennent à un réseau

$$A + B\lambda^p + C\lambda^q = 0,$$

la jacobienne du réseau est non le lieu des rebroussements des courbes intégrales, mais le lieu de leurs points de contact avec elles-mêmes, sans cependant être une courbe enveloppe (t. II, p. 97). Pour finir, nous éclaircirons ces explications par une *série d'exemples* [1].

I. Soit donnée l'équation différentielle

$$x\,dy = y\,dx \log y, \tag{26}$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{u_1}{u_3} + \log\frac{x_2}{x_3} = 0. \tag{27}$$

Ici, évidemment, le point $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, c'est-à-dire $x = 0$, $y = 1$, est commun à toutes les courbes intégrales (lesquelles sont représentées par $y = e^{Cx}$ [2]. Comme les u_i entrent linéairement, il n'y a pas de lieu de rebroussements. Pour obtenir l'enveloppe des tangentes d'inflexion $F' = 0$, il faut représenter l'équation ponctuelle (27) en coordonnées-lignes v, c'est-à-dire éliminer ρ et v_i entre les équations

$$\rho v_1 = \frac{1}{x_2}\frac{u_1}{u_2}, \quad \rho v_2 = -\frac{x_1}{x_2^2}\frac{u_1}{u_2} + \frac{1}{x_2}, \quad \rho v_3 = -\frac{1}{x_3}$$

et entre (27). Cela donne

$$\log\left(-\frac{v_3}{v_1}\frac{u_1}{u_2}\right) - \left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{u_2}{u_1}\right) = 0. \tag{28}$$

De là prend naissance F' pour $u = v$; on a donc

$$F' \equiv u_3 + u_2 = 0 \tag{29}$$

---

(1) On trouve d'autres exemples dans DARBOUX, *loc. cit.*

(2) Sur l'intégrale particulière $y = 0$ de cette équation, *voir* BOOLE, *op. cit.* (*Supplementary volume*, p. 14 et 17).

pour la courbe cherchée. Cette dernière se confond avec le point commun des courbes intégrales et donne une solution singulière. En effet, on ne peut pas déduire l'équation (29), par une valeur particulière de C, de l'équation des courbes intégrales en coordonnées-lignes

$$\Psi \equiv \log\left(-\frac{1}{C}\frac{u_1}{u_2}\right) - C\frac{u_3}{u_1} + 1 = 0;$$

cette équation s'obtient, au contraire, par élimination de C entre

$$\Psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi}{dC} = 0$$

II. L'équation différentielle (¹)

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}y^3\frac{dy}{dx} + a^2 = 0 \tag{30}$$

a l'intégrale générale

$$4a^2x^2 - 2Cy^2 + C^2 = 0$$

et, par suite, la solution singulière

$$4a^2x^2 - y^4 \equiv (2ax - y^2)(2ax + y^2) = 0. \tag{31}$$

De (30) nous déduisons le connexe

$$a^2u_2^2x_3x_1 - x_2^2u_3u_1 = 0.$$

La forme F tire donc son origine de

$$4v_1v_3u_1u_3 - a^2u_2^2v_2^2 = 0,$$

si l'on pose $u = v$; on a donc

$$F \equiv 4u_1^2u_3^2 - a^2u_2^4 = 0,$$

et l'on trouve de même

$$F' \equiv 4a^2x_1^2x_3^2 - x_2^4 = 0.$$

Les deux dernières équations représentent en fait la même courbe (31).

III. Les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y}$$

(¹) SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, 3ᵉ éd., t. I, p. 509.

forment un système de courbes du troisième ordre à rebroussements

$$(x+Cy)^2y=1 \quad \text{ou} \quad (x_1+Cx_2)^2x_2=x_3^3.$$

Les rebroussements occupent la ligne $x_3=0$. Nous obtenons le connexe

$$u_1^2x_2-u_2^2x_3=0.$$

La courbe F, c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels deux valeurs de $u_1:u_2$ se confondent, se compose de $x_3=0$, le lieu des rebroussements, et de $x_2=0$, tangente d'inflexion fixe; le point de rencontre des deux lignes est le point d'inflexion commun; il ne représente pas de solution singulière, parce qu'il lui correspond une *seule* direction spéciale d'avancement.

IV. L'équation différentielle (¹)

$$(32) \qquad y^2-2xy\frac{dy}{dx}+(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$$

est caractérisée par le fait que ses courbes intégrales

$$y=Cx\pm\sqrt{1-C^2}$$

se composent des tangentes d'une conique fixe; elle correspond donc dualistiquement à une équation qui ne renferme pas les différentielles des coordonnées (²), et dont les intégrales se composent de l'ensemble des points d'une courbe fixe (p. 456). Le connexe auquel répond l'équation (32) ne peut donc pas renfermer les coordonnées-points x, et par le fait on trouve, pour ce connexe, l'équation

$$u_1^2-u_2^2+u_3^2=0.$$

Il représente en même temps la solution singulière de (32) en coordonnées-lignes.

(¹) C'est sur elle que LAGRANGE a d'abord développé sa théorie des solutions singulières. (*Voir* BOOLE, *loc. cit.*, p. 149 et 165.)

(²) PLÜCKER a également appelé l'attention sur ce fait, que, dans la transformation d'une équation différentielle de coordonnées de points en coordonnées de plan, les dérivées peuvent disparaître totalement, et que l'équation de surface qui prend ainsi naissance est une solution singulière. (*Voir* son Ouvrage : *System der Geometrie des Raumes*, Düsseldorf, 1846, p. 27.)

FIN DU TOME TROISIÈME.

TABLE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE.

ERRATA.

Tome I, page 238, ligne 9 en remontant, *au lieu de* τx_3, $\tau \dot{x}_3$, *lisez* σx_2, σx_3.

Page 380, ligne 10 en remontant, *au lieu de* covariants, *lisez* coordonnées.

Tome II, page 145, ligne 17, *au lieu de* Φ_0, *lisez* Φ.

Page 323, ligne 15 de la note, *au lieu de* $\Theta^{(\Sigma)}$, *lisez* $\Theta^{(\mathfrak{S})}$.

Page 323, ligne 20 de la note, *au lieu de* $\mathfrak{S}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$, *lisez* $\mathfrak{S}^{(\varkappa\Pi+\lambda\mathfrak{P})}$.

Page 323, ligne 23 de la note, *au lieu de* $\mathfrak{S}^{(\Sigma)}$, *lisez* $\mathfrak{S}^{(\mathfrak{S})}$.

Page 338, ligne 3 en remontant. La courbe représentée par ces équations n'est pas la cayleyenne de la courbe (11) proposée, mais de celle dont (11) est la hessienne.

Page 342, ligne 4, *au lieu de* $\frac{4}{3}\varkappa\lambda(\ldots.+9\lambda^2F^2)$, *lisez* $\frac{4}{3}\varkappa\lambda(27\mathfrak{T}F-8S^3)+9\lambda^2F^2$.

Tome III, page 29. Quant à la démonstration de M. Zeuthen mentionnée ici, *comparez* SCHUBERT, *Mathematische Annalen*, t. XVI, p. 180.

Page 54, note, *au lieu de* Robert, *lisez* Roberts.

Page 213. Sur l'étude des expressions différentielles homogènes, particulièrement dans l'établissement du théorème d'Abel, *comparez* CREMONA : *Sugli integrali a differenziale algebrica* (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, série II, T. X, 1870).

Page 235, ligne 10 en remontant, *après* r, *ajoutez* et m; même ligne, *au lieu de* $M = M'.s$, $r = r'.s$, *lisez* $M = M's$, $r = r's$, $m = m's$.

Page 235, ligne 9 en remontant, *au lieu de* M', r', *lisez* m', r'.

Page 236, ligne 11 et 12, *au lieu de* $M = M's$, $r = r's$, M', r' étant des nombres premiers entre eux, *lisez* $M = M's$, $r = r's$, $m = m's$; m', r' étant des nombres premiers entre eux.

Page 236, ligne 13 et 14, *au lieu de* dans le cas seulement où M et r sont des nombres premiers entre eux, *lisez* dans le cas où m, r et M n'ont pas de facteur commun.

Page 293, note, *au lieu de* principe de la translation, *lisez* principe de translation.

7022. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins. 55.